Leibnizens

mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Zweite Abtheilung.

Band III.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1856.

LVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Primo cursore Tuas Dno. Menkenio misi, jussique ut mature publicari curet, Te Problematum Fraternorum solutiones brevissimo tempore dedisse.

Videris circa tuam curvam (ubi $PL^2 . PK = a^3$) frustra aliquid metuere. Extractio succedens in valore ordinatae hic nihil nocet, nec opus in hoc casu, ut discriminantia evanescant, sed pro illis tantum curvis, ubi radices eodem modo tractantur. Hoc vero discrimen inter $PL^2 . PK$ et $PL . PK^2$ tantum abest tolli oportere, ut potius sit conservandum. Sed talia ex festinatione excidere solent,

Et hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Placet quod video suspiciones meas circa observationem dioptricam Domini Fratris Tui relatione Tua confirmari.

Putasne me tam male mihi consulere, ut sumtus conferre velim in Machinam, quae nihil aliud praestet, quam ea quae Tibi visa est? Si quicquid non a quovis redimi commode potest, curiosum magis quam utile esset, nec triremes scaphis praestarent, nec tormenta sclopetis. Illud quaeritur, annon ultra proportionem sumtuum, etiam effectus crescat. Equidem Morlandus in Anglia, Tubae stentoreae autor, Rhabdologiam ex baculis in cylindrulos transtulit, et additiones auxiliares peragit in adjuncta M a c h i n a a d d i t i o n u m P a s c a l i a n a. De qua re et Librum scripsit. Tale

quid post ipsum fecit et Grilletus Gallus; sed omnia ista nihili fere sunt, nullamque notabilem praestant utilitatem. Ego jam praedixeram, cum Rhabdologia aut inde deductis nihil ei instrumento commune esse, quod ego sum commentus. Descriptionem ejus dare accuratam res non facilis foret. De effectu ex eo judicaveris, quod ad multiplicandum numerum sex figurarum (exempli gratia) per alium sex figurarum rotam quandam tantum sexies gyrari necesse est, nulla alia opera mentis nullisque additionibus intervenientibus; quo facto, integrum absolutumque productum oculis objicietur. Idem est de divisione, ubi nullo in quaerendo quotiente opus est tentamento subtractionibusque nullis. Coram Tibi ostendere machinam, intus et extra, mihi aliquando jucundissimum erit. Non est facta pro his, qui olera aut pisciculos vendunt, sed pro observatoriis aut Cameris computorum, aut aliis, qui sumtus facile ferunt et multo calculo egent. Video Dnum. De la Hire expertum esse, quanto facilius sit Analyticas nostras Demonstrationes solutionum nostrarum vertere in syntheticas, quam solutiones talium problematum per se invenire.

Animadversiones meae in partem generalem Principiorum Cartesianorum scriptae sunt ad captum Lectorum, qui profundiora non attingunt.

Quod Domini Fratris Tui Problema attinet, utique curvam ex pluribus ejusdem baseos et speciei, a dato puncto, brevissimo tempore, ad datam rectam appellentem mihi ope Synchronae eleganter exhibere videris; nam ita rem praestas constructione lineari. Ego primo aspectu modum observavi parametrum lineae quaesitae exhibendi, numero quantumvis accurato, quoties algebraice haberi non potest; quo tunc contentus eram, quia hic de determinata tantum quantitate, nempe parametro, non de linea aliqua, seu indefinito quaerendo agitur. Melior quidem est constructio linearis, sed hanc ego tunc non quaesieram, quia id unice respexeram, quod levissima consideratione inter scribendum ad Te in mentem venerat. Interim verba mea nescio quomodo in transversum accepisti. Neque enim in mentem venit dicere d e t e r m i n a t u m c u r v a r u m n u m e r u m r e q u i r i, ut Epistola tua mihi ascribit, sed d e t e r m i n a t u m n u m e r u m, non curvarum, sed mensurae rationem parametri ad rectam constantem seu unitatem exhibentis. Caeterum post Synchronas semel ad hoc negotium a Te pulchre applicatas, non puto Tibi genio atro vel albo (ut cum

Zwinglio vestro per jocum loqueris) opus fuisse ad rem in aliis quoque praeter Cycloïdem curvis praestandam. Etsi enim in caeteris, recta positione data lineae quaesitae non sit perpendicularis, est tamen (quantum judico) semper tangens Synchronae, ac proinde tantum opus est describi Synchronam, quae rectam positione datam tangat. Sint (fig. 109) lineae specie convenientes et similiter ad A positae A F G, A (F)(G), et ipsam rectam Z G B (G) positione datam tangat Synchrona F B (F), tunc utique, ut in Cycloïde facis, merito Tecum concludemus, ipsam A B esse lineam quaesitam brevissimi appulsus. Nam quaevis alia ipsi Z B occurreret in G; est autem tempus per A F G longius quam per A F seu per A B. Hinc poteras solutionem tuam adhuc reddere generaliorem, ut praestet quaesitum, non tantum quando positione data, ad quam citissime pervenire debet, est recta, sed etiam si sit curva, imo si esset non linea, sed superficies, posses pro synchrona linea adhibere synchronam superficiem, quae superficiem positione datam tangat; sed haec Te (si modo animum advertas) latere non possunt.

Miratus sum Dominum Fratrem problemata Tibi proponere voluisse, pulchra quidem per se, sed de quibus tamen facile judicare potuisset, viam Tibi ad ea patere ex ipsa solutione Brachystochronae. Tota enim clavis hujus methodi inveniendae Formae maximum praestantis in eo consistit, ut maximum non solum in toto, sed et in parte praestetur, licet indefinite parva. Ita si descensus sit celerrimus ab uno extremo lineae ad aliud, etiam (fig. 110) in particula ejus B C D erit brevissimus descensus a puncto B ad D. Et quia curva infinite parva B C D sumi potest pro composito ex duabus rectis B C, C D, hinc oportet tantum quaerere punctum C tale, ut descensus in duabus rectis istis sit brevissimus; quo facto, habebitur Brachystochrona. Et quia tribus punctis indefinite propinquis seu curvedine determinatur osculans circulus, vel contra, hinc revera duae methodi, mea et tua, quam directam vocas, in fundo coincidunt. Hac methodo res etiam praestatur pro Catenaria; nam quia catenae longitudine datae, datis duobus extremis, situs debet fieri talis, ut Centrum gravitatis maxime descendat, patet etiam in Catenariae punctis indefinite vicinis hoc fieri, ut, data particulae curvae longitudine, seu summa rectarum B C, C D, et extremitatibus B, D, puncti C sit situs talis, ut hujus ex duabus rectis compositi datam longitudinem ha-

bentis centrum maxime descendat, unde curvatura et proprietas osculorum, imo et tangentium, determinari potest.

Eadem locum habent suo modo in maximis spatiis Isoperimetrorum, vel ut Isoperimetra relatorum.

Suspicor Dominum Fratrem Tuum etiam ope Synchronarum ad brevissimos appulsus venisse, quia video eum connexionem cum radiis et undis Hugenianis perspexisse; unde facile potuit Synchronas animadvertere. Sed miror, quod non Tibi eadem facile patere posse judicavit. Quae de quadraturis ipsarum $y = \int x^n dx : \sqrt{a^{2n} - x^{2n}}$ habes, fortasse Dominum Fratrem Tuum non latent. Si facias $x^n = z$, fiet $y = \int dz . z^{1:n} : n\sqrt{a^{2n} - zz}$, pro qualibus olim me Canones quosdam condidisse puto. Volebam monere, ne obliviscereris solvere eam problematis partem, ubi curvae novae ordinata est in ratione, non ad prioris ordinatam, sed arcum: sed video et hoc in Tua generalissima solutione curvae utcunque relatae contineri.

Haud dubie Dominus Frater Tuus solutionem omnium quae proposuit problematum exiget tanquam conditionem quae solutionem honorarii ingrediatur; diserte enim pag. 21 *) requirit solutiones.

Caeterum aliquem alium arbitrum mihi adjungi e re erit, quem Domino Fratri Tuo nominandum relinquemus, siquidem ipsi conditio placet. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 15. Junii 1697.

P. S. Reliqua Fragmenta ex Actorum Lipsiensium mense nuper transmisso remitti peto, et judicium tuum de meis ad Cartesium Animadversionibus expecto.

---

*) Act. Erud. 1697.

LVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quae narras de Machina Tua arithmetica faciunt, ut jam quid majus de ea concipiam. Si illam curiosam magis quam utilem suspicabar, nolim tamen Te putare quasi illam contemserim; contrarium potius, nam curiosum sine utili pluris aestimo, quam utile sine curioso: sed qui utrumque miscuit, omne tulit punctum: et hoc nomine Tuam Machinam licet mihi nondum visam, ex Tua tamen relatione maximi facio. Pergratum utique esset, eam aliquando coram videre.

Quod arbitratum me inter et Fratrem acceptaveris, mirifice gaudeo; scripsi nuper Bellavallio Epistolam satis longam, quam forsan imprimet*), ubi judicium meum aperui de solutionibus problematis mei quae novissime in Actis prodierunt, simulque mentionem injeci de reciproca propositione Problematum Fraternorum et de plenaria mea solutione eorum apud Te (nostrum Judicem) jamjam deposita. Non video, cur e re sit Tibi alium arbitrum adjungi a Fratre nominandum, vel qua fronte Te solum recusare audeat, cum nemo sit qui ignoret Te nullo partium studio teneri, praesertim in illis rebus, per quas solas nos ambo Tibi noti sumus, ut adeo hac in parte non sit, cur uni magis faveas quam alteri. Interim urgendus est frater ante omnia, quod etiam in epistola ad Bellavallium monui, ut sine tergiversatione praemium promissum apud Te deponat. Ut autem ostendam, quam parum molior spe mercedis, pecuniam illam si mihi adjudicabitur, per publicas personas pauperibus distribui curabo.

Si verba Tua in Tuis praecedentibus, forsan ob coarctatam et confusam nimis scriptionem in transversum accepi, legendo d e t e r m i n a t u m   n u m e r u m   c u r v a r u m, pro d e t e r m i n a t o   n u m e r o   m e n s u r a e   r a t i o n i s   p a r a m e t r i   a d   c o n s t a n t e m, non minus sinistre interpretaris sensum verborum meorum, quasi ego non praeviderim Synchronam a me semel adhibitam in Cycloïdibus pro determinando celerrimo appulsu ad lineam rectam utcunque positione datam, generaliter posse applicari ad rem in

---

*) Siehe Histoire des Ouvrages des Sçavans. Juin 1697.

aliis quoque praeter Cycloïdem curvis praestandam; cum tamen in literis meis disertis verbis dixerim rem perpetuo eo recidere, ut prius determinetur Synchrona curvarum datae speciei. Scio etiam maxime, quod etiamsi recta positione data non sit perpendicularis in aliis praeter Cycloides curvis, tamen semper sit tangens Synchronae, et qui hoc ignorare potuissem, cum Synchronae natura hoc statim secum ferat, et impossibile sit ut illam contemplari potuissem, quin hoc ipso id viderim; ut verbo dicam, non potui non videre. Sed hic id ipsum quaero, quod Tu pro concesso tanquam postulatum assumis, ac si nihil difficultatis inesset, dum dicis, ac proinde tantum opus est describi Synchronam, quae rectam positione datam tangat. Imo maxime hoc opus est, et opus esse semper agnovi: sed quomodo, quaeso! describenda est Synchrona generaliter in curvis datae alicujus speciei? Habeo ego methodum pro hoc, quae est illa ipsa, quam a peculiari genio mihi inspiratam per jocum dixi, praeterea tametsi innotescat (quod quidem palmarium est) modus construendi Synchronam, non tamen inde statim deducitur modus ducendi ejus tangentes, quia si meministi, non ita pridem Tibi dixi, dari aliquas curvas quarum constructio simplissima habetur, quae tamen non facile aequatione differentiali, nedum algebraica, exprimi possunt; atque adeo cum tangens curvae duci non possit, nisi cognoscatur relatio inter dx et dy, id est, nisi habeatur aequatio differentialis naturam curvae exprimens, evidens quoque est modum construendi Synchronas (qui per se etiam maxime difficilis est) nondum sufficere pro determinatione Problematis, sed requiri insuper relationem inter dx et dy, ut habeatur tangens, vel potius ut data tangente seu inclinatione rectae positione datae habeatur punctum in Synchrona, cui ista inclinatio conveniat. Et sane exemplo nobis sit vel sola Synchrona Cycloïdum, cujus constructionem tam brevem, tamque simplicem trado: quomodo quaeso exinde ejus aequationem differentialem quaereres, vel saltem quomodo determinares ejus tangentes, si non aliunde constaret, nempe ex consideratione undae luminaris, quod sit perpendicularis Cycloïdibus? Non quidem dubito quin eo pervenias, si tentare digneris, namque et ego eo perveni et inveni modum reducendi hujusmodi curvas ad suas aequationes: sed repeto quod dixi, singulare scilicet artificium pro hoc requiri, quod fratri facile obvium non puto. Mirari itaque satis non possum, quod

ita perfunctorie hoc consideraveris. Quam frigide dixissem, me a genio quodam habuisse, si nihil aliud mysterii subesset quam id quod recta (vel si mavis curva) positione data tangere debeat Synchronam. Optarem ut periculum fecisses in unico illo exemplo, quod Frater proponit de circulis, quo difficultatem rei ipse expertus fuisses. Oportet utique ut Frater ipse illud pro desperato habeat, cum dicat, se aliis relinquere tentamen ejus, sibi sufficere proposuisse. Interim prima occasione mittam Tibi non solum pro hoc; sed generalem Methodum determinandi curvam ex infinitis speciei datis, per quam grave descendens citissime appellit ad rectam positione datam, idque sine interventu curvae Synchronae, quod haud facile credideris, quamvis id, mediante Synchrona, etiam praestare possim, quaerendo scilicet aequationem differentialem pro natura Synchronae. Sed hic modus non tam naturaliter nec tam simpliciter procedit, ac alter ille sine Synchrona.

Suspicaris Fratrem meum etiam ope Synchronarum ad brevissimos appulsus venisse: ego autem nil minus credo quam hoc; contra potius persuasus sum totus, per ingentes ambages quaesito tandem potitum fuisse (et quidem tantum in Cycloïdibus, nam ut jam dixi in aliis curvis id pro desperato habet). Atque adeo suam viam (qua breviorem dari non putaverit) mihi oppido imperviam credidisse. Perpende, obsecro, si vel per somnium de Synchrona cogitasset, annon pro recta verticali quamvis aliam obliquam positione datam citissime attingendam proposuisset, cum per Synchronam res aeque facilis sit, sive recta sit verticalis, sive obliqua: quod vero dicis eum perspexisse connexionem cum radiis et undis Hugenianis, pace tua, ego contrarium dixerim; id ipsum enim quod curvaturae radii (non vero undae) mentionem faciat, absque tamen ut quicquam dicat de identitate ejus cum Brachystochrona, satis indicio est, hanc connexionem omnino ignorasse, et de unda nequidem cogitasse. Unde non immerito suspicor, si mea in Actis nondum viderit, ne nunc quidem scire rectam suam verticalem debere esse perpendicularem ad cycloidem brevissimi appulsus, licet lectis illis se semper scivisse simultaturus sit, suam vero constructionem cujus prolixitatis pudebit studiose celaturus.

Quod attinet alterum Fratris Problema de Isoperimetris, quando credis illud ex hoc fonte posse solvi, considerando maximum non solum in toto, sed in parte praestari, et particulam

curvae indefinite parvam censendam esse compositam ex duabus rectis, quarum situs sit determinandus ita, ut illae duae rectae quarum summa constans supponitur, praestent maximum vel minimum requisitum, quo situ invento, dari tria puncta, et per consequens Circulum per ea transeuntem, id est ipsum Circulum osculatorem, unde in fundo hanc methodum cum mea quam directam voco, coincidere concludis: hic iterum prius pronuntiasse quam satis examinasse videris. Scire Te volo, me initio etiam habuisse hanc meditationem, qua singulare quid efficere sperabam: concipiebam enim (fig. 111) BD ut subtendentem particulae curvae infinite parvae, ex cujus extremitatibus B et D, tanquam focis, imaginabar Ellipticulam ECF, per filum BCD aequale particulae curvae quaesitae descriptam. Jam in hac Ellipsi ECF (quae considerari potest ut finitae et ordinariae magnitudinis) quaerebam punctum C, ad quod ductae BC, DC praestarent aliquod maximum vel minimum desideratum. Sed praeterquam quod calculus prolixissimus et taediosissimus evaderet, videbam etiam statim, hoc mihi pro determinatione longitudinis radii circuli osculantis plane nihil facere, nam prout filum BCD longius breviusve intelligitur (licet excessus ejus super BD debeat esse incomparabiliter minor quam BD vel BCD) necessario alius atque alius Circulus per tria puncta B, C, D transibit; adde quod interdum accidit, ut maximum quod in toto praestandum est, in particulis infinite parvis diversimode considerari possit; unde etiam diversae solutiones prodirent, quod est absurdum. Exempli gratia, in ipsa Catenaria, ubi requiritur ut ejus Centrum gravitatis quam maxime descendat, et cujus quaelibet particula BCD consideratur aequaliter gravata, ponderculum ejus vel secundum totam longitudinem BCD extensum, vel in uno puncto C collectum, intelligi potest. Jam vero si quaeras situm puncti C, ita ut commune Centrum gravitatis linearum BC, CD quam maxime descendat, ad quod operoso calculo Tibi opus est; item si quaeras situm ejus, quando ponderculum collectum, id est ipsum punctum C quam maxime descendit, quem sine calculo vides esse in eo puncto, in quo linea horizontalis Ellipsin tangit; deprehendes duos illos situs esse diversissimos; unde in una hypothesi aliud specie triangulum BCD, et per consequens alius circulus osculator prodiret, quam in altera; quod non potest subsistere, et sic frustra hac via quaereres naturam Curvae.

Alia ergo via mihi incedendum erat ad determinandas ex Isoperimetris curvas, quarum summa applicatarum ad certam potentiam elevatarum vel alio certo modo cum constante permixtarum, faciat maximum. Ut totum Tibi mysterium quo usus sum detegam, en tale est: Quaerenda est generaliter curvatura lintei a liquore stagnante expansi, quoniam enim linteum eam figuram accipiet, quae Centro gravitatis liquoris concedat locum infimum. Si jam concipis liquorem dividi in filamenta parallela verticalia, quae sint vel quae fingantur potius gravata in applicatarum ratione vel simplici (ut in ordinaria lintei figura) vel duplicata, vel triplicata etc.: evidens est Centrum gravitatis omnium istorum filamentorum seu totius liquoris distare a basi horizontali (suppositis applicatis verticalibus x, et horizontalibus y, et numero potestatis, in cujus ratione filamentum liquoris supponitur gravatum, $n-1$; ipsa autem quantitate liquoris L) $\frac{\int x^n dy}{L}$. Distantia vero haec est maxima: ergo etiam $\int x^n dy$ est maximum: Ergo curvatura lintei continentis liquorem, cujus filamenta verticalia sunt gravata in ratione potestatis $n-1$ ipsarum applicatarum verticalium, est eadem quae foret curva ex omnibus Isoperimetris quaesita, cujus applicatarum ad potestatem n elevatarum summa produceret maximum. Ex hoc fundamento reperi pro natura curvae $y=\int \frac{b^n+x^n dx}{\sqrt{a^{2n}-(b^n+x^n)^2}}$, vel contractius, ponendo pro b, quod arbitrarium est, 0, $y=\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$. Quod autem haec expressio simplicior reddi possit, faciendo $z=x^n$, unde $y=\int \frac{z^{\frac{1}{n}} dz}{n\sqrt{a^{2n}-zz}}$, id mihi jam innotuisse ex eo potes colligere, quod in praecedentibus meis determinaverim casus, quando evadit absolute summabilis, quando requirit extensionem arcuum Circularium, et quando neque summabilis neque circulabilis est; nempe si n est fractio, vel, quod eodem redit, si $\frac{1}{n}$ est numerus integer impar, habebuntur casus primi; si $\frac{1}{n}$ est numerus par, habebuntur casus secundi; si vero n est numerus integer, habebuntur

casus tertii. Hanc autem reductionem $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$ ad $\int \frac{z^{\frac{1}{n}}\,dz}{n\sqrt{a^{2n}-zz}}$ consulto celabam, ut limitatio horum trium casuum tanto mirabilior appareret; loco quod per alteram expressionem artificium ipse detexissem. Quis enim facile crederet, si n sit numerus fractus, quantitatem $\frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$ summabilem, vel saltem circulabilem; si vero n sit numerus integer, neutrum omnino posse esse, cum prima fronte contrarium potius videatur; in illo namque casu, ubi n est fractio, fit involutio plurium laterum radicalium diversi nominis; in hoc vero ubi n est numerus integer, unicum semper adest latus quadraticum. Non est ergo quod metuas, ne haec expressio $y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$ Fratrem meum non lateat; gaudebo magis in eadem inciderit; videbit enim eadem opera me legitimam reperisse solutionem, et simul longius quam ipse progressum esse, determinando casus algebraicarum et transcendentium. — Praeterea praestat adhibere hanc expressionem, quia ex hujus constitutione statim ipsa prodit curva quaesita; constitutio vero alterius expressionis $y = \int \frac{z^{\frac{1}{n}}\,dz}{n\sqrt{a^{2n}-zz}}$ non statim ipsam quaesitam curvam exhibet, sed aliam quamdam, cujus ope demum quaesita describitur.

Si missa constructione, explicanda dumtaxat esset curvae natura per insignem aliquam proprietatem, et si hoc sufficeret pro solutione, dicerem simpliciter curvam quaesitam BFN (fig. 112) eam esse, in qua (posito numero potestatis n, ad quam applicatae elevantur) circuli osculatoris radius FS est ubique ad perpendicularem curvae FR interceptam inter basin BN et curvam BFN, in ratione 1 ad n. Quid quaeso simplicius, quid elegantius hac proprietate? Miror quod nihil responderis ad mirabilem illam convenientiam, de qua in praecedentibus meis, ubi nimirum deprehendi, si (BP, y; PF, x; BF, t) $\int x^n\,dy$ sit maximum, fore simul etiam in eadem curva $\int \frac{dt}{x^n}$ seu $\int x^{-n}\,dt$ minimum; et vice versa, si illud sit minimum (quando nempe n est numerus nega-

tivus) tunc hoc fore maximum. Incidi in hanc convenientiam, conferendo curvas lintei, quibus illud competit, cum Catenariis, quibus hoc competit. Sed vellem ut aliquis necessitatem hujus convenientiae ex ipsa contemplatione curvarum erueret, id est, ut ostenderet ex suppositione $\int x^n dy$ maximi, inferendum esse, ergo $\int x^{-n} dt$ est minimum.

Mones ne obliviscar solvere Problematis alteram partem, ubi curvae novae applicata est in ratione multiplicata, non ad prioris applicatam, sed arcum. Etiamsi hanc partem non solvissem, non tamen crederem me solvere teneri; sufficeret enim ut alterutri partium satisfecissem; ideo quia Frater loquitur disjunctive, non copulative, dum dicit rectae BF vel arcus BF; item rectam PF curvamve BF, atque ita non utriusque, sed alterutrius tantum solutionem exigere videtur. Urges, diserte illum requirere pag. 215 solutiones in plurali, non solutionem in singulari, quasi vero non possent peti et dari diversae solutiones unius ejusdemque Problematis. Videtur insuper mihi honorarium proposuisse pro solutione dumtaxat ultimi problematis, de Cycloïdibus; alias nescio, quod sibi velint haec verba: ne detrectare possit, annon idem est ac si dixisset: Adjungimus alterum Problema, et ne detrectare possit, dabo ipsi pro solutione ejus 50 Imperiales. Quantumvis interim ambigue et captiose sint posita ejus verba, ut in omnem eventum haberet litigandi ansam, eam tamen penitus praecidisse me puto, cum omnia tamen quae proposuit, millies generalius solvi; imo et ipsa illius problematis pars, ut probe animadvertisti, in mea generalissima solutione continetur, imitando namque formulam meam generalem; positis arcu BF, t; GH (utcunque composita ex t) T; $\int \frac{T dx}{x} = \vartheta$, reperitur pro aequatione curvae quaesitae $y = \int \frac{\vartheta dx}{\sqrt{aa - \vartheta\vartheta}}$, quae reduci potest ad hanc simplicissimam $ay = \int \vartheta dt$. Quoniam vero ϑ involvit indeterminatas T et x, fit ut aequatio $ay = \int \vartheta dt$ non possit construi per differentias primas;

oportet ergo ut recurramus ad differentias secundas, ad separandas indeterminatas; quod sic facio: quia $ay = \int \vartheta dt$ et $a dy = \vartheta dt = dt \int \frac{T dx}{x}$, erit $\frac{a dy}{dt} = \int \frac{T dt}{x}$, supponendo dt constantem, et differentiando utrumque, habetur $\frac{a ddy}{dt} = \frac{T dx}{x}$ seu $\frac{a x ddy}{dx} = T dt$; substituto valore ipsius ddy qui est $\frac{-dx ddx}{dt}$, erit $\frac{-a x ddx}{dt} = T dt$ vel $-a x ddx = T dt^2$. Et sic T, proinde etiam t, hujusque differentialis dt, seu $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, dabitur per x et dx. Sit ergo dt^2 seu $dx^2 + dy^2 = X dx^2$, erit $dy^2 = X dx^2 - dx^2$, id est $dy = dx\sqrt{X-1}$ et $y = \int dx\sqrt{X-1}$. Hoc modo licet construere curvam, nec meliorem dabit constructionem frater; sed sufficit dedisse aequationem $y = \int \vartheta dt$, quae naturam curvae determinat.

Caeterum notabilis hujus curvae proprietas est, quod $FS.FR :: \vartheta.T$, quomodocunque demum T concipiatur composita, sive ex arcu BF, sive ex applicata PF, sive ex utroque simul; sic itaque Circulum osculatorem hujus curvae generalissime determinavi.

Non est quod judicium meum petas de Animadversionibus Tuis ad Cartesium; cum enim maxima pars versetur circa motum, judicium quod ferrem ignorare non poteris; habes enim assensum meum in omnibus quae circa motum Cartesio opponis. Correxi in aliquibus locis errores calami, qui sensum turbabant, quod non aegre feres; notavi etiam in margine, ne Lector offendatur, quod recenseudo Regulam 7am Cartesii sensum omnino contrarium ipsi attribueris, quod tamen nihilominus falsitas hujus Regulae ex Tuo ratiocinio, mutatis mutandis, demonstrari possit. Placet Tuum criterium pro examinandis Regulis motuum, quod Legem continuitatis vocas; est enim per se evidens et velut a natura nobis inditum, quod evanescente inaequalitate hypothesium, evanescere quoque debeat inaequalitas eventuum. Hinc multoties non satis mirari potui, qui fieri potuerit, ut tam incongruas, tam absonas et tam manifeste inter se pugnantes Regulas, excepta sola

prima, potuerit condere Cartesius, Vir alias summi judicii. Mihi videtur vel ab infante falsitatem illarum palpari posse, eo quod ubique saltus ille naturae adeo inimicus manifeste nimis elucet. Modus Tuus explicandi duritiem corporum per motum conspirantem particularum peringeniosus est; effecit ut recordarer speculationum mearum, quas ante aliquot annos, ambulando in horto Regio Versaliis, habueram circa ljactus et lusus aquarum, quorum aliqui adeo perfecte repraesentabant vasa diversarum figurarum, ut illa ex continuo vitro solido et pellucidissimo conflata dixisses, quae vero admota manu in mille guttas dispergebantur, qua remota dictum factum pristinam figuram induebant. Sentiebam tamen difficultatem aliquam et quasi resistentiam in disturbanda figura vasis. Hinc cogitare coepi, si qua arte aquae salienti velocitas reddi posset infinita vel saltem incomparabiliter magna quae omni impulsui resisteret, quod ista vasa tandem obrigescerent, et sic exhiberent solidum perfectum, quod quovis instanti mutaret materiam, servata semper eadem figura. Quod durities a motu conspirante particularum proveniat, etiam inde patet, quod materia fluidissima alias, qualis est aër, quando in vehementem motum agitatur, difficulter corpori duro penetrare volenti locum cedat, ceu videmus in ventis violentis. Et imprimis notabile est, quod observo explosione sclopeti mei pneumatici, quod ope aëris condensati globulum plumbeum trajicit per asserem satis crassum in distantia 50 passuum; observo, inquam, ibi aërem eo usque condensari, et deinde tanto cum impetu et velocitate erumpere, ut sub forma visibili corporis oblongi solidi et opaci appareat, et dicto citius iterum evanescat; ita ut firmiter credam, si possibile esset, ut eo momento quo aër iste condensatus erumpit, globulus aliquis aliunde veniens et ad aërem erumpentem appellens in directione perpendiculari ad directionem aëris, hunc globulum non solum non per transversum aëris penetraturum, sed ac si in durum Corpus allisisset, iterum resulturum fore. Caeterum videris impugnare atomos, quibus tamen Tua opinio circa duritiem favet; quid enim obstat, quominus credamus, materiam etiam fluidissimam constare corpusculis minimis, quorum singulorum partes sunt in perpetuo motu conspirante positae? Illa ergo corpuscula sunt atomi, mente quidem divisibiles, sed actu indivisae. Vale etc.

Groningae 26. Junii 1697.

LIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Statim monere volui, quod pro prudentia Tua ipse e re esse judicabis, non decere ut arbitrium recipiam, donec Dominus Frater Tuus consensum testetur, aut sibi hoc gratum fore significet, ne me scilicet ingerere videar. Itaque rogo, ne quicquam a Domino Bellavallio dici cures, quod significet me arbitrium recepisse, sed tantum me a Te nominari, et a Te sperari Dominum Fratrem Tuum in me esse consensurum. Nusptam credo dixi, ignotam Tibi fuisse Synchronarum applicationem ad ceteras curvas, cum Tua ad Cycloïdes applicatio ostenderit, hoc non posse non Tibi esse facillimum.

Mirari non debes, si profundiora Tua non nisi perfunctorie attingere nunc possum, cui tot alia sunt meditanda, legenda, scribenda, agenda in Aula, in officio, cum amicis, cum exteris, coram et per litteras (quarum ultra 300 quotannis scribo), imo et per dissertationes, veluti de Juribus Principum, de Historia Brunswicensi, de aliis Historico-Politicis, de controversiis Religionis, in quibus saepe etiam scriptis exerceor. His adde inspectionem Bibliothecae Guelfebytanae Augustae et nostrae Electoralis; volutationem qualemcunque novorum Librorum et Relationum alicujus momenti, ne sim hospes in re Publica et Literaria; curam publicandi scriptores Historicos ineditos ex veteribus membranis (quales nunc sub prelo sunt) ubi opus recensione diligenti; prosecutionem Codicis Juris Gentium Diplomatici, cujus volumen jam edidi; tum multa quae quotidie veniunt in mentem non in Mathesi tantum, sed et Physica et Philosophia profundiore, et Historia et Jure, aliisque quae paucis verbis in schedis consignare soleo, ne pereant. Adde etiam cogitata de Elementis Juris Naturae constituendis longe aliter, quam vulgo opinantur, de quo subinde meditor; jam enim promisi publice ante multos annos; sed ita ago, ut rem conferam cum Legibus Romanis et usu Fori: sed imprimis molior novam Analysin, multo recepta sublimiorem pro omni ratiocinatione humana; Chimica etiam, Technica, Mechanica, in quae subinde operarios alo. Ita judicare potes, an liceat mihi saepe in profundioribus Geometricis versari. Ac proinde non debes vel indignari, vel verbis crudioribus impatientiam animi ostendere,

quoties non statim omnia videor dicere ad mentem Tuam. Neque ideo statim vel inconsiderantia, vel negligentia est objicienda. Me quidem hic stylus minus movet, qui scio nihil inde benevolentiae Tuae decessisse; alii tamen delicatiores vel mirarentur, vel aegrius acciperent, praesertim cum decentius absint: et dici res ipsae inter amicos possunt et vere simul et commode, atque ut Galli dicunt „obligeamment".

Interea dum fateor non posse me semper satis attentionis adhibere, non ideo tamen profiteor me, si adhiberem, statim rem assecuturum. Non dubito quin aliquid egregii artificii Tibi inciderit, neque id a me memini contemni, etsi mentem Tuam non satis perceperim. Quod me attinet, quantum nunc tumultuaria consideratione inter scribendum assequi licet, puto Synchronas semper posse haberi per quadraturam. Nam cum, dato tempore, determinari queat punctum in curva data, ad quod mobile pervenit, utique si pro eodem tempore id fiat in qualibet curva ordinatim positione datarum, hoc modo habebitur quodvis punctum Synchronae. Quia autem praeterea id quaeritur, ut Synchrona exhibeatur ea, quae datam rectam tangat, id quidem ob lineas ejusdem speciei seu similes atque etiam similiter positas ad punctum fixum, sic fiet: Assumatur aliqua ex Synchronis, et ad eam ducatur tangens datae rectae parallela, quod utique fieri potest, saltem transcendenter. Inde ex puncto fixo, ad quod similiter sitae sunt lineae, ducta recta ad punctum contactus producatur, dum ipsi rectae datae occurat, et habebitur punctum, in quo Synchrona quaesita rectam datam tanget, quod est punctum appulsus. Unde dato uno puncto, describi jam potest Synchrona, quanquam hac jam non sit opus hoc loco. Eo ipso enim quod habetur punctum appulsus, adeoque punctum lineae celerrimi appulsus quaesitae, habebitur linea ipsa, quippe speciei, jam data. Eadem methodus videtur etiam inservire, si celerrimus appulsus quaeratur non ad rectam, sed ad curvam positione datam. Caeterum non semper curvas constructione datas commode ad tangentium inversas reduci, vel non semper facile haberi valorem $dy:dx$ per ordinarias, satis superque ipse expertus sum, et alios methodi differentialis defectus plus satis, vetere jam usu, compertos habeo. Hoc loco tamen eos puto evitari; et nihil est quod impediat haberi tangentem Synchronae, seu valorem $dy:dx$ per x et a, licet transcendenter, saepe ex suppositis tamen quadraturis. Cumque aliunde

habeatur iterum dy : dx ex eo, quod tangens Synchronae quaeritur parallela rectae datae, habebitur valor ipsius dy : dx bis, quod determinat ipsam x, adeoque punctum Synchronae, et semper hoc casu inveniri potest hoc punctum intersectione duarum linearum, ex quibus ad minimum una est transcendens, si non ambae, quoties nempe valor ipsius dy : dx est transcendens. Agnosco interim nos ad Synchronam ducendam non esse obligatos, et ex ipsis per se lineis adhuc brevius eam lineam posse eligi, quae est brevissimi appulsus. Nempe, assumta linea ex specie datis communis initii quacunque, semper determinari potest, quam in quovis ejus puncto recta, ad quam ibi celerrime appellitur, inclinationem habeat, seu angulum faciat cum horizonte, si placet, vel ad rectam datam si mavis. Eligatur ergo illud punctum curvae assumtae, in quo recta, ad quam ibi celerrime appellitur, sit parallela rectae datae. Quo facto, recta per hoc punctum, et per punctum communis initii trajecta occurret rectae datae in ipso puncto celerrimi ad ipsum appulsus, adeoque habebitur et punctum lineae celerrimi appulsus quaesitae. Unde ipsa linea quaesita determinatur. Sed in Tuis Methodis altius aliquid latere puto.

Pro Isoperimetris perelegantem et ingeniosam esse fateor Methodum Tuam per centrum gravitatis. Interim indirecta est censenda, qualis est qua Dominus Marchio Hospitalius Brachystochronam solvit, et nos Catenariam. Sed illa quam propono est magis Analytica, et hac revera Brachystochronam determinavi, quaerendo non, ut alias solemus, directionem, sed curvedinem, id est, datis duobus rectae indefinitae parvae in angulum fractae extremis, quaerendo punctum anguli, sic ut optime praestetur desideratum. Qua ratione non puto metui debere quod metuis, ut prodeant inter se pugnantes solutiones. Nec Ellipticula adhibenda, nisi cum data ponitur longitudo fili seu curvae inter extrema interceptae, ubi, etsi non cogites de Ellipsi, ipsa Optimi consideratio determinabit punctum. Nec dubito hoc modo et Catenariam et similes, cum curva est magnitudinis datae et formae quaesitae, directe et satis facile pro re nata posse determinari. Hoc autem posito, nec (fig. 110) filum BCD longius aut brevius assumi potest. Si non possit, filum utique vel Ellipsis frustra ibi adhibetur, nec quicquam determinare potest. Sed et alteri objectioni Tuae facile satisfit. Neque enim in Catenaria, verbi gratia, pondus filo BCD incumbens in punctum C collectum initio supponi debet, sed per

totum filum dispergendum est aequaliter, vel quod eodem redit, concipiendum est pondus ipsius BC suspendi ex ipsius BC medio, et ipsius CD similiter ex ipsius CD medio. Quo facto, quaerendo situm talem, ut, data magnitudine ipsius BC+CD, centrum gravitatis commune maxime descendat, reperietur id verticaliter imminere ipsi C, et alia habebuntur, quae curvedinem determinabunt. Itaque non miror, quod Methodum secius acceptam habuisti suspectam. Nolim tamen Tibi reddere, quod mihi dicis, prius pronuntiasse quam satis examinasse. Etsi enim id saepe, credo, in nobis ambobus sit verissimum (cum error non adeo est periculosus, imo fortasse aliquando utilior veritate, si semper haec in istis primo statim aggressu nimia attentione esset redimenda) tamen magis ex decoro esse puto his formulis abstineri.

Quae Dominus Frater Tuus jam viderit, non satis dixerim; miror ipse, quod problema accuratius proposuerit quam opus erat. Interim, cum curvaturae radii cum Brachystochrona connexionem viderit, verisimile est, modo Hugenii Tractatum De lumine cum attentione tunc consuluerit, non latuisse ipsum undas, adeoque et nec Synchronas. De pulchra illa convenientia, quod ubi $\int x^n dy$ maximum, ibi $\int x^{-n} ds$ minimum, et contra, non possum aliquid dicere, nisi in ipsas illas curvas attentius inspiciam, quod vides mihi nunc vix licere.

Ego potius proponam Tibi examinandam Methodum, quae tunc statim in mentem venit, cum, admonitione Tuae solutionis, relegi convenientiam undarum et Synchronarum ad radios, olim fugiente tantum oculo atque animo consideratam. Nempe videbar mihi hinc ducere posse Methodum generalem ad curvas ordinatim positione datas ducendi curvam ubique normaliter occurrentem, fingendo scilicet medium esse resistentiae sic variantis, ut radii exhibeant illas ipsas lineas ordinatim positione datas. Quo facto undae seu Synchronae erunt curvae quaesitae radiis normales. Quid vero si ordinatim positione datae non habeant initium commune, quomodo tunc radios applicabimus? Respondeo, ne sic quidem deficere Methodum, possunt enim radii ab uno puncto originarie venientes colligi prius in Acamptam seu focum linearum sive causticam. Et ita radii rursus emissi ex hoc foco lineari debebunt in medio pergere, per quod curvaturas linearum ordinatim

datarum assumant. Fateor haec facilius proponi, quam praestari: puto tamen consideratu digna Tibi visum iri.

Non est cur disputemus, utrum ex verbis Domini Fratris Tui utrumque problema solvere tenearis, quandoquidem utrumque solvere potes, quemadmodum jam tum notavi; alioqui res litigiosa foret.

Gratum est, quod meas in Cartesium Animadversiones percurristi; gratius quod placuere. Non tamen putem maximam partem circa motum versari (etsi fortasse potissimam) sed alia quoque attingi, quae itidem a Te expendi desidero, si scilicet vacat. Lex Continuitatis, cum usque adeo sit rationi et naturae consentanea et usum habeat tam late patentem, mirum tamen est, eam a nemine (quantum recorder) antea adhibitam fuisse. Mentionem ejus aliquam feceram olim in Novellis Reipublicae Literariae *), occasione collatiunculae cum R. P. Malebranchio, qui ideo meis considerationibus persuasus, suam de Legibus motus in Inquisitione veritatis expositam Doctrinam postea mutavit; quod brevi Libello edito testatus est, in quo ingenue occasionem mutationis exponit. Sed tamen paulo promptior, quam par erat, fuit in novis Legibus constituendis in eodem Libello, antequam mecum communicasset; nec tantum in veritatem, sed etiam in illam ipsam Legem continuitatis, etsi minus aperte, denuo tamen impegit; quod nolui Viro optimo objicere, ne viderer ejus existimationi detrahere velle.

Nec minus gratum est quod mea explicatio duritiei per motum conspirantem ad mentem tuam fuit. Cum anno 1670 vel 1671 ederem Hypotheseos Physicae Novae Specimen, jam propugnabam duritiem non a quiete, sed a motu esse. Et Dominus Wallisius in Transactionibus Anglicis meam illam hypothesin tunc recensens notavit, Guil. Neilium quoque (cum cui primam dimensionem curvae Algebraïcae tribuunt) judicasse, firmitatem a motu, non, ut vult Cartesius, a quiete petendam. Motus autem conspirans non tantum resistit turbanti, sed et se restituit et quae dura sunt, ea revera sunt Elastica admodum prompta. Interim quantacunque vis motus conspirantis ponatur, nunquam tamen revera erit infinita, neque adeo ullae atomi dabuntur in natura, et motus utique semper vinci ac debilitari potest, imo debet, ob corporum perpetuum collisum inter se. Itaque nullum ego puto vel perfecte durum vel perfecte

---

*) Juillet 1687 p. 744.

fluidum exstare, sed in omni corpore esse quendam gradum firmitatis et fluiditatis. Et multae sunt aliae rationes, quae atomos et vacuum quoque in natura non patiuntur. Vale etc.

Dabam Hanoverae 2. Julii 1697.

P. S. Beneficium in me conferes, si locum, in quo me putas mentem Cartesii sinistre (salva licet objectionis meae vi) accepisse, in melius mutes, schedula inserta.

LX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postremas Tuas accepi recte; schedulam inclusam ad Dominum Bellavallium postridie rite curavi. An Epistolam meam iamdiu ipsi missam impresserit, nescio. Interim frustra metuis ne quid a me dictum sit, per quod appareat, quasi arbitrium Tuum ingerere volueris; nam contrarium dixi, me scilicet Te rogasse, ut velis agere nostrum judicem; in hunc finem me Tibi jam misisse meas solutiones, quas suo tempore publicare possis et sententiam ferre; aequum itaque esse ut pariter Frater praemium apud Judicem deponat. Miror quod dicis me fuisse indignatum vel verbis durioribus impatientiam animi ostendisse, quando non minus placide quam candide mentem meam exprimere volui. Eo sum animo, ut scribam quod sentio, et hunc Germanorum candorem Tibi magis placere putabam quam Gallorum civilitatem (ut plurimum meris complimentis fucatam) quam mihi obliganter commendare videris. Agnosco lubens, in meis ad Te literis de stylo parum esse sollicitum, quippe contentus cogitata mea utcunque aperuisse; eo fateor adniti deberem ut uterer verbis officiosioribus, quae dignitati Tuae convenirent: at tantam a Te spero aequitatem animi, ut non putem Te ideo offendi, si saepissime concinnitatis regulas non satis observavero; nosti me intus et in cute, quid ergo opus ut perpetuo privatim repetam quod semel iterumque a me audiisti? ut in singulis meis literis quas praeter Te nemo legit, testificer, quantum Te suspiciam et colam. Hoc publice potius faciendum puto, quod ni fallor jam saepe saepius feci, et nuperrime adhuc in epistola ad Dn. Bellavallium, ubi vide-

bis quam expressionem adhibuerim ad testandum quanta apud me sit Tui existimatio. Caeterum si acrius quam par est, scripsisse visus sum, possem allegare hoc factum esse studio augendi utriusque nostrum attentionem; item admonitiunculam illam non esse profectam ab indignatione, sed ab amico animo, id quod mihi non semel tantum respondisti, cum conquererer de terminis satis acerbis, quibus in nonnullis Tuis literis exprobrabas mihi festinationem in judicando, iisdem fere formulis utens, a quibus me jam abstinere jubes; noli tamen putare, me Tibi reddere voluisse talionem; scio inter nos disparitatem; non statim mihi aequum censeo quod Tibi non iniquum est.

Miror ingentem numerum negotiorum diversissimorum, quibus quotidie occuparis, sed magis miror humeros Tuos qui illa ferre valeant; habes sane singulare donum singulis eodem die vacandi et attentionem praebendi, quo nihil difficilius mihi videtur; id saltem in me experior; adeo enim non sui juris est mea attentio, ut non sine summa animi molestia illam avocare possim a re, cui semel affixa, et alii adhibere. Hinc, si lectiones, quarum quotidie tres, nonnunquam plures, tam publice quam privatim, in Mathematicis et Philosophicis mihi habendae sunt, non ita in promtu haberem, sed si illas in charta consignare deberem, quod plerique Professorum facere solent, nescio an huic oneri par essem. Sunt tamen et alia mihi peragenda, quae pariter non multum otiandi tempus mihi relinquunt; unde vides nec me semper rem meditari satis posse, prout vellem, atque adeo eamdem mereri veniam quam petis. Quod si igitur non statim alteri vacaverit attente considerare quae ab altero proponuntur, credo nos optime facturos, quando nihil urget, si uterque opportunitati nostrae consulentes otium sponte se prodens exspectaverimus, ut negotiis ordinariis non interruptis, eo attentius et accuratius rem examinare queamus.

Interim, cum putem me mature satis perscrutatum fuisse Synchronarum naturam, et diu multumque in hac materia fuisse, jam sine scrupulo pronuntiare audeo, quae mihi verissima videntur. Facile credam, quod tumultuaria consideratio inter scribendum Tibi suggessit, Synchronas semper posse per quadraturas haberi: primum enim hoc est quod sese offert in contemplatione harum curvaram, quod scilicet dato tempore determinari queat

punctum in curva data, ad quod mobile pervenit, et quod hoc fieri possit pro eodem tempore in qualibet curva ordinatim positione data, et sic tota Synchrona construi. Sed hujusmodi constructio eo ipso non est aestimanda, quia non per continuam Quadraturam unius ejusdemque indeterminati spatii peragitur, et quia per consequens exinde non haberi potest modus ducendi tangentes ad Synchronam, qui tamen hic summe necessarius est. Rogo itaque ut paulo penitius inspicias negotium; forsan revocabis Tua verba, quando dicis: A s s u m a t u r a l i q u a e x S y n c h r o n i s, e t a d e a m d u c a t u r t a n g e n s d a t a e r e c t a e p a r a l l e l a, q u o d u t i q u e f i e r i p o t e s t, s a l t e m t r a n s c e n d e n t e r; nam nondum video quomodo vel transcendenter vel algebraïce duci possit tangens ope constructionis illius per quadraturas diversorum spatiorum. Ego quidem in hoc puto latere maximum artificium, ut diversae istae quadraturae reducantur ad quadraturam indeterminatam unius spatii continui, quod ego feliciter praestiti: unde mihi facile fuit tangentes Synchronae determinare, non solum transcendenter, sed algebraïce prorsus. Ne sine ratione haec me dixisse putes, dabo exemplum simplicissimum, ubi statim Tibi apparebit, quam necessaria sit ista reductio, si modo animum vel tantillum advertere voles, quod rogo ut facias; est enim Tua applicatione dignum, quod forsan ad novas speculationes curvarum ansam praebebit. Concipe (fig. 113.) super axe dato AB descriptas Ellipses infinitas ACB, ACB, ACB etc. Quaeritur aequatio differentialis, et proinde modus ducendi tangentes Curvae CCC, cujus constructio talis est, ut ductis applicatis CD, CD, CD etc. segmenta Ellipsium CDB, CDB, CDB etc. omnia inter se sint aequalia. Hoc problema per reductionem segmentorum CDB, CDB, CDB etc. Ellipsium diversarum ad segmenta Ellipsis ejusdem facillime solvo. At si curva CCC, non segmenta, sed arcus Ellipsium BC, BC, BC etc. aequales abscinderet, licet priori quodammodo simplicius appareat, hic tamen methodi meae imbecillitatem agnosco. Jam enim arcus diversarum Ellipsium ad arcus ejusdem reduci nequeunt; neque hactenus perspicere potui ullam viam perveniendi ad tangentes: si aliquam mihi monstrabis, quamvis transcendenter, habebo Tibi gratias haud mediocres. Vides ergo in quo methodus mea consistat, scilicet in reductione illa quadraturarum vel rectificationum; haec autem reductio perpetuo locum habet, quando curvae sunt similes et similiter posi-

tae, adeo ut Synchronarum aequatio differentialis proindeque tangentium determinatio algebraica hac methodo nunquam non reperiri possit. Quoniam vero etiam problema celerrimi appulsus solvi citra Synchronae considerationem singulari et eleganti quadam constructione, communicabo libens si desideraveris. Caeterum, si loco lineae rectae positione datae adhibeatur curva, res non aeque facilis est, ut credis: tunc enim recta parallela tangenti hujus curvae in puncto appulsus duci non potest; ipsius enim inclinatio jam non datur, ut antea.

Fateor methodum meam pro Isoperimetris esse indirectam, sed non puto aliam habere Fratrem; cum enim olim tam multus fuerit in curvatura sua lintei a liquore expansi, inibique adeo demersus, ut fere suffocatus fuerit, suspicor hoc idem ipsi ansam dedisse ad considerationem problematis de Isoperimetris. Interim Tuam methodum (quae utique magis analytica esset) bene procedere nondum asserere ausim; dicis Te illius ope determinasse revera Brachystochronam; memini quidem Tuae solutionis, quam mihi communicaveras, erat autem similis fraternae. Optarem itaque ut mihi ostenderes, quomodo per Calculum determinares Circulum osculatorem ex inventione situs trium punctorum. Fac si placet applicationem in Isoperimetris nostris, ut videam an pervenias ad simplicissimam illam determinationem radii osculantis, quem ostendi semper secari a basi curvae in ratione data 1 ad n. Praeterea si haec methodus rite valeret, deberes etiam posse solvere Brachystochronam inter duo puncta determinatae longitudinis; id est, si (fig. 114.) data duo puncta A, B conjungenda sint linea curva AMB, ipsi datae rectae C aequali, determinare poteris curvaturam AMB, quae ex omnibus curvis ejusdem longitudinis citissime percurratur. Problema utique possibile est; sed ingenue fateor, meae methodi hic nihil praestant. Si Tua eousque penetrat, agnoscam praestantiam ejus; gratissimum facies si calculum communicaveris.

Iterum dicis, Fratrem meum vidisse connexionem inter Brachystochronam et curvaturam radii, sed puto ego non vidisse; nullibi enim mentionem facit hujus connexionis, sed dicit dumtaxat, insistendo iisdem vestigiis etiam inveniri posse curvaturam radii, et sic identitatem illam non animadvertit; alias ridiculum esset dicere, insistendo iisdem vestigiis reperiri posse curvam radii, quae jam simul reperta est cum Brachystochrona.

Methodus, quam mihi exanimandam proponis, quamque desumsisti ex convenientia undarum et Synchronarum, revera peringeniosa est; de illa etiam jam ante annum, cum primum huic speculationi vacarem, cogitabam. Usus vero acamptarum seu causticarum, quas acute huic negotio accommodas, mihi tunc non venit in mentem. Interim haec methodus ducendi normalem ad curvas ordinatim positione datas, maxima laborat difficultate, quia si in uno exemplo succedit, infinita alia sunt, ubi inutilis est, licet curvae ordinatim positione datae commune initium habeant; quod vel exinde intelliges, quod plerumque impossibile sit fingere medium qualiscunque resistentiae variantis, quod exhibeat omnes illas lineas ordinatim positione datas; quin-imo est purum putum accidens, si id contingat. Verum quidem est omne medium exhibere infinitos radios seu curvas ordinatim positione datas; sed vicissim unica linea jam sufficit ad determinandam resistentiam medii quaesiti, et omnes reliquae positione datae sint superfluae; et sic saepissime eveniet, ut quaelibet ex curvis ordinatim positione datis peculiare medium requirat, atque adeo methodus evadat impossibilis; unde vides problema hoc: Quaerere medium resistentiae variantis, quod exhibeat curvas ordinatim positione datas, esse ex eorum numero, quae dicuntur plus quam determinata, id est, quae habent conditiones superfluas, quae nunquam (nisi per accidens) simul impleri possunt. E re tamen est notare casum, quando haec methodus usui esse potest; tunc nempe, ut plurimum (non ausim dicere, semper) quando curvae ordinatim positione datae sunt similes et ex puncto dato similiter positae. Interim hoc casu non opus habeo recurrere ad Methodum hanc indirectam; est enim mihi alia naturalior, ex fundamento supra memoratae reductionis quadraturarum et rectificationum desumta, mediante qua directe determino curvam ordinatim datis normaliter occurrentem, quando scilicet ordinatim positione datae sint transcendentes; quod olim Tibi, si meminisse velis, tanquam difficile quid proponebam; nam si algebraicae sunt, res adeo facilis est, ut proponi non mereatur.

Concedo non dari corpuscula perfecte dura, sed non sequitur non dari atomos: per atomum intelligo corpusculum mente quidem divisibile, sed quod actu divisum non est neque divisum fuit; non quod actu dividi non potest; tales enim atomi, ut vere sentis, non darentur, quia requirerent perfectam duritiem; sed

per meam definitionem sufficit, ut dentur talia corpuscula, quorum particulae a Mundo condito in hunc usque diem nunquam fuerunt separatae, quod forsan motum conspirantem habeant satis validum ad resistendum. Non tueor vacuum neque atomos a Gassendo propugnatas; interim meas meo modo conceptas mihi largiri debes, nihil derogant Tuae hypothesi. Sed de his alias.

Libellus Malebranchii, in quo novae Leges motus constituentur, conscriptus fuit cum Parisiis essem, me praesente et approbante; nihil enim in eo posuit Author, nisi prius consultis nobis, Hospitalio et me; quod autem etiamnum in pluribus a veritate alienus sit, hoc ne mirere; veram enim quantitatem virium tunc nondum admittebamus. Quod autem Tecum non communicaverit, antequam ederet, ratio est quod Te hac in parte falso principio nixum credidit. Audivi Tractatum aliquem Hugenii posthumum propediem lucem visurum, De Mundo Saturni; nescio an id ipsum sit quod a Bellavallio quaeris, De Cosmotheoro. Vale et ama etc.

Groningae 17. Julii 1697.

LXI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

De benevolentia Tua mihi semper visus sum certissimus; verba fucata nec dare soleo, nec expectare. Dura et molestum aliquid spirantia libenter vito, et me puto vitasse; certe ut vitarem, operam dedi. Itaque vide ne inique facias, si me humanitatem laudantem, fucos commendare dicas.

Vellem me multis posse sufficere, quemadmodum pro benignitate Tua pronuntias. Ego vero cogor agnoscere, saepe id parum procedere, quoties scilicet occurrunt, quibus profundius immergendus sit animus, qualia sunt Analytica illa Tua, in quibus plus satis experior Tecum, non posse me distractum Tibi satisfacere, prout vellem: sed bene habet, quod non indiges ope mea.

Video non tam facile esse, quam mihi primo aspectu visum erat, Synchronae quadratorie determinatae tangentem ducere; quod si quadratura effici posset vel algebraice, vel transcendenter

quidem, sed tamen exponentialiter, eo casu cessaret difficultas. Exponentialiter autem exhibere licet non tantum, quae ex Hyperbolae quadratura pendent, sed et quodammodo, quae pendent ex quadratura Circuli. Interim nondum hoc praestare licuit in altioribus. Et jam aliquoties dicere memini perfectissimam Transcendentium expressionem esse per Exponentiales. Recordor, et mihi olim occurrisse istos transitus a quadraturis ad quadraturas, et difficultatem apparuisse, sed nullam tunc apparuisse superandi rationem, nisi vel per Series, vel per Exponentiales. Illa imperfecta est, nisi cum a serie rursus deinde regressus ad aequationem differentialem quadratoriam haberi potest; haec est limitata hactenus. Itaque Tuum artificium reducendi rem ad unam quadraturam continuam non parvi momenti erit, et licet etiam limitatum sit, desideretque ut curvae ordinatim positione datae sint similes et similiter positae, fortasse tamen aliquando vel a Te ipso vel ab alio inventum ulterius promovebitur. De his ergo plurimum Tibi debebimus; grata etiam et utilis constructio Tua erit sine Synchronae consideratione. Et cum tale sit quod Tibi in mentem venit, video utique habuisse Te causam, cur genio admonenti tribueres, quod ingenio erueras. Solet scilicet nobis momento quodam lux subita interdum affulgere.

Sed quod ais, problema esse plus quam determinatum, quoties quaeritur medium, in quo radii in datas Lineas transeant, id velim denuo examines; fortasse enim rem semper possibilem deprehendes. Nam in omni superficie, adeoque et plano assumi possunt non tantum infinita, ut in linea, sed infinities infinita. Si igitur varies medium uno tantum modo, ita, verbi gratia, ut (fig. 115.) varietas solum assumatur secundum lineam ABCDE, et ut linea AA, tota BB, tota CC, etc. unam subeat legem variationis, seu ejusdem sit densitatis, tunc fateor, problema fore plus quam determinatum (nec refert BB, verbi gratia, recta sit an curva) sed si rursus alia variatio concurrat secundum lineam ALMN seu ut variatio sit duarum dimensionum, ita ut quodlibet plani punctum a quolibet densitate differat, seu ut punctum BL non tantum differat a puncto BM, sed et a puncto CL; tunc possibile utique est variationem diversitatis in quovis puncto eam esse, ut ibi linea radii transeat, prout desideramus.

Nuspiam memini me dicere, rem aeque esse facilem in appulsu ad rectam et ad curvam.

Cum Tibi methodus mea pro maximis et minimis sit perspectissima, quae in eo consistit, ut lex minimi vel maximi et in particula locum habeat, Tibi ipsi facillimum erit, et multo facilius quam mihi, applicationem ad Isoperimetra constituere. Et puto hanc Methodum etiam applicari posse ad Brachystochronam datae longitudinis, inter duo puncta interceptam, in qua experimentum Methodi fieri vellem. Ecce enim quaeritur (fig. 114.) AMB, in qua grave brevissimo tempore perveniat ab A ad B, sed ea lege ut sit AMB aequalis datae C. Posito igitur has leges etiam in particula quavis indefinite parva LMN esse veras, ut LMN sit recta, semel fracta, datae longitudinis brevissimique descensus; utique manifestum est Tibi ipsi, rem prius posse reduci ad hoc problema ordinarium: Datis (fig. 116.) focis L et N et fili longitudine LM + MN, vel LQ + QN, descriptaque Ellipsi PQR, invenire in ea punctum M ita se habens, ut descensus LMN sit talium citissimus; posito dari A initiale punctum descensus, adeoque quae sit velocitas gravis in L vel M. Hoc autem problemate soluto, exinde jam considerando LM, MN esse infinite parvas, habebitur proprietas aliqua saltem differentio-differentialis curvae quaesitae.

Aliud est Dominum Fratrem Tuum vidisse connexionem Brachystochronae et curvaturae radii, aliud vidisse aut attendisse identitatem. Possumus connexionem videre imperfecte, ut non statim videamus ejus gradum. Keplerus vidit connexionem vel convenientiam inter Diaclasticam et Hyperbolam, sed non vidit Hyperbolam esse ipsam Diaclasticam, quod Cartesius fortasse ex Kepleri meditationibus admonitus invenit.

Agnosces ipse, credo, Dn. Malebranchium melius facturum fuisse, si me, cujus admonitione correxerat regulas suas, de ipsa correctione consuluisset, antequam eas in publicum denuo praecipitavisset; quantillum enim erat aliquot septimanas expectare? Nec tam facile sibi de me persuadere debebat, falsis me principiis niti, cum res ostenderit ipsum potius talibus fuisse nixum.

Praeterea error ab eo commissus est in Regulis novis, non tantum contra principium meum, cui non assentiebatur, sed et contra illam ipsam meam continuitatis Legem, cui assentiebatur: quod ego admoniturus eram (si tempestive me consuluisset) dissimulaturus ea, de quorum principiis pugnabamus.

Ubi meas ad Cartesium Animadversiones remittere voles, quod rogo ne sine Tuis notis separatim scriptis facias, poteris dirigere ad Dominum Gerardum Mejerum, Theologum Bremensem.

Circa corpora indivulsa possunt constitui gradus. Et summus quidem gradus est, cum partes eundem semper servant situm inter se, seu cum corpus est perfecte rigidum, atque hoc est, quod omnes hactenus Atomi nomina accepere, et quod Democritici et Gassendistae et ex Cartesianis Cordemoius in rerum natura esse credidere; quibus etiam nuper accessit Hartsoekerus, eo tantum discrimine, quod Democritici ex solis Atomis omnia componunt, eisque vacuum interjiciunt, sed Hartsoekerus materiam perfecte fluidam inter Atomos perfecte duros diffudit, duo extrema inter se conjungens. Ego vero pro demonstrato habeo, nec perfecte dura nec perfecte fluida dari. Et gaudeo quod nunc video Te mecum perfecte dura ac vacuum etiam rejicere. Nam omne corpus etiam quantulumcunque, meo sensu, dividitur in partes actu, et quidem non tantum mente assignabiles, sed et diversitate motuum reapse discretas, ut in vorticibus ipsisque jactibus aquarum, ita ut pars quidem in tali corpore a parte recedat, non tamen statim a toto.

Ita jam venimus ad secundum indivulsi gradum, ut licet partes mutent situm inter se, nulla tamen pars unquam recedat a toto, seu ut semper servetur continuitas partium omnium. Huc, si bene Te intelligo, inclinare videris; et fateor me quoque saepe deliberasse, an talia dentur corpora, necdum impossibilitatem videre; nec tamen hactenus demonstrare posse quod dentur.

Tertius gradus indivulsorum est in corporibus, quae aliquas quidem partes mutant, sed tamen aliquas servant; ubi rursus quaeritur, an datur corpus a, in quo aliqua pars b semper fuerit semperque futura sit; aliqua, inquam, pars b non quidem ita ut totum b semper fuerit unum continuum (id enim recideret in gradum praecedentem) sed ita tamen, ut licet ipsum b divulsum fuisse ponatur, partes nihilominus omnes ipsius b semper manserint mansuraeque sint in a, adeoque nisi intra certos limites a se invicem recedant.

Quartus gradus est, an detur a et in eo pars b sic, ut non quidem totum b, nec etiam aliqua determinata ipsius b

pars c semper maneat in a (eo enim casu recideremus in gradum tertium) sed ut aliqua tantum pars ipsius b indefinita x maneat in a, licet forte semper imminuenda, vel ut distinctius loquamur, quaeri potest, an dentur in a duae partes b et p, sic ut semper ipsius b aliqua pars x, et ipsius p aliqua pars y nunquam nisi intra certos limites, quos per ipsum a definimus, a se invicem recedant. Quanquam rursus distingui possit, an limites per a definiti sint certae magnitudinis, si ponamus ipsum a eam magnitudinem nunquam excedere; an vero sint potius limites certi officii, ut si a (velut animal) etiam ipsum indefinite crescere vel minui intelligeretur. Et possent multo plura adhuc in considerationem venire non parvi momenti ad penetrandum in rerum interiora; sed haec Tu, pro acumine Tuo et pro aetate Tua, melius prosequere. Vale.

P. S. Cogitavi, annon artificium Tuum puncta Synchronae una quadratura continua inveniendi, aliquid cognatum habeat methodo sequenti. Assumta (fig. 117.) una AC ex curvis positione datis, et in ea assumto quocunque puncto ${}_1C$, ad quod tempore certo BT perveniendum est, quaeratur id tempus per quadraturam, atque ita quadratorie exhibeatur linea temporum AT, seu cujus ordinatae sint ut tempora ordinatim respondentia punctis C curvae assumtae AC. Jam pro alia curva A(C) simili cum assumta et similiter posita ad A, quaerendum est punctum ${}_1(C)$ in curva A(C) ad quod in ea perveniatur a gravi eodem tempore, quo ad ${}_1C$ in curva priore AC. Eam ob rem redeamus ad curvam AC; et ut se habet curvae novae A(C) parameter ad parametrum curvae AC, ita (nova hypothesi) eadem proportione in AC ponamus vim gravitatis fuisse fortiorem; sic omnia in curva AC hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea, quae in curvae A(C) priore gravitate. Porro linea temporum nova A(T) pro AC, aucta gravitatis vi percursa, habebitur nulla nova quadratura, sed ordinatis prioris lineae temporum in eadem ratione imminutis, in qua vis gravitatis fuit aucta. Itaque habebimus etiam punctum ${}_2C$ in ipsa AC, ad quod, aucta vi gravitatis, perveniretur eodem tempore, quo priore gravitate antea ad ${}_1C$. Cui puncto ${}_2C$ similiter positum punctum quaeramus in curva secunda A(C); id erit punctum ${}_1C$ quaesitum, quo grave in ea curva, vi priori seu ordinaria gravitatis, esset perventurum eo tempore, quo, eadem vi gravitatis ordinaria, perveniret grave ad ${}_1C$ in curva prima AC. Sed haec

nonnisi per transsennam nunc intueri possum. Itaque parum omnia assequenti veniam dabis.

Dabam Hanoverae 25. Jul. 1697.

LXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas nuperrimas acceperis. Interea Moscorum Monarcham ejusque Legationem in vicinia vidimus, et quidam ex comitatu in se recepit mihi procurare responsiones ad quaesita quaedam mea circa res Moscorum scripto consignata. Dum huc redeo, more meo in itinere meditatus, desideratam a Te Methodum generalem inveni, per quam Tangentes ducuntur ad curvam, cujus puncta per ordinatim diversarum curvarum figurarum quadraturas determinantur, ut jam necesse amplius non sit, vel curvas esse similes et similiter positas, vel quadraturas diversarum ordinatim curvarum reduci ad unam vel recurri ad Series, vel rem revocari ad Exponentiales, quorum nihil generalem methodum praebet. Exemplum exhibebo, quod primum in mentem venit, unde facile ad Ellipses tuas applicabis; et licet exemplum, quod affero, etiam particularibus illis Methodis obedire possit, videbis Methodum, quae adhibita est, nullis limitibus coërceri. Sint (fig. 118.) Lineae Logarithmicae quotcunque VC, $V(C)$, $V((C))$ etc. quarum axis communis AB, asymptota AS, commune in axe punctum V: ducenda est ${}_1C\vartheta$ tangens curvam ${}_1C\,{}_1(C)\,{}_1((C))$, quae curva talis sit naturae, ut arcus logarithmicarum V_1C et $V_1(C)$ itemque $V_1((C))$ sint aequales inter se. A_1B sit x, parametri harum curvarum sint a, (a), $((a))$ etc. ita ut ${}_1B_1C$, ${}_1B_1F$, ${}_1B_1G$ sint respective $a\int dx:x$, vel $(a)\int dx:x$, vel $((a))\int dx:x$ etc. manente x variataque tantum parametro a; porro patet si habetur ratio ipsius ${}_1C_1F$ ad ${}_1F_1(C)$, habitum iri tangentem curvae ${}_1C_1(C)_1((C))$. Ducta enim ${}_1B\vartheta$ quae sit parallela ipsi ${}_1F_1(C)$ seu tangenti curvae V_1C in ${}_1C$, et ad partes ${}_1(C)$ et quae sit ad ipsam ${}_1B_1C$ ut ${}_1F_1(C)$ ad ${}_1F_1C$, tunc juncta ${}_1C\vartheta$ erit tangens

quaesita. Porro ex dictis patet ${}_1F_1C$ esse $da\int dx:x$. Superest ergo, ut inveniatur apte etiam ${}_1F_1(C)$ atque in hoc consistit negotii cardo. Jam ${}_1F_1(C)$ est differentia inter duos arcus V_1C et V_1F et summa ex differentiis partium est differentia totorum. Ergo si ducantur parallelae innumerae, indefinite sibi vicinae, nempe ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$ etc. et his interceptarum respondentiumque sibi portionum ex curvis V_1C et V_1F, quaerantur differentiae, nempe ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ et ${}_2C_3C - {}_2F_3F$ etc. et harum differentiarum quaeratur summa, ea exhibebit ipsam differentiam totarum linearum V_1C et V_1F, nempe ipsam ${}_1F_1(C)$. Jam ut respondentium, veluti ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$, quaeramus differentiam, considerandum est ipsam ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$ communi expressione fore $\sqrt{dxdx+dydy}$, seu quia hic $dy=adx:x$ (posita tamen a variabili, non quidem in eadem curva, sed tamen pro transitu a curva ad curvam) ideo ${}_1C_2C$ vel ${}_1F_2F$ fore $dx\sqrt{aa+xx}:x$. Unde ad habendam differentiam inter ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$, patet tantum $\sqrt{aa+xx}$ differentiari debere secundum a, manente x more meo dudum exposito; et differentiam multiplicandam per $dx:x$, unde reperietur ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ fore $adadx:x\sqrt{aa+xx}$. Jam contra in summandis rursum omnibus talibus differentiis eleganter evenit semperque evenire debet, ut a vel da rursus sint constantes, ergo summa omnium ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ et ${}_2C_3C - {}_2F_3F$ etc. seu ${}_1F_1(C)$ erit $ada\int dx:x\sqrt{aa+xx}$, qualis quantitas semper habetur per quadraturas; ergo jam habetur tangens quaesita. Nam tantum oportet facere ${}_1B\vartheta$ ad ${}_1B_1C$ ut $a\int dx:x\sqrt{aa+xx}$ ad $\int dx:x$ seu ut ${}_1F_1(C)$ ad ${}_1F_1C$, ubi communis utrique rationis terminus inassignabilis da necessario et semper evanescit. De ipsis istis quadraturis amplius reducendis, quemadmodum sane hic fieri potest, nunc equidem non laboro. —

Si ${}_1B_1C$ vel ${}_1B_1F$ etiam habitae fuissent per quandam quadraturam, ubi a fuisset ingressa vinculum quadratorium, eodem modo fuisset procedendum pro differentia inter ${}_1B_1C$ et ${}_1B_1F$ seu pro ${}_1F_1C$, ut processimus in exhibenda differentia inter V_1C

et V_1F, nempe differentianda fuisset quantitas sub vinculo quadratorio contenta, sed secundum a; et proveniens rursus summandum, sed secundum x. Nec video quid hunc processum impedire unquam possit, usque adeo ut adhiberi etiam suo modo queat, cum quantitates ne quadratorie quidem, sed tantum differentialiter vel quacunque alia expressione ex summis differentiisque cujuscunque gradus complicata dantur. Etsi tunc etiam determinatio tangentis quaesitae non semper constructione quadratoria, sed tamen aliqua differentiali explicatione utcunque possit haberi. Hanc novam nostrarum methodorum applicationem, qua defectus aliquis Calculi differentialis tollitur, Tibi non displicituram puto, Tuoque ingenio praeclare illustrari atque augeri posse confido. Vale etc.

Dabam Hanoverae 3. Augusti 1697.

Beilage.

Invenire*) tangentem CT (fig. 119.) curvae CC ita descriptae, ut puncta ejus C designentur in quavis Ellipsi VCE ejusdem axis (seu fili) VE, sumendo inde a vertice V arcum VC aequalem rectae datae R. Hujus problematis sane difficilis et nostris Methodis hactenus non parentis similiumque aliorum solutionem a me petiit Dn. Johannes Bernoullius mense Julio 1697. Re aliquandiu considerata mihi tandem videor quaesitum assecutus. Quod sane magni est momenti et insignem aliquem in nostro calculo differentiali defectum supplet. Devenimus autem in hujusmodi quaestiones occasione eorum, quas Dn. Jacobus Bernoullius, Professor Basileensis, Dn. fratri suo Johanni, Professori Groningano, proposuit, quas iste quidem solvit, quia tantum agebatur de curvis ejusdem speciei seu similibus et similiter positis, ubi res alio artificio praestari potest; sed ubi curvae non sunt ejusdem speciei (quemadmodum sane tales non sunt Ellipses diversae ejusdem axis vel fili) vel alia ratione, una dimensio ad aliam revocari non potest, uti sane non licet, arcus unius Ellipsis mensurare ex data mensura arcuum alterius harum Ellipsium (uti cum alias possimus areas unius mensurare ex mensuratis alterius

---

*) Leibniz hat am Rande des Manuscripts bemerkt: Initio Augusti 1697. Inseratur literis cum Joh. Bernoullio commentatis eo tempore.

areis ob reductionem scilicet omnium ad quadraturam circuli) tunc hactenus non apparebat modus investigandi tangentes curvarum, in quibus unumquodque punctum per propriam quadraturam determinatur.

Ex. gr. sit AB, x, et BC, y, erit $VC = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Sit $dy = a\,dx : x$; si curva VC scilicet sit logarithmica, fiet utique $VC = \int \frac{dx}{x} \sqrt{aa + xx}$, cujus dimensio ex quadratura Hyperbolae haberi potest. Ubi quidem possent omnes reduci ad unam quadraturam, cum sint logarithmicae omnes similes inter se et praeterea quadraturae hyperbolarum ad se invicem reduci queant; sed hoc jam dissimulato, quaeramus quomodo inveniantur duo puncta C, (C) sibi indefinite vicina, seu quomodo ducatur tangens C(C), posito VC et V(C) debere esse aequales. Ibi tale quid in mentem venit. Ductis parallelis quotcunque indefinite sibi vicinis BFC (fig. 118.), nempe $_1B_1F_1C$, $_2B_2F_2C$, $_3B_3F_3C$, et ita porro, resolvatur curva VC in partes quotcunque indefinite parvas $_1C_2C$, $_2C_3C$ etc. et curva V(C) in partes totidem $_1F_2F$, $_2F_3F$ etc. patet autem differentiam inter totas lineas VC et V(C) esse summam differentiarum inter partes seu $_1C_2C - {_1F_2F}$, $_2C_3C - {_2F_3F}$ etc. esse aequal. $VC - V(C)$; servatis semper iisdem signis, si ponatur semper pars majoris major parte respondente minoris, quod secus est, si in summa quidem totum sit toto majus, non tamen semper pars parte, ubi signa pro illa parte mutantur, saltem enim semper in integra parte assignabili eodem modo procedunt signa. Porro $_1C_2C$ est $dx\sqrt{aa + xx} : x$ et $_1F_2F$ est $dx\sqrt{(a)(a) + xx} : x$, variante scilicet *a* parametro Logarithmicae, ita ut (a) sit $a - (da)$; itaque ut habeatur differentia inter $_1C_2C$ et $_1F_2F$, oportet differentiari $dx\sqrt{aa + xx} : x$, sed secundum *a* variabilem, non secundum x aut dx, quippe quae eaedem sunt in $_1C_2C$ et in $_1F_2F$, et reperietur perinde esse sive calculum nostrum differentialem applices secundum *a*, sive a quantitate $dx\sqrt{aa + xx} : x$ subtrahas quantitatem $dx\sqrt{aa - 2ada + dada + xx} : x$. Ut autem $dx\sqrt{aa + xx} : x$ differentietur secundum *a*, perinde est ac si $\sqrt{aa + xx}$ secundum *a* differentietur et productum multiplicetur

per $dx:x$; differentiando autem constat $d\sqrt{aa+xx}$ esse $ada:\sqrt{aa+xx}$, ergo $dx\sqrt{aa+xx}:x$ secundum *a* differentiata dat quantitatem $adadx:x\sqrt{aa+xx}$. Summa autem harum differentiarum omnium, seu differentia inter VC et V(C) est $ada\int dx:\sqrt{aa+xx}$, ubi rursus a et da manent invariabiles seu constantes; in quolibet scilicet transitu ab VC et V(C) seu in ipsa differentia inter ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$ eadem est *a*, quae est in differentia inter ${}_2C_3C$ et ${}_2F_3F$. Cum ergo ${}_1F(C)$ sit differentia inter VC et V(C), erit utique $ada\int dx:x\sqrt{aa+xx}$. Quaeramus et ${}_1F_1C$ seu $d,a\int\frac{dx}{x}$ secundum a, fiet $da\int\frac{dx}{x}$ et fiet ${}_1F_1C$ ad ${}_1F(C)$ ut $\int\frac{dx}{x}$ ad $a\int dx:x\sqrt{aa+xx}$. Ac proinde ducta ${}_1B\vartheta$ parallela tangenti curvae VC in ${}_1C$ vel ${}_1(C)$ et ad partes (C), sed ita ut sit ${}_1B\vartheta$ ad ${}_1B_1C$ ut $a\int dx:x\sqrt{aa+xx}$ ad $\int dx:x$, tunc juncta ${}_1C\vartheta$ sit tangens quaesita curvae ${}_1C_1(C)((C))$. Patet ex his, differentialis quantitas seu elementum ipsius $\int dx\,.\,\overset{\infty}{x};a$ secundum *a* seu d(secund. a) $\int dx\,.\,\overset{\infty}{x};a$ sit $=$ $da\int dx\,d(\text{secund. a})\,\overset{\infty}{x};a$.

Patet etiam ex his, summari hinc ipsas differentias arcuum per arcus, nempe: Summa differentiarum elementarium simul sumtae ${}_1F_1(C)$, ${}_1F_1((C))$ etc. aequatur differentiae integrali seu differentiae inter arcum ultimum et primum, et ita habentur summationes duplicatae antea ignotae, veluti hic $\int(ada\int(dx:x\sqrt{aa+xx}))=$ $\int dx\sqrt{aa+xx}:x$ (secund. prim. x et a) $-\int dx\sqrt{aa+xx}:x$ (secund. ultim. x et a). Nempe hactenus non nisi secundum unius literae variationem summare potuimus vel differentiare, vel secundum plures simul variatas ubique, sed non si plures pro parte

variatae, pro parte invariatae concurrant, ut hic sit; possunt etiam intervenire constantissimae. Et hoc inserviet ad secunda solida quae Newtonus frustra metiri tentavit, et ad similia problemata alia quae et mihi aliquando occurrere memini. Inde etiam procedi poterit ad summationes triplicatas et his altiores, quodsi jam x et a coincidere ponamus, quod semper intelligi potest. Hinc reductio habebitur replicatarum summationum ad simplices. Applicandum hoc ad frustra tentatum a nobis $\int dx\, l_1\overline{+x}$, unde pendet $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc. Videtur hinc nova plane et inexpectata consequi promotio geometriae sublimioris. Et video, nisi hanc Methodum invenissem, non fuisse mihi profuturam inventionem meam pro Tangentium inversis per mirabilem illam constructionem curvae transformatae et simul sibi in ea ubique extensionem mutantis. Nam non satis methodum examinans supponebam, curva materiali transformata semper puncti constantis in ea sumti motum vel directionem posse inveniri durante transformatione adeoque tangentem duci curvae novae imaginariae a puncto illo inter transformandum descriptae; supponebam enim, quoties puncti moti loca haberi possunt omnia, licet quadratorie, non posse non haberi directionem motus vel tangentis ductum, sed video eam tangentis ductionem ante hanc methodum repertam non fuisse in potestate.

LXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Binas meas acceperis. Priores Tuis respondebant: sequentes novam Methodum differentiationis a Te desideratam continebant. Has nunc scribo, ut aliquid addam, quod nuperrimas scribenti effluxit. Sententia nimirum mea est, recte nos facturos, si nonnihil adhuc novam hanc Methodum dissimulemus, donec ipsi satis usi simus; nam multa ibi latent majoris momenti, quam quis prima fronte suspicetur. Itaque optimum puto, ut neque proponamus aliis quaerendam hanc differentiandi vel tangentes ducendi rationem, neque a nobis inventam dicamus, multo minus expo-

namus in quo consistat artificium, donec nobis ipsis licuerit prosequi pro dignitate. Nam ex nova differentiandi Methodo necesse est vicissim novas etiam summandi rationes oriri, ad quas aliter fortasse aditus vix pateret. Exempli causa, in figura et casu Epistolae meae novissimae, patet Arcum VC dare summam omnium

$ada \int dx : \sqrt{aa + xx}$, atque ita, cum binae sunt variationes inter se

diversae, institui potest summatio, quod saepe requiri jam olim deprehendi. Quin amplius cum a possit variam accipere significationem, consequens est tum pro quadraturis, tum pro reductione aequationum differentialium, hac ratione obtineri posse, quae antea Methodis nostris obstinate sese opponebant, ut res ipsa Te mox docebit.

Et ea multorum problematum natura est, ut nonnisi per quadraturas istas disgregatas, ut ita dicam, seu ordinatim diversas construi possint, quas utique communi more construere non licet, quoties illae quadraturae ordinatim diversae ad unam reduci non possunt. Sed cogor nunc abrumpere, quoniam Brunsvigam discedendum est, paulo ante nundinas, ita jubente Serenissimo Brunswicensium Duce, quod in ipsis nundinis exterorum multitudo otium ei mecum satis colloquendi neget. Dominus Beauval Basnage mihi ad nuperam schedam a Te curatam respondit. Mea in Cartesium cum Tuo judicio Tuisque animadversionibus demum suo tempore expecto. Vale etc.

Dabam Hanoverae 9. Augusti 1697.

LXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si de benevolentia mea, ut dicis, fuisti semper certissimus, gaudeo speroque Te etiam id esse et fore. Non puto me dixisse, quod commendaveris fucos, absit hoc. Omnia quae mihi ab Amico dicuntur, in meliorem sensum interpretari soleo. Nimia scrupulositas amicitiae cursum sufflaminat.

Gratum est, quod tandem agnoscis, non tam facile esse Synchronae quadratorie determinatae tangentem ducere. Dolebam

sane, cum viderem a Te verbis meis parvam adeo fidem haberi, ut nolueris tantisper cedere in iis, quae tumultuarie tantum considerasti, ego vero improbo meditandi labore penitus enucleavi et plus satis examinavi.

Methodum puncta Synchronae una quadratura continua inveniendi, cujus adumbrationem in fine literarum adjecisti, velim ut accuratius perficias; videtur pulchri quid habere: interim nondum recte video, quo tendat, aut quid faciat ad determinationem tangentis Synchronae, neque satis capio mentem Tuam, quod scilicet intelligas per: vim gravitatis fortiorem factam, et per haec verba: sic omnia in curva AC hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea, quae in curva A(C) priore gravitate; mihi quidem videtur, prout ego rem concipio, jam per se, gravitate non mutata, omnia esse proportionalia in utraque curva, siquidem similes supponantur.

Ecce jam meam solutionem et constructionem pro brevissimo appulsu, quia illam gratam fore dicis. Videbis ipse optime an aliquid cum idea Tua cognati habeat; peragitur quidem sine Synchronae consideratione; interim et hujus tangentes facillime per illam ducuntur. Problema ita se habet: Datis (fig. 120) ordinatim positione curvis similibus ex eodem puncto A similiter descriptis AIF, AHD, AGB etc. (NB. non est necesse ut habeant commune initium) et data positione recta CD, quaeritur ex omnibus istis curvis illa, per quam grave a puncto A descendens, tempore brevissimo appellat ad rectam CD. Solutio. Assumatur ex curvis similibus una quaedam constans, ut AGB, sintque duae variabiles AIF, AHD, situm proximum habentes. Jam si AHD vel AIFE illa sit, per quam grave celerrime descendit ad datam CE, oportet ut tAIFE sit = tAHD (per tAIFE, tAHD intelligo tempus per AIFE et per AHD,) utrumque enim tempus minimum, et hinc inde crescere supponitur. Ductis per D et E, rectis ADB, AEN, secantibus curvas in F, D et N; intelligatur ducta NP parallela ipsi CD, quae secet AB, productam in P; ita fient Triang. similia FED et BNP, in quorum laterum FE, FD vel BN, BP ratione invenienda consistit caput rei, ut videbis. Jam facile demonstratur tempora per arcus similes esse in subduplicata ratione eorum subtensarum, aliarumve linearum homologarum: Ergo tAAHD seu tIFE.tAIF::$\sqrt{AD}.\sqrt{AF}$

$:: \sqrt{AP} \,.\, \sqrt{AB}$. Est autem iterum, ob similitudinem curvarum tAIFE . tAIF :: tAGBN . tAGB, ideoque tAGBN . tAGB $:: \sqrt{AP} \,.\, \sqrt{AB}$ et dividendo tBN . tAGB $:: \sqrt{AP} - \sqrt{AB} \,.\, \sqrt{AB} ::$ (ob BP infinite parvum) BP . 2AB. Exprimitur autem tBN per $\frac{BN}{\sqrt{NL}}$ adeoque tAG BN per $\int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$, unde $\frac{BN}{\sqrt{NL}} \,.\, \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$ (:: BN . $\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$) :: BP . 2AB, permutando BN . BP :: $\frac{1}{2}\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$. AB. Producto itaque latere NB ad R, id est ducta ad curvam AGB tangente BR, illaque sumta aequali $\frac{1}{2}\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$, jungatur AR, erit triangulum BAR simile parvo triangulo NBP vel EFD, et proinde AR parallela positione datae CD. Ex inventa hac proprietate seu ratione laterum trianguli characteristici BP, BN problema facillime construitur sic: In omnibus punctis curvae assumtae constantis AGB ducantur tangentes, et fiant singulae aequales huic respective quantitates $\frac{1}{2}\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$ (quod utique semper per unam continuam quadraturam peragitur) tunc habebitur nova curva AOR; per A ducatur ipsi positione datae CD parallela AR, secans Curvam AOR in puncto R, a quo si ducatur tangens RB ad datam curvam AGB, determinabitur punctum B, quod quaesito est analogum; ducta enim recta AB, et si opus producta, secabit positione datam CD in puncto brevissimi appulsus D, per quod si describatur AHD similis ipsi AGB, erit haec AHD illa ipsa quae quaeritur. Q.E.F. Vides, quam brevem et simplicem constructionem repererim hujus difficillimi alias Problematis; vix puto aliam simpliciorem vel concinniorem adinveniri posse.

Id hic notabile existimo, quod licet Synchronam consideraverim, hujus tamen tangens eadem opera inventa est, sed constructione omnino inversa, quia quae antea data sunt, jam sunt quaesita, et vicissim; datur enim punctum D, et quaeritur recta DC, tangens Synchronae transeuntis per D, quod sic retrogrado ordine efficio: Duco per D rectam ABD secantem curvam assumtam

AGB in puncto B, ex quo ducta tangens BR occurret curvae AOR in puncto R, quod si jungatur cum A recta RA, huic ducenda est parallela DC, quae erit tangens Synchronae quaesita.

Jam spero Te mihi assensurum, quod summo jure dixerim, illum qui licet solverit problema brevissimi appulsus in Cycloidibus, non ideo etiam statim id solvisse in aliis curvis similibus, quia in Cycloïdibus solutio facile habetur, sed indirecte ex fundamento optico, nempe ex normalitate undae cum radiis seu Synchronae cum Brachystochronis; id quod in aliis non obtinet. Quae cum ita sint, dicas quaeso, annon ipse credas, fratrem meum ad summum solvisse problema in cycloidibus et nec hic plenarie, quia pro recta positione data proponit tantum verticalem, quod me valde obfirmat in suspicione mea, quod scilicet undarum usum huc transferre nesciverit, imo de illis ne cogitaverit quidem. Et prout loquitur, concludendum est, illum rem pro desperata habuisse in circulis et parabolis, dum ipse suam imbecillitatem fatetur his terminis: solvant alii, nobis proposuisse sufficiat. Interim in Circulis ex constructione mea universali res adeo facilis est, ut quadratura continua reducatur ad rectificationem curvae alicujus algebraicae. Scis enim, quod si radius sit a, et NL, x; erit $\frac{BN}{\sqrt{NL}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{aax - x^3}}$, cujus summatio dependet a rectificatione curvae Lemniscatae, per quam construximus olim Tuam Isochronam paracentricam. Et sic, quod notabile est, duo haec problemata Isochronae paracentricae, et brevissimi appulsus, licet utrumque transcendens, inter se tamen habent connexionem algebraicam, id est, uno constructo, alterum algebraice construitur.

Caeterum artificium meum reducendi diversas quadraturas ad unam continuam, agnosco hic limitatum esse et desiderare, ut curvae ordinatim positione datae sint similes et similiter positae; in aliis autem occasionibus quamplurimis eo commode utor, licet curvae ordinatim positione datae non sint similes, ut in exemplo Ellipsium super eodem axe descriptarum, cujus in praecedentibus meis mentionem injeci, sed quod miror, in responsione non attingis. Imo ope hujus artificii solvo infinita alia hujusmodi problemata, ubi nunquam curvae similes requiruntur; horum aliquot curiosa perscripsi nuper Dno. Varignonio, quae proponat suis

Geometris *). Unde colligere poteris hoc artificium latius patere nec adeo limitatum esse, quam statim Tibi visum est.

Et ego semper censui perfectissimam transcendentium expressionem esse per exponentiales, sed mihi videtur frustra illam quaeri in iis, quae non dependent a quadratura Hyperbolae; unde imaginari non possum, quomodo etiam exponentialiter exhiberi posse velis, quae supponunt quadraturam Circuli. Optarem unicum exemplum. Certissimum puto omnem quantitatem exponentialem, quam voco percurrentem, per Logarithmicam construi posse. Sed forte aliud genus exponentialium habes, cujus participem me reddas, rogo.

Cedo manus: Problema radii non est plus quam determinatum, prout intelligis medium variari juxta duas dimensiones: sed, si placet, attende quod longe difficilius sit, determinare leges harum variationum, ut radii in datas lineas transeant, quam earumdem linearum invenire curvas normaliter secantes, unde gratis hoc ex illo quaereres. Praeterea observo, quod superficies, verbi gratia, verticalis, repraesentans medium varians secundum ambas dimensiones, id est, secundum rectam verticalem et horizontalem, considerari tamen possit tanquam varians secundum unicam tantum dimensionem, si vis, verticalem. Si enim (fig. 121) varies medium quocunque modo secundum ABCDEF, ita etiam, quovis alio modo, secundum ALMNOPA, manifestum jam est, etiamsi omnia puncta in horizontali FF sint diversae densitatis, dari tamen aliquod punctum G, in proxima linea EE, quod sit ejusdem densitatis cum F, et aliud H in proxima DD, item I in CC, K in BB, P in AA etc. omnia aeque densa ac F; quocunque enim modo medium per superficiem AFFA variari concipiatur, haec tamen successio punctorum aeque densorum perpetuo locum habet, quod, ni fallor, clarum est ex ipsissima Tua continuitatis Lege. Datur ergo integra FGHIKP, secundum quam medium aequaliter est densum; jam si eodem modo concipias reliquas lineas EO, DN, CM, BL etc. transire per puncta ejusdem respective densitatis gradus, habebis medium, cujus variatio, quae licet duarum sit dimensionum, jam unius tantum dimensionis est. Hinc concludo a Te non sat bene dictum esse: Si varies medium uno tantum modo, tunc fateor problema fore plus quam

*) Siehe Journal des Sçavans 1697, Aoust.

determinatum (nec refert, BB verbi gratia recta sit an curva); refert enim maxime recta sit an curva. Vidisti enim, si curva admittenda esset, omne medium, quocunque modo varietur, uno tantum modo variari intelligendum esse; quod itaque palmarium est in determinatione medii, ut radios transmittat per lineas ordinatim positione datas; perspexi rem eo recidere, ut determinentur lineae FGHIKP, EO, DN etc. quod autem, ut supra monui, longe difficilius est, quam inventio curvarum ad datas normalium. Sed haec, pro perspicacitate Tua, me multo melius penetrabis; velim per otium cogites. Offert sese mihi difficultas insuperabilis in eo, quod infinitae lineae curvae sunt determinandae, forsan omnes diversae naturae.

Nuspiam quidem diserte dixisti, rem aeque esse facilem in appulsu ad rectam et ad curvam; id tamen ex verbis Tuis sequi credebam, cum dicis: Eadem methodus videtur etiam servire, si celerrimus appulsus quaeratur, non ad rectam, sed ad curvam positione datam. Si duo diversa per eandem methodum solvuntur, illa duo mihi sunt aeque facilia.

Video verissimum esse, legem minimi vel maximi et in particula curvae minima locum habere, sed sane non possum applicationem ad Isoperimetra constituere, neque etiam ad Brachystochronam datae longitudinis. Verum non minus est rem posse (fig. 116) considerari in Ellipsi ordinaria et finita PQR (hoc enim jamdiu et ego concipiebam) et determinari in ea punctum M, ut ex focis ductae LM, MN percurrantur citissime ex data altitudine. Demus porro haec deinde posse applicari ad infinite parva, ita ut ratio LM ad MN dari possit: nondum tamen video, nec videbo, donec mihi ostenderis, quomodo postea iterum regressus detur a cognitione speciei trianguli infinite parvi LMN, ad cognitionem ordinarii, curvae scilicet quaesitae, vel saltem ad aequationem differentio-differentialem. Quomodo, quaeso, eo pervenire posses, cum in aequatione litera reperiri necesse sit, quae determinet longitudinem curvae (alias indifferens esset pro omnibus Brachystochronis) illa litera vero, vel illud quidquid sit quod determinet longitudinem curvae, nequidem ingrediatur in considerationem, quaerendo speciem trianguli LMN. Dixi perpetuo inveniri posse speciem trianguli LMN, ita ut descensus per LMN sit citissimus; sed fateor me id nondum quaesivisse, quia a me

impetrare non possum, ut absolvam calculum prolixissimum, qui requiritur. Interim ut obstacula omnia removeam, ponamus calculum nobis ostendisse in Ellipsi ordinaria et finita punctum M ita se habere, ut triangulum LMN habeat unum latus LM duplum alterius MN, atque adeo idem etiam obtinere in Ellipticula infinite parva. Quo pacto mihi jam quaeres curvam datae longitudinis, ex eo quod ejus particulae minimae LMN faciant ubique triangulum, cujus unum latus LM duplum sit alterius MN? Si triangulum LMN posuissem isosceles, praevideo quod mihi responsurus esses, curvam quaesitam esse circulum, quamvis id nullo calculo invenire posses, ideoque ut superfluam disputationem evitem, pono unum latus duplum alterius, vel si mavis triplum, quadruplumve etc. modo non sit isosceles.

P. Malebranchius utique non egit ut decet, quod Te inconsulto libellum suum in lucem protruserit; dissuasissem id ego ipsi si tum temporis cogitassem quod jam cogito, aut saltem si de privato inter vos commercio, quod Malebranchius apud me ex parte dissimulaverat, constitisset magis. Quid in isto Libello contra continuitatis Legem contineatur, jam non memini; ex quo enim Galliam deserui, Libellum amplius haud vidi.

Corporum indivulsorum gradus Tuos admittam; mihi tamen videtur partes eumdem servare posse situm inter se, absque ut statuatur corpus perfecte rigidum (loquor de corpusculis exiguis, ex quibus majora componuntur); sufficit utique motum conspirantem partium alicujus corpusculi tantum esse, ut ab ambientibus disturbari non possit; quo casu primus indivulsi gradus habetur sine perfecta rigiditate seu duritie. Video clarissime perfecte dura non dari posse, eaque proin absolute rejicio, sed vacuola interspersa Democriti et Gassendi eatenus tantum rejicio, quod jam videam, iis non opus esse ad explicandos naturae effectus: contra quam olim credebam, motum scilicet nullum fore, si omnia in Universo essent plena, vulgari opinione nixus duritiem dependere ab immediato contactu et pressione materiae ambientis. Quod autem actu ista vacuola non dentur, credo non tam facile demonstrari posse, ab illis praesertim qui corporis essentiam non in nuda extensione statuunt. Et sane multis ex locis haud obscure colligo, etiam Hugenium vacui fautorem fuisse. Caeterum Democriticorum et Gassendistarum atomos perfecte duras statuentium, illisque vacuum interjicientium opinio non tam obsona mihi videtur,

quam Hartsoekeri, duo extrema inter se conjungentis, nempe perfecte durum et perfecte fluidum, quo absurdius nihil excogitari potuit; nihil enim magis continuitatis Legi adversatur, quam saltus ille ab uno extremo ad alterum. Parum soliditatis Hartsoekerus ostendit in scriptis suis, multoque minus alter ille Professor Matheseos Parisinus La Montre. Miror qui potueris interpositione Tua dignari hos duos inter se inepte admodum disputantes; me sane non moveret duorum coecorum de coloribus altercatio, neque ei me miscerem. Quid obsecro boni ab homine expectandum, qui in notiones communes misere adeo peccat, ceu factum fuit ab isto La Montre, qui 47am propositionem Euclidis demonstare volens immediate per Axiomata *), crassum adeo et palpabilem commisit paralogismum, ut Mathematicorum nemo eum refutare dignaretur; sed oportebat, proh pudor! ut quaedam de sequiori sexu eum castigaret, id quod revera fecit Domini Marchionis Hospitalii Uxor, ut forte vidisti in Diario Parisiensi. Hiccine Professor est, qui alios Mathesin docere debet? Pudeat hominem ignorantiam suam ita turpiter prodidisse. Quid id ad nos? dices. Ignosce; verum est, ejus errores nobis parum imponent; interim quia incidenter de isto homine cogito, non possum non stomachari, quod tam male consultum sit illis, qui scientiam ab eo haurire volunt. Vale.

P. S. Praeterito die Lunae hasce literas jam scriptas habui postridie dimissurus, cum eodem die acciperem novissimas Tuas 3 Aug. datas, quae fecerunt ut dimissionem in hunc diem distulerim, quo interea tuas diligenter perlegere, et quod forte notaturus essem, huc adjicere possem. Ut dicam quod res est, incredibili gaudio perfusus sum, cum viderem eundem genium Tibi totum mysterium pandisse; sed indignor quod Te altius admiserit quam me. Utique rem probe penetrasti, annotando totius negotii cardinem in eo consistere, ut inveniatur ratio laterum trianguli characteristici $_1C_1F_1(C)$ in Tua figura (fig. 118); colligere poteris ex solutione mea supra allata problematis celerrimi appulsus, ubi pariter rationem assigno laterum trianguli PBN vel DFE, methodum meam eodem artificio niti. Sed fateor mihi unicum defuisse, quin perfecerim methodum, quod scilicet mihi non venit in mentem differentiatio parametrorum seu quantitatum in eadem curva

---

*) Siehe Journal des Sçavans 1691, Juillet.

invariabilium. Sed pro transitu a curva ad curvam variabilium, de hujusmodi differentiatione, licet jam olim etiam inter nos actum fuerit, nunc tamen ingenue fateor, non cogitavi. Quam vero ingeniose, quam acute illum huic negotio accommodaveris, satis mirari nequeo; profecto nihil elegantius est neque excogitari potest, quam modus ille Tuus differentiandi curvam per summam differentiuncularum numero infinitarum. Quin crebrius conscendis currum, si tunc Tibi vena Mathematica apperitur? Imo vero defectus haud mediocris differentiales, sublatus est. Hinc quid censes? Annon possent depromi problemata, qualia jam dedi in Ellipsibus, quibus miserie exercere possemus Geometras, interiori Geometria licet maxime versatos? Viderent sane omnes suos conatus iritos, quamdiu in nostrum artificium non penetrarent, suamque infirmitatem tanto magis mirarentur, quod hujusmodi problemata videantur facilia et ex directa tantum methodo tangentium desumta. Haud dubie quadraturae illae $a\int dx : x\sqrt{aa+xx}$ et $\int dx : x$, quas in Logarithmicis pro ratione linearum $B\vartheta$, BC invenisti, amplius possunt reduci. Ambae enim dependent a quadratura Hyperbolae, et per consequens per ipsissimas Logarithmicas construi possunt. Potuisses explicare methodum brevius et universalius, per figuram abstractam, id est, non ad certum exemplum Logarithmicarum adaptatam. Spero non ingratum fore, si hic methodum generalissime exposuero: Sint ergo (fig. 118) curvae ordinatim positione datae, quacunque lege cognita progenitae VC, $V(C)$, $V((C))$, quarum axis communis VB, et parametri variabiles a, (a), $((a))$. Sint jam portiones curvarum VC, $V(C)$, $V((C))$ (quas Tu aequales posuisti) data lege crescentes vel decrescentes, dest, sit $VC=\alpha$, $V(C)=(\alpha)$, $V((C))=((\alpha))$ etc. per α, (α), $((\alpha))$ etc. intelligo quantitates datas per a, (a), $((a))$ etc. Quaeritur jam tangens curvae $C(C)((C))$ transeuntis per extremitates illarum portionum, quod sic facio. Quoniam VC seu α datur per a, ejus differentialis dabitur per da. Sit itaque $VC-V(C)$ seu $d\alpha=\overset{1}{\alpha}da$ (per $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{\alpha}$, $\overset{3}{\alpha}$ etc. intelligo quantitates diversimode datas per a). Sit jam VB, x; ergo particula curvae ${}_1C_2C$ dabitur per dx affectam quantitate composita ex x et a (hujusmodi quantitates datas per x et a, quaecunque hic occurrere possunt, vocabo α_x, $\overset{1}{\alpha}_x$, $\overset{2}{\alpha}_x$, $\overset{3}{\alpha}_x$ etc.) Sit itaque ${}_1C_2C=\alpha_x dx$; jam si differentietur ${}_1C_2C$ secundum a,

manente x, habebitur ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ seu $d\alpha_x dx = \overset{1}{\alpha}_x dx\, da$; hoc si iterum summetur, sed secundum x, manente a, erit $VC - VF = da \int \overset{1}{\alpha}_x dx =$ (quia $\int \overset{1}{\alpha}_x dx$ datur per a et x) $\overset{2}{\alpha}_x da$; quoniam vero supra inventum est $\overset{1}{\alpha} da = VC - V(C) = VC - VF - {}_1F(C) = \overset{2}{\alpha}_x da - F(C)$, habebitur $F(C) = \overset{2}{\alpha}_x da - \overset{1}{\alpha} da$. Tandem quia BC datur per x et a, si secundum a differentietur, manente x, proveniet FC data per da. Esto ergo $FC = \overset{3}{\alpha}_x da$. Unde si ducatur $B\vartheta$ parallela ipsi F(C), id est tangenti curvae datae VF et si fiat $CB \,.\, B\vartheta :: FC \,.\, F(C) :: \overset{2}{\alpha}_x da - \overset{1}{\alpha} da \,.\, \overset{3}{\alpha}_x da :: \overset{2}{\alpha}_x - \overset{1}{\alpha} : \overset{3}{\alpha}_x$, tanget ducta $C\vartheta$ curvam C (C) ((C)) in puncto C. Si nunc regula generalis inventa ad certum exemplum esset applicanda, dispiciendum tantum esset, quid sit $\overset{2}{\alpha}_x$, $\overset{1}{\alpha}$ et $\overset{3}{\alpha}_x$: primum enim et ultimum semper dabuntur per a et x promiscue, medium vero per a tantum; dari per a et x, vel per a, comprehendo etiam quando transcendenter, vel ut Tu vocas, quadratorie dantur; hoc enim processum regulae generalis non impedit.

Quod si hanc methodum ad Problema brevissimi appulsus applicare velimus, reperiemus quidem facile tangentes Synchronarum, licet ordinatim positione datae curvae non sint similes, ut in superiori mea solutione supposui: sed fateberis, rem nondum confectam esse. Etenim per hanc methodum quaeritur tantum positio tangentis ex dato puncto contactus in data Synchrona; interim in celerrimo appulsu res secus se habet, quia ex data positione tangente quaeritur punctum contactus. Superest itaque, quo exerceas ingenium, ut tam nobile inventum omnibus numeris completum reddas. Mihi videtur id praestari posse per intersectionem duarum aliarum curvarum, quae semper construi possunt. Sed hisce jam missis, pervenio ad aliud egregium inventum pariter generalissimum, in quod harum occasione incidi, et quod defectum tollit maximum methodi Tangentium inversae, sicuti Tuo sublatus est aliquis methodi Tangentium directae. Consistit illud in solutione hujus Problematis: C o n s t r u e r e   c u r v a m   d a t a s   o r d i n a t i m   p o s i t i o n e   c u r v a s   s i v e   s i m i l e s   s i v e   n o n   s i m i l e s   i n   d a t o   a n g u l o   s i v e   i n v a r i a b i l i   s i v e   d a t a   l e g e   v a r i a b i l i   s e c a n t e m. Supposita similitudine curvarum ordina-

tim positione datarum, Problema jamdudum solutum habui, ut et in paucis aliis dissimilibus; nunc vero quomodo in similibus et dissimilibus generaliter id solverim paucis explicare, haud ingratum Tibi fore confido. Sint (fig. 122.) curvae ordinatim positione datae AF, AE, AC etc. secandae a curva quaesita FEC in angulo dato, quem hic exempli loco ponamus ubique rectum (ut videas, quam facile solutu sit, quod operose ex Opticis deducere volebas). Ad AH axem communem intelligatur applicari HG parameter curvae AE, cujus intersectio cum GH producta, determinet punctum E in curva quaesita. Si hac ratione ubique parametri applicari concipiantur, fiet curva AG, quam si determinaverimus, eadem opera etiam FEC erit determinata. Esto itaque AH, x; HG parameter variabilis a; HE vel HB (data per x et a) α_x; quae si differentietur secundum a, manente x, habebitur BE; sit itaque BE $= \overset{1}{\alpha}_x da$: differentiando vero BH seu α_x secundum x manente a, proveniet CI seu BD. Sit itaque BD $= \overset{2}{\alpha}_x dx$, et proinde DE $= \overset{1}{\alpha}_x da - \overset{2}{\alpha}_x dx$; est autem DC $= dx$; ergo, quia ex conditione problematis angulus BCE est rectus, erit □DC = ▭ BDE, id est $dx^2 = \overset{1}{\alpha}_x \overset{2}{\alpha}_x da dx - \overset{2}{\alpha}{}_x^2 dx^2$, seu $dx + \overset{2}{\alpha}{}_x^2 dx = \overset{1}{\alpha}_x \overset{2}{\alpha}_x da$. Haec igitur aequatio differentialis determinat curvam AG, qua constructa construitur etiam quaesita FEC. Nam data GH parametro, dabitur etiam curva AE, cujus illa est parameter; atque adeo producta GH, occurret curvae AE in puncto E, quod erit ad curvam quaesitam FEC. Hujusmodi constructio per parametrorum variabilium applicationem non inelegans mihi videtur; non dubito quin alibi quoque possit inservire, Tuo praesertim accedente ingenio. Notare hic convenit, quod si curvae ordinatim positione datae sint Algebraïcae, erit curva parametrorum AG transcendens primi generis; si illae sint transcendentes primi generis, erit haec transcendens secundi, et ita consequenter. Patitur quidem hoc exceptionem in nonnullis exemplis particularibus, quando scilicet quantitas $\overset{1}{\alpha}_x$ evadit Algebraïca, id quod per accidens fieri potest, etiamsi AF, AE, AC sint transcendentes. Iterum vale.

Groningae d. 14. Augusti 1697.

Ut impleam vacuum hujus paginae, transcribam huc quaedam ex literis Dn. Varignonii, quas eodem die cum Tuis accepi,

ut videas quam misere luat noster calculus apud invidos et ignaros; vix putem Lutheri et Calvini reformationem durius habitam fuisse. „Mr. le Marquis de l'Hospital, inquit, est encore à la „campagne, desorte que je me trouve seul icy chargé de la dé„fense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr, tant j'ay „désja soutenu d'assaux pour eux contre certains mathematiciens „du vieux style, qui chagrins de voir, que par ce calcul les jeunes „gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peu„vent pour le décrier, sans qu'on puisse obtenir deux d'écrire „contre. Il est pourtant vray que depuis la solution que Mr. le „Marquis de l'Hospital a donnée de vôtre problème de **Linea „celerrimi descensus**, ils ne parlent plus tant ni si haut „qu'auparavant.“ Quos hic vocat mathematicos styli veteris, haud dubie collimat in Catelanum, de la Hire, Roolium aliosque obscuri nominis, qui nominari non merentur.

Jam diu est quod nihil Actorum viderim; fac quaeso ut sciam, an ibi in tempore monitum sit me solvisse problemata fraterna. Ecce ultimus labitur mensis praestituti temporis, intra quod mihi conceditur me soluturum declarare.

Prima occasione per studiosum aut alium hac transeuntem mittam Dno. Meyero Tuas ad Cartesium Animadversiones. Praecipua quae ibi notavi, Tibi jam perscripsi.

LXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum multa mihi essent dicenda literis Tuis pro merito respondere volenti, et tempore exclusus, ob negotia de die in diem proferrem scribendi officium, tandem malui necessariis defungi, quam prorsus silere, sperans interim Tuum silentium diuturnum ex causa ingrata non oriri.

Gaudeo Tibi tantopere methodum meam novam, quo pomeria calculi nostri proferuntur, placuisse. Sane hac ratione non tantum ad aequationem differentialem primi gradus reducitur inventio curvae ordinatim positione datas perpendiculariter secantis, aut eis angulo vel constanter, vel ordinatim dato occurrentis; sed

etiamsi angulus non sit ordinatim datus, modo quae ipsum determinant, cum aliis functionibus constituant aliquid ordinatim datum, idem obtineri potest, multaque adhuc ampliora insunt.

Solutio Problematis brevissimi appulsus non est, quod Te jam amplius moretur, licet curvae ordinatim positione datae non sint similes et similiter positae. Quaeritur nimirum, per quam ex his grave brevissime appellat ad rectam positione datam. Ad quamvis Synchronarum ducatur recta ipsam tangens, sed datae rectae parallela, habebitur curva quae transibit per omnia puncta contactuum, cujus cum recta data intersectio dabit quaesitum appulsus punctum, unde caetera pendent.

Dn. Marchio Hospitalius mihi solutionem Tuorum quorumdam Problematum in Diario Gallico propositorum misit, demto primo nescio quo, ut eas in Actis Lipsiensibus edi curem, quod et fiet *), tunc cum Tua edetur solutio. Tibi ipsi sese de ea rescripturum esse indicavit, nec dubito factum. Mihi haec Problemata Tua non innotuerant. Solutiones Hospitalianae ad casus nova Calculi promotione solvendos non pertingunt. Vidi quae Historiae Operum Eruditorum inseri curasti, ubi aemulos eleganter defricas.

Durat adhuc, etsi per longa intervalla subinde dilata, disputatio inter Dn. Papinum et me. Valde innititur ei, quod duo corpora reciprocis ad corporum rationem celeritatibus concurrentia se mutuo sistunt. Hinc putat vim eorum esse aequalem, non considerans aequalia ab ipsis absolute non posse effici, etsi se mutuo possint impedire.

Inter alia objecerat: Si fingamus corpora A et B esse perfecte dura et inflexibilia, A massa 1, celeritate 4, et B massa 4, celeritate 1, et concurrendo elastrum tendere, atque ita eo tenso simul ad quietem redigi, tum D massa 8 fingi substitutum in locum B, idque ipsum D recipere totam vim quam dederat elastro corpus B, seu quam corpus B ab eo reciperet, et tamen celeritatem, quam recipit D, esse celeritati ejus quam recipit A reciproce proportionalem; hinc infert, nunc plus, nunc minus virium in mundo esse, diverso tempore, contra sententiam meam. Respondi, verum esse, A et D hic recipere ab Elastro se restituente velocitates molibus reciproce proportionales; sed verum non esse,

---

*) Act. Erudit. 1698. Januar.

quod D tantum recipiat virium, quantum recepisset B; itaque dixi, rem perinde fore ac si A, 1, et D, 8, concurrissent velocitatibus A, ut $\frac{1}{2}\sqrt{10}$, et D ut $\frac{1}{8}\sqrt{10}$; ita enim iisdem velocitatibus ab Elastro reflexum iri, et conservatum iri tum reciprocam celeritatum ad corpora rationem, tum etiam virium summam.

Nunc novum casum objicit, nempe ut concurrant A massa 10, velocitate 4; B massa 1, velocitate 10, et ubi B in concursu ad quietem redactum est, substituit ei D duplum, seu cujus massa 2. Et putat tunc perinde omnia eventura esse, ac si concurrissent A, ut prius massa 10, velocitate 4, sed D massa 2, velocitate 5. Quo facto facile colligit eventum proditurum, quo minorem in corporum a se invicem discessu virium summam habituri essemus, quam ante. Supponit autem, ut ante, corpora A, B, D esse perfecte rigida; Elastrum autem non in ipsis esse, sed in corpore intercepto, quod fingendum est, statim iterum tolli, ubi libertatem recuperavit, ne forte corporis progressui obstet; etsi constet has fictiones revera locum non habere.

Respondi, negando D massa 2, velocitate 5, absolute idem efficere quod B massa 1, velocitate 5, aut unum pro alio substitui posse, cum casus ipsius B sit duplo fortior casu ipsius D, seu duplo altius pondus ad eamdem altitudinem elevare possit. Interim operae pretium esset definire paulo distinctius, quantum celeritatis retineat A, quando B reductum est ad quietem, et quantum tunc virium sit translatum in Elastrum, ut scilicet melius determinari queat, quid futurum sit, si eo momento, quo B reducitur ad quietem, substitui fingatur ejus duplum D. Hoc igitur per otium a Te considerari non inutile erit; res certe in potestate est.

Huetius aliique amici in Gallia desiderant meas ad Cartesium Animadversiunculas. Erunt mox mittendi occasiones; itaque rogo, ut ad Dnum. Mejerum Bremam cures. Interim vale etc.

Dabam Hanoverae 2. Novembr. 1697.

LXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Silentium Tuum diuturnum me anxium reddebat de valetudine tua; sed bene est quod valeas, et gaudeo. Subverebar initio, ne forte postremae meae intercidissent. Nescio cur dicas, Te sperare meum silentium diuturnum ex causa ingrata non oriri, cum tamen ego a Te responsum expectaverim; non puto gratum Tibi posse esse, si copia scribendi deficit, ut inanes literas literis cumulem.

Etiam ego laetor Tibi probari modum meum, ex Methodo Tua nova differentiandi curvas deductum, quo curvam invenio curvas ordinatim positione datas secantem vel perpendiculariter, vel in angulo constanti, vel denique in angulo utcunque variante secundum datam legem; nec per hoc aliud intellexi, quam ut angulus vel per se sit determinatus, vel per certas quasdam (ut vocas) functiones quae constituant aliquid ordinatim datum. Non nego alia plura inesse, quae Te nemo melius rimari poterit; optarem praeprimis, ut (quemadmodum in praecedentibus Tuis ante abitum ad Nundinas Brunsvicenses scriptis innuis) inde eliceres novam summandi rationem; raro occurrunt hujusmodi summationes, qualis ex. gr. est haec $\int da \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$, quae per quadraturam segmenti circularis construitur; sed id alicujus momenti esset, si exinde pateret modus separandi indeterminatas in aequatione differentiali; hoc enim unicum est, quod se methodis nostris adhuc obstinate opponit. Asseris quidem aequationem construi posse, si non per quadraturam continuam, saltem per istas disgregatas seu ordinatim diversas; fateor autem me id nondum potuisse assequi, licet id tentaverim in levissimo hoc exemplo $xxdx + yydx = aady$, cujus constructionem vellem ut mihi dares, sive id fiat per quadraturam continuam, sive per disgregatas; nec profecto majorem capies fructum ex novo Tuo invento, praesertim si hanc separandi difficultatem hactenus insuperabilem non solum in hac, sed generaliter in omni alia aequatione tollere posses.

Solutionem generalem problematis brevissimi appulsus non absimili modo conceperam; restat tamen aliquid quod desideretur, nimirum quod ad Synchronam tangens duci posse assumatur posi-

tione datae parallela; id quod haud adeo facile judico. Sed habeo etiam alias solutiones, quae id non supponunt.

Proposueram ante novam calculi promotionem problemata, de quibus Dn. Hospitalius ad Te scripsit; alias non proposuissem: non ideo tamen statim alii in artificium nostrum penetrabunt. Verum dicis, solutiones Hospitalii ad casus curvarum dissimilium non pertingunt; quod idem cum objecissem, me scilicet per curvas ejusdem speciei non tantum intelligere curvas similes, sed quascunque alias ordinatim datas, ex. gr. omnes Ellipses super eodem axe descriptas, atque adeo ipsum problemati nondum plenarie satisfecisse; respondit nuper se agnoscere aliquid amplius requiri pro curvis dissimilibus. („Je vous avoue, inquit, que lorsque les courbes ne sont pas semblables, il faut quelque chose de plus; en tout cas je ne pretens avoir resolu vos derniers problémes, que dans ce sens, et j'attens de l'apprendre de vous lorsque les courbes sont dissemblables etc.") Si urget Dn. Hospitalius ut edas solutiones suas, poteris edere meis non exspectatis; cum enim perfectae solutiones pro omnibus curvis ordinatim datis ipso Tuo judicio adhuc dissimulandae sint, operae vero pretium non esset solutiones imperfectas publicare, tantum nempe pro curvis similibus, praestat omnino silere et nihil dare, quam pauca dare. Quandoquidem nondum videris illa problemata, mitto ecce foliolum ex Diario Gallico *). Tua forte applicatione dignum censebis primum, ubi quaero modum ducendae in superficie convexa lineae brevissimae a puncto ad punctum. Hospitalius de eo desperavit; ego vero illud reduxi ad aequationem differentialem, quae si separentur indeterminatae, construi poterit.

Quae Dn. Papinus de novo movet contra aestimationem virium, speciosa quidem sunt, sed si penitius inspiciuntur, fundamentum nullum habent. Aptissime ipsi respondisti, quod quando duo corpora velocitatibus reciprocis ad massarum rationem concurrentia sese sistunt, non ideo sequatur eorum vim esse aequalem; nam vis vim non destruit, seu vis vi non est contraria; eodem modo quo quadratum lineae affirmativae et quadratum lineae negativae non dicuntur contrarium efficere, utpote utrumque affirmativum. Dicendum itaque duo illa Corpora sese sistere, quia habent aequalem quantitatem directionis sibi mutuo contrariam; quae, si re-

*) Journal des Savans 1697 p. 394 — 396.

spective consideretur, nulla est: est enim directio respectiva progressio communis Centri gravitatis corporum, quod cum non progrediatur ante concursum, pariter non progredi poterit post concursum. Secus sequeretur, aliquid quod quiescit a se ipso moveri posse, quod est absurdum. Hinc, ut Centrum gravitatis quiescat post concursum, ut ante concursum, oportet ut vel et ipsa corpora in conflictu sistantur, tenso elastro interposito manente, vel si elastrum sese restituat, ut pristina celeritate repellantur. Hi enim duo soli casus possibiles sunt, quibus Centrum gravitatis in quiete conservatur. Hanc puto genuinam causam esse ejus quod Papinus aequalitati virium ascribit, sicque paralogismum commisit n o n c a u s a e p r o c a u s a. Ex hoc errore etiam reliqui ejus errores pullulant; ut in priori objectione, si A massa 1, velocitate 4, et B massa 4, celeritate 1 concurrant, et elastro tenso, ipsis ad quietem redactis, substitui intelligatur D massa 8, in locum B. Quis non statim videret Papinum gratis hic supponere, corpus D tantumdem virium ab elastro recipere, quantum ipsi dederat corpus B, seu quantum jam B ab elastro iterum reciperet, si maneret? Ut autem inveniatur, quantum praecise celeritatis corpus D recipiat ab elastro, et quanta item celeritate repellatur corpus A, considerandum est, quod tota vis quam habebant ante concursum corpus A et corpus B, in concursu transferatur in elastrum interjectum; hoc proinde elastrum ita tensum (quod ope vinculi in tensione ista manere concipio) si e medio duorum illorum corporum A et B eximi, et inter duo alia corpora quiescentia C et D interponi intelligatur; evidens utique est, quod jam subito soluto vinculo, totam suam vim transferet in corpora C et D, quarum perconsequens aggregatum idem praecise debet esse, quam aggregatum virium corporum A et B; res itaque eo recidit, ut distribuatur hoc aggregatum virium corporum A et B in duas partes, quarum una, quae C communicabitur, sese habeat ad alterum ipsi D communicandam reciproce ut D ad C; atque istae vires dividantur per moles C et D, et demum ex quotientibus extrahantur radices quadratae, quae dabunt velocitates, quas corpora C et D ab elastro recipient. Hinc in casu particulari Papini, ubi corpora A et C sunt aequalia, vel potius eadem utrumque massa 1, B massa 4, D massa 8; et A celeritate 4, B celeritate 1, reperietur reflexum iri A et D velocitatibus, ut $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ et $\frac{1}{6}\sqrt{10}$, prorsus ut Tu invenisti.

In altera objectione, quando concurrunt A massa 10, velocitate 4; B massa 1, velocitate 10, ubi in concursu reducto B ad quietem ei substituit D duplum, seu cujus massa 2, putans tunc perinde omnia eventura esse ac si concurrissent A, ut prius, massa 10, velocitate 4, sed D massa 2, velocitate 5, petit principium, supponitque quod probare tenetur, nimirum D massa 2, velocitate 5, idem efficere seu tantumdem habere actionis, quantum B massa 1, velocitate 10: id quod absolute falsum est, et nil nisi vetus error. Interim cum a me desideres, ut per otium me applicem ad definiendum, quantum celeritatis retineat A, quando B reductum est ad quietem, et quantum tunc virium sit translatum in elastrum, ut scilicet melius determinari queat, quid futurum sit, si eo momento quo B reducitur ad quietem, substitui fingatur ejus duplum D, fateor id esse in potestate; requirit tamen plus meditationis quam praecedens, quae quia jucunda admodum mihi visa fuere et digna quae penitius inspicerem, tanto fortius me compulere ad desiderio Tuo satisfaciendum, et quidem post brevem meditationem generaliter omnia determinavi, positis tum corporibus tum velocitatibus in quacunque ratione. Dico itaque, in hoc Papini casu, corpus A, eo momento quo B reducitur ad quietem, retinere celeritatem 3, vel in elastrum translatam esse integram vim ipsius B, et praeterea septem decimas sextas partes vis ipsius A; quae quidem facile patent. Sed, quod caput rei est, dico porro, quod si, eo momento quo B reducitur ad quietem, substituitur D, amittet A gradatim de sua velocitate residua 3, D vero gradatim acquiret, et quidem decrementa illius et incrementa hujus erunt reciproce ut moles, ita ut tandem (quod contingit eo ipso instante, quo elastrum est in maxima sua tensione) A et D habitura sint aequalem seu communem celeritatem, quae proinde erit $\frac{5}{2}$: tunc autem elastri vis seu tensio maxima erit aequalis vi integrae ipsius A simul et quartae parti vis ipsius B, earum scilicet quas ante concursum habebant. Inventa itaque vi elastri, invenietur per modum supra exhibitum, quantum celeritatis elastrum a sua tensione sese restituendo, corporibus A et D imprimet, nimirum ipsi A dabit celeritatem $\sqrt{\frac{37}{12}}$, ipsi D vero $5\sqrt{\frac{37}{12}}$ in plagam contrariam. Hinc si illa a celeritate communi auferatur, haec vero ad eandem addatur, habebitur quaesitum. Dico itaque, quod post substitutionem illam

factam A feretur velocitate $\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}}$, D autem $\frac{5}{2} + 15\sqrt{\frac{37}{12}}$ in plagam eandem. Hoc ratiocinium egregie confirmatur, si analytice quaeratur, supponendo quantitatem tum virium tum directionis post concursum et substitutionem debere manere eandem, quae fuerat ante concursum. Sic, si ponatur velocitas futura ipsius A, x; velocitas futura ipsius D, y, erit quantitas virium $10xx + 2yy = 260$ quantitati virium ante concursum; et quantitas directionis $10x + 2y = 30$ quantitati directionis ante concursum; ex his enim duabus aequationibus reperietur $x = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}}$ et $y = \frac{5}{2} + 5\sqrt{\frac{37}{12}}$, ut ante.

Cum hactenus nulla occasio sese obtulerit mittendi Bremam Tuas in Cartesium observationes, misi illas tandem per Cursorem ordinarium ad Dn. Meyerum. Rogo ut Menckenio nostro transmittas (communi prius involucro inclusas) has literas adjunctas una cum schediasmate hoc Actis inserendo*), quod apertum reliqui, ut statim legere possis, quid ad nupera Tschirnhausiana respondeo. Hirium turpiter paralogizantem paulo acrius castigo; sed qui nostra ita contemnit, meliora non meretur: discat inposterum abstinere ab iis, quae non intelligit. Frater meus junior ex castris huc redux hyemem apud me transiget, etiamnum Berolinum appetit; ego vero optarem, ut in aliqua officina vestratium conditionem quaereret versus Pascha. Hic ab eo sunt literae ad Jägerum filium, quas per famulum curare velis rogo; vidit hunc Jägerum olim in Germania et nuper in Gallia. Vale etc.

Groningae d. 4 Decembr. 1697.

P. S. Hoc ipso momento accipio Diarium Gallicum, in quo reperio solutiones meas problematum fraternorum; has Tibi etiam mitto, ut perlectis illis simul cum reliquis Lipsiam expedire haud graveris.

---

*) De Arcuum Parabolicorum comparatione.

LXVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Justo rigorosius mecum ages, si nihil mihi Tuorum perscribes, nisi cujus meae Tibi occasionem suppeditent; quae vereor ne inposterum cogantur esse steriliores quam vellem. Inanes non fuissent Tuae, si eorum participem me fecisses, quae interim a Te acta video. Idque, ut imposterum facias, rogo.

Pro differentialibus ad quadraturas revocandis habui sane meditationes, quarum executio nunc novo differentiali genere egregie juvatur. Sed mihi non licet quae meditor, mature exequi. Itaque cogor comperendinare.

In tangente Synchronae ducenda quae sit datae rectae parallela, difficultatem esse non puto. Idem est si pro recta data sit curva; tunc ordinatim similes ducendae.

Putem sufficere, ut Domino Fratri Tuo in Actis Eruditorum satisfacias, ut in Diario Gallico*) jam fecisti, nec opus esse ut omnia des, quae interim es assecutus. Misi in hanc rem Tua Lipsiam**), sed nescio an ipsi ex Gallico versuri sint Tua; fortasse fecisti ipse, et ut exhiberi debeant, perscripsisti in Tuis ad Dominum Menckenium literis.

Ut Dn. Papino melius satisfacerem, ipse calculandi laborem post literas Tibi scriptas in me sumseram, et quantum judico, eadem qua Tu methodo sum usus. Certe et mihi provenit: eandem manere quantitatem progressus seu vim directivam, praeter vim absolutam totalem. Mitto Tibi meae ad ipsum Epistolae duplicis praeformationem, rogoque ut remittas, quo integrum habeam meum cum ipso de hoc argumento commercium.

Vim directivam hic manere potuissem assumere nam id hoc quoque casu demonstrari potest. Sed malui rem aliunde derivare, ex ipsa scilicet distincta consideratione conflictus, quod a Te quoque recte factum video. Spero et numeros consensuros.

Miror Dn. Tschirnhausium, Virum alioquin ingeniosissimum, in rebus non difficilibus et in potestate existentibus tam saepe labi. Id distractionibus tribuo, et festinationi non satis conside-

---

*) Journal des Savans 1697 Decembr.

**) Acta Erudit. 1698 Januar.

rata proferendi. La Hirium usque adeo παραλογίζειν in re clara magis adhuc miror.

Problema minimae lineae in superficie curva a puncto dato ad datum ducendae olim consideraveram, sed mihi non satisfeceram; cum vero proponeres mihi Brachystochronam, meditationem absolvi; sunt enim haec problemata sic satis cognata, sed ad praxin Methodi non accessi.

Dominus Ezechiel Spanhemius mihi Berolino scripsit, sese jussu Electoris sui ad Regem Galliae proficisci, et Hanovera transiturum. Ea occasione Animadversiunculas ad Cartesium Huetio transmittam desideranti. Itaque gratias ago, quod eas Domino Mejero Bremam misisti. Vale et mihi subinde quid agas significa, et si videtur etiam communica.

Dabam Hanoverae 17 Decembr. 1697.

LXVIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Gratias ago quod mea curaveris Lipsiam. Diarium Gallicum sine versione quidem Latina misi, sed rogaveram Dn. Menckenium, ut ipsi excerperent pro beneplacito, quasi id factum esset me inscio et non curante; alias si pro merito respondendum esset fratri, durioribus abstinere vix possem, licet in literis ad me Dn. Menckenius serio monuerit moderate agere, se enim in Actis omnia contentiosa evitaturos.

Remitto ecce scripta Tua, ubi quae Dno. Papino respondisti, abunde perspexi. Gaudeo nos concurrisse non solum in determinatione velocitatum, quibus A et D separantur, sed in eadem prorsus methodo, qua uterque usi fuimus.

Calculi Tui examine facto, video etiam numeros consentire, nam in figura Tua (fig. 123.), ubi velocitas A ante concursum seu AP est 44, velocitas B seu PB, 110; facis P(G) $27\frac{1}{2}$ et retrosumis (G)(A) $\frac{1}{4}\sqrt{13431}$; a puncto A versus anteriora accipis (A)(D) $\sqrt{13431}$; erit per consequens P(A) seu velocitas postfutura A $27\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{13431}$, et P(D) seu velocitas D erit $27\frac{1}{2} + \sqrt{13431}$. Ego vero positis AP, 4, et BP, 10, dixi

esse P(G) $\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}}$ et P(D) $\frac{5}{2} + 5\sqrt{\frac{37}{12}}$; sunt autem $44 . 4 :: 110 . 10 :: 27\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{13431} . \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}} :: 27\frac{1}{2} + \sqrt{13431} . \frac{5}{2} + 5\sqrt{\frac{37}{12}}$ omnia proportionalia; ergo consentimus. Quid ad responsionem Tuam reposuerit Papinus, lubentius viderem; dic ipsi quod nos uterque eadem reperimus, alter alterius nesciens cogitata; forsan agnoscet tandem a nostris esse partibus veritatem, nisi nos ambos prae se vidente coecutire arbitretur. Cum nuper, La Hirii errore deprehenso, etiam reliqua Tractatus mechanici*) ejus pervolverem, inveni Regulas pro communicatione motus, quas nostris consentire reperio, absque tamen, ut Author veram aestimationem virium vel statuat vel praesupponat: deducit illas ex natura elaterii, seu, ut dicere soles, ex lege vis mortuae, quae celeritates imprimit in simplici reciproca ratione molium. Unde hoc lumen hauserit La Hirius nescio; a se habere dubito. Videtur ex ipsis illis Regulis tanquam jam suppositis, La Hirium aliosque qui cum eo faciunt (etiam Papinum, si La Hirii ratiocinium admitteret) convinci posse de vera quantitate actionis; quippe facile ex illis demonstrabitur, eandem perpetuo conservari summam producti quadrati velocitatis in molem, non vero simplicis velocitatis in molem, ut haud dubie ipse Hirius putat, qui proinde proprio se jugulat gladio. Dno. Marchioni Hospitalio Tua, ut dixit, venia communicavi Tuam methodum pro solvendo secundo meo Problemate Programmatis ante annum impressi, quae Newtonianae similis est. Hic abrumpere cogor, deficiente scribendi copia, et ego vereor, ne meae inposterum futurae sint interdum steriliores, quam vellem. Ordines nostri novam mihi imposuerunt docendi provinciam, atque in eum finem certam decreverunt summam ad emenda instrumenta experimentalia, ut, exemplo Volderi Lugdunensis, Studiosos nostros etiam experimentis Mathematico-physicis exerceam et delectem. Hisce vale, et cum novi anni auspiciis etiam novis fruere animi corporisque viribus etc.

Groningae d. 8 Jan. 1698.

*) Traité de Méchanique, Paris 1695, p. 394 sq.

LXIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

. . . .

La Hirii Mechanica aliquando ut legere possim, operam dabo. Quae de concursibus corporum habere ais, recta ea suspicor ex Mariotti scriptis habuisse, cujus schedae in manus ejus venere. Ego autem cum Mariotto de his contuli jam Parisiis, et licet ipsi sententiam meam de vera virium aestimatione non satis exposuissem, alia tamen ratione, per vim scilicet mortuam ab elastro exercitam, rem explicabam.

Interim ex solo principio vis mortuae vix poterit definiri gradus tensionis Elastri a corporum concursu factus, aliaque multa.

Non laudo, quod Viri docti interdum non nominant eos, a quibus profecere. Sic Dn. Ozanam ausus est meam Quadraturam Arithmeticam in sua Geometria Practica, Autore dissimulato, proferre, et demonstrationem pene verbotenus meam sibi ascribere. Et Dn. La Hirius ipse, quod non satis mirari possum, Epicycloïdum usum ad figuras dentium sibi tribuere videtur in peculiari de iis dissertatione*), cum tamen certum sit inventum esse Roemeri Dani. Nam eram Parisiis eo tempore, quo is invenit, remque non tantum ab ipso Roemero, sed et Hugenio intellexi; quo tempore nondum La Hirius in Academiam Scientiarum Regiam erat receptus, nec in hoc genere quicquam praestitisse dicebatur. — Roemerum, qui in Dania agit Regi aestimatus, miror sibi sua non vindicare.

Gaudeo praeclarum consilium coepisse Ordines vestros, suppeditandi sumtus in experimenta, tantumque abest ut ea re putem literas Tuas futuras steriliores, ut contra tantum expectem abundantiores, nisi me scilicet solis abstractis delectari putas.

Interea a Tua benevolentia id mihi spondeo, ut tum de Tuis meditatis, tum et de aliis, quae Tecum communicantur nova, aliquam notitiam mihi non invideas; neque enim dubito a Dno. Marchione Hospitalio vel Dno. Varignonio, et aliis subinde aliqua scitu digna ad Te perscribi, et magis etiam a Te ad illos. Gratum

---

*) Traité des Epicycloïdes et de leurs usages dans les Méchaniques, Paris.

est quod Dno. Marchioni communicasti Methodum meam pro locis datae ad plura puncta proprietatis. Etsi enim Newtonianae non sit absimilis, tamen ex his, quae dicit Newtonus, non aeque ac ex meis origo inventi apparet.

Dn. Papinus, quod miratus sum, non satis ad rem respondit, persuasus distingueudum esse inter haec quae fiunt apud nos, ob insensibilis materiae actiones, et ea quae fierent in concursu corporum libero; similibus praejudiciis et Malebranchius laborat. Hortatus sum ut dicat, quas Regulas liberis corporibus tribuat; significabo ipsi consensum nostrarum determinationum. Dum literas meas a Te remissas inspicio, noto verum esse ut dixi, quod celeritates in corporum concursu amissae sunt reciprocae molibus; idem tamen non verum esse de celeritatibus recuperatis, cum corpora se restituunt, et rursus a se incipiunt recedere; at verum esse quodammodo de recuperandis. Vale vigeque et in hunc annum et in alios multos etc.

Dabam Hanoverae 18 Januar. 1698.

LXX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Num quae in Diario Gallico edidi, in Acta sua Latine transtulerint Lipsienses, hactenus ignoro, sed scire percuperem; parum quidem refert sive imprimatur sive non, sufficit semel publice extare ad satisfaciendum fratri; at ideo Actis quoque inserta optarim, ut cum problemata ibidem mihi fuerint proposita, etiam solutiones Acta legenti occurrerent.

Gratum est scire, quod La Hirius, quae de Corporum concursibus habet, ex Mariotti scriptis hauserit; non modo Authorem dissimulat, sed eum bis vel ter citat, tanquam contrarium sentientem, ut scilicet plagium tanto scitius tegeret; quis enim suspicari ausit La Hirium a Mariotto didicisse, quem in ea re ab ipso dissentientem dicit? Vitium sane intolerabile in La Hirio non semel animadverti; virorum Doctorum nomina contemptim nimis et incredibili crista, sed dolose subticet, infra suam dignitatem

censens quicquid ab aliis provenit, quando interim vel maxime illorum inventa sibi arrogare affectat.

Dissertationem De Epicycloïdibus nondum vidi, sed aliquid de ipsarum usu ad figuras dentium etiam in ipso Tractatu mechanico*) habet; Inter alia constructionem alicujus rotae hoc modo dentatae, omni notabili frictione carentis, quam se ipsum executioni dedisse ait prope Lutetiam, cujus tamen primam inventionem Dno. Des-Argues tribuit. Unde vero figuram dentium ad procurandum motum aequabilem didicerit, altum est silentium. Credebam equidem primo non nisi conjecturando voluisse divinare figuram debere esse Cycloidalem, quia forsan haec ipsi prae alia aptior visa fuerit: etenim, ut modo dixi, Dissertationem de Epicycloïdibus non vidi, neque in Tractatu mechanico demonstrationem addit; postea vero, ut rei certior fierem, figuram debitam ex me ipso quaesivi, atque ex calculo comperi, Cycloidem communem satisfacere, sed illam non solam, namque (quod La Hirius non habet) et protracta, et contracta, idem praestant. Mirabar itaque quis Genius hunc hominem, Calculi nostri aliusve novae methodi omnino rudem et osorem, in cognitionem harum figurarum deduxisset: ast postquam Roemeri inventum esse ex Te cognovi, cesso mirari, et Tecum jam potius miror, qui illi vivo etiamnum et legitimo parenti prolem subducere et pro sua publice obtrudere audeat. Quod Mariotto fecit demortuo, arguit iniquitatem, ast vivum inventi proprii gloria privare velle, ostendit perfrictam hominis frontem et impudentiam haud vulgarem, quasi quod luberet sibi, in alios liceret. Non dubito, Roemerum sua sibi vindicaturum, si haec ad cognitionem sui provenerint; sed ut audio ex Fratre meo juniore, qui illum Hafniae saepius adiit, in rebus Aulicis jam totus est, quibus haud dubie tempus utilius teret, quam plagiario respondendo.

Cum olim Genevae agerem, Dni. Ozanam Geometria Practica forte in manus incidit; quam volvendo, cum reperissem Quadraturam arithmeticam, memini me dixisse ad Dn. Fatio Duillierium, qui praesens erat, me antea hanc progressionem, quanquam sine demonstratione, vidisse in Actis, quae Te auctorem agnosceret: mirari me cur Ozanam aliena sibi ascribere ausus fuisset; me

*) Traité de Méchanique, Paris 1695, p. 368.

enim non dubitare, illum demonstrationem suam a Te ipso prius edoctum fuisse. Sed hic fere Gallorum omnium laudabilis mos est; ego etiam tale quid expertus sum in ipso Marchione Hospitalio (inter nos dictum) qui ante aliquot annos apud Hugenium vanam ex meis captavit gloriolam; rescriveram id quidem paulo post, sed facile ignovi, ita tamen ut videret, me non latere quod Hugenio scripsisset. Nec profecto multo sincerius mecum egit, quando nuperum suum Opusculum vulgavit. Licet in praefatione mihi ut aliis multum debere profiteatur, vaga nimis est haec confessio, nec eo melior, quod Author Diarii Parisini recensendo hoc Opusculum, eam nescio a qua generosa modestia profectam depraedicet; si vere modestus fuisset, imitari debuisset Erasmium Bartholinum candide edicentem se, quae conscripsisset tantum, Principia matheseos universalis a Schotenio accepisse: quippe non majori jure sui dicendus est Author Opusculi, cum totum quantum est, paucis paginis exceptis (Tibi in aures dico et nemini alii) a me partim scriptum, partim in calamum dictatum, partim etiam, postquam Parisios deseruissem, per literas communicatum acceperit: in cujus documentum omnium copiae a me asservantur, et quandocunque libuerit produci possunt; quas etiam ante vulgatum Opusculum nonnulli amici viderunt, et bonam partem descripserunt; et quid multum! habeo literas Hospitalii ad me scriptas, quae testantur, quantum mihi arrogare liceat. Praecipuum quod ibi praestitit, est quod in ordinem digessit et gallico idiomate nitide conscripsit, quae ipsi confuse, modo latine, modo gallice exhibueram. De suo, ut jam dixi, aliud nihil addidit, nisi quod tres quatuorve paginas repleat. Sed nolim quicquam ipsi de hisce referas, quae in fidem arcani communicavi; alias qui jam amicissimus mihi est, eum haud dubie infensissimum haberem.

Pecunia, quam Ordines nostri erogaturi sunt in experimenta, tanta non est, quantam forsan Tibi imaginaris: destinata est summa 1000 vel 1200 florenorum ad plurimum, ad emendum tantum instrumenta communia et ordinaria, quibus non magni quid vel extraordinarii praestiturum polliceor, neque adeo dignum, quod Tibi communicetur. Delectamentum forsan capient ipsi Ordines, si primis vicibus, ut spero, interesse dignentur et spectatores agere; id quod facile majori liberalitati ansam praebere posset.

Diu est quod nihil neque a Dno. Marchione, neque a Dno. Varignonio literarum acceperim, cum tamen uterque mihi debeat. Varignonius discendi cupidus est nec minus docilis, proficit in nostris insigniter, sed unde profecerit, agnoscet ingenue. Laudo hujus Viri mirum candorem et raram modestiam; non certe Gallum esse diceres, adeo alienus est a nationis ingenita ferocitate et fastu; odit ipse vanitatem suorum popularium, qui superciliose super extraneos se attollunt, nostra contra invidos strenue defendit.

Papinus utique distinctione sua subterfugium quaerit: abstrahimus ab insensibilis materiae actione; alium enim non consideramus concursum corporum quam liberum; sufficit ergo nobis, si pro hoc nostras regulas concedat. Non satis capio, cur in corporum concursu celeritates recuperandas molibus reciprocas esse dicas, recuperatas non item; mihi saltem videtur Elementa celeritatem et amissarum et recuperatarum seu recuperandarum (nullam differentiam hic capio) molibus esse reciproce proportionalia; quod utique sequitur est natura vis mortuae. Vale etc.

Groningae d. 8 Febr. 1698.

LXXI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Mitto ecce quae Dn. Frater Tuus Diario Eruditorum Gallico*) inseri curavit, tametsi suspicer, ea Tibi jam esse visa. Vides quam habuerim gravem causam declinandi receptionem arbitrii, antequam constaret ab utraque parte ad me deferri. Vides enim Dn. Fratrem Tuum aliam rei definiendae rationem proponere. Dn. La Hirii Librum de Epicycloïdibus habeo, sed attente legendi otium non est. Inspiciens obiter observavi passim inter demonstrandum ad infinite parva delabi, atque ita a rigore Veterum deflectere, non male quidem, nisi aliud professus videretur. Hoc enim semel admisso, non erat opus tanto apparatu. Est tamen, fateor, Do-

*) Journal des Savans 1698 Fevr.

ctrina ejus mathematica non vulgaris; nam Conicas meditationes universales Des-Arguesii et Pascalii egregie persecutus est. In Astronomia Observator diligens et in aliis quoque rebus excutiendis accuratus habetur; et cum delinationibus valeat, perutilem Academiae Scientiarum Regiae operam navat. Contra Dn. Tschirnhausium quaedam recte monuit, vellem tamen usus fuisset majore moderatione. Quemadmodum et ipsum Dn. Tschirnhausium optarem apertius agere, ne dum praeclariora premit, cogatur inferioribus applicare nomina, quorum mensuram non implere subinde depreheuduntur. Ille tamen in Literis ad me suis, ac publicis etiam scriptis, testatur gloriam a se non curari, nihilque eo affectu esse nocentius, quoad scientiarum incrementa, idque nuper quoque repetiit ea occasione quam nunc dicam.

Nempe Dn. Menckenius, qui non libenter aliquid Actis Eruditorum inserit, quod Dno. Tschirnhausio displicere possit, rem eo deduxit, ut is Literas ad me dederit humanissimas, iisque inseruerit responsionem ad nuperum schediasma tuum de Comparatione arcuum parabolicorum, rogans ut Tibi eam communicare velim. Cur autem hanc Tibi respondendi elegerit rationem, duas attingit rationes: unam, quod si qui gloria ducuntur, qualem Te esse appareat, in publicis concertationibus facillime offendunt offenduntarque, tum etiam quod apertissime Tibi ostendere possit, erroneam esse Tuam regulam, atque ita Tua interesse eam non prodire. Nam si cum Tua regula conjungatur id quod jam constat, areas Hyperbolicas, secundum progressionem geometricam linearum assumtas, esse aequales, oriri absolutam quadraturam Hyperbolicae areae. Addit Te non debuisse spernere eam rationem secandi areas, qua ipse sit usus, licet magis remotam, quoniam per ipsam praestetur aliquid aliud magni momenti, nempe ipsius areae quadratura, quoties est possibilis. Hoc si verum est, fatebor ego maxima elogia hanc Dni. Tschirnhausii methodum mereri. Jam deberem Tibi ipsam responsionem Dni. Tschirnhausii communicare, sed cum excerptum tantum ex Epistola sua Tibi mitti jusserit, nec alius commode exscribere recte possit, mihi vero non vacet, differenda in proximas erit haec communicatio.

Miror jamdudum nihil amplius a Dno. Marchione Hospitalio ad nos perscribi; spero nec a valetudine adversa, nec ab aliqua

erga nos animi mutatione silentium hoc oriri. Videtur autem in amicitia ejus inesse aliquid inaequabilitatis, ut nunc incalescere, nunc refrigerari videatur, nulla manifesta causa.

Vellem esset Tibi amicus Parisiensis, per quem discere liceret, quae illic, praesertim apud Academicos Regios Scientiarum aliosque, non in his geometricis tantum, sed et in aliis, geruntur. Nam Dn. Hospitalius, a quo talia subinde perscribi, vel amicum, qui faciat, parari mihi petii, ab eo commercii genere videtur alienior. Ego vero non arcana peto, sed quae Parisiis nota in vulgus. Nescio an per Dn. Varignonium tale aliquid efficere possis, sed ita ut a me non quaesitum videatur, et ut ipse non nimis ostendas cupiditatis. Fortasse tamen et alius extra Academiam satisfaceret liberius.

Si distinctionem inter celeritates recuperatas et recuperandas, qualem feci, attentius consideraris, non inanem reperies. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 25 Martii 1698.

LXXII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Accepi Tuas postremas recte cum Fratris mei admonitione Diario Gallico*) inserta, quae jam antea bis mihi fuerat missa a Dno. Varignonio primum, et deinde a Dno. Marchione Hospitalio. Gratias tamen ago pro cura Tua. Video maxime, Fratrem nolle sese subjicere arbitro, sed aliam rei definiendae, imo in longum producendae rationem quaerere et subterfugia, quod forsan causae suae timeat. Sed non est cur diutius tergiversetur: respondi**) enim me non accepturum, quidquid inposterum replicaturus sit, nisi ipse prius oblatum a me Judicem acceperit, aliumve mihi nominaverit: me namque idem de ipsius solutione posse dicere, quod ille de mea; utri tunc publicum plus fidei haberi debeat,

---

*) Febr. 1698.

**) Journal des Savans 1698 April.

ipsine, an mihi? Hanc ergo litem dirimendam esse a tertio. Me sustinere etiamnum problema in ea extensione sumtum, in qua Frater proposuit, a me in Diario legitime fuisse solutum; me tamen non negare, ex festinatione irrepsisse leviusculum aliquem errorem, qui autem ortum suum habeat non ex falsitate methodi, sed unice ex applicatione non rite instituta, praeterquam quod ille lapsus non tangat problema, prout illud a Fratre specialiter propositum sit (hoc enim, ut jam monui, plenarie solutum esse) sed tantum quatenus ego ipse universaliter conceptum illud exhibuerim. Quicquid sit, hunc lapsum paucis verbis emendari posse, et revera emendationem in responsione adjeci, quod idem feci ad calcem praesentis schediasmatis, ut in Actis quoque tanquam error typographicus cum caeteris corrigatur. Unde colligi posse, methodum ipsam bonam esse, licet in applicatione ad omnes circumstantias non satis attenderim et quidem directam invenerim (quod Tibi, ut puto, nondum significavi) quae mihi eandem solutionem, quam altera illa indirecta, qua ab initio usus fueram, suppeditaverit: mirumque consensum non solum in hisce, sed etiam in aliis speculationibus detexerit. Me praeterea in antecessum posse divinare, quid Fratri occasionem dederit credendi se divinaturum Analysin meam, scilicet quod in solutione mentionem fecerim de curvatura lintei a fluido expansi, unde illum conjecturasse me in Analysi usum fuisse consideratione maximi descensus Centri gravitatis in fluidis stagnantibus: sed ipsum falli; me enim, praeter hanc viam, quae dextre adhibita etiam eo porrigatur, possidere etiam directam, quam ille nunquam divinaturus sit: me itaque, ut Fratrem decet, Fratris commodis consulentem, ipsi suadere ut decertationem oblatam revocet etc. Sed haec amplius videbis in ipsa responsione impressa.

De Dn. La Hirio nihil est quod dicam: valeat ejus Doctrina mathematica non vulgaris, per me licet, modo aliorum quoque apud eum valeret, nec tantopere sperneret, quae ab aliis proveniunt, si displicent, nec statim sibi arrogaret, quae placent. Nosti Tu hominem, et ego novi; manet alta mente repostum, quod olim coram ab ipsius rusticitate expertus sum. Laudandus est, fateor, in plurimis, sed in plurimis quoque vituperandus. Subintelligo ex Tuis literis, licet id non exprimas, Dn. Menckenium apud Te questum esse de meis nimium rigidis (ut vocat) annotatiunculis in insulsam illius demonstrationem Lineae tautochronae,

quas imprimere gravatur, nescio quo praetextu, quod, ut ait, Acta non imprimantur ad viros doctos perstringendos, quasi id nunquam factum fuisset in ipsis his Actis, sumamus exemplum ipsissimi nostri Tschirnhausii olim vehementer adeo debacchantis in Dn. Craigium: quasi jam non liceret errores virorum doctorum detegere, praesertim si id fiat intra modestiae limites nominique auctoris parcatur, ut a me factum puto.

Quod Dn. Tschirnhausium attinet, adhuc magis miror, quod Dn. Menckenius schediasma meum de Comparatione arcuum Parabolicorum Actis inserere noluerit, cum tamen ibi usus fuerim verbis humanissimis et modestissimis, quibus efficaciora vix invenire potuissem ad persuadendum, quanto apud me sit in pretio. Si talia displicent, nihil est quod inposterum placebit, nihilque quod imprimetur. Non sane verborum meorum acerbitas (nam nulla fuit) bonum nostrum Tschirnhausium urit, sed res ipsa, quae ipsius errores detegit, ipsi est invisa. Hoc in ipso persaepe animadverti, quod satis quidem habeat ingenii ad perspiciendum, ubi erraverit, sed non satis candoris ad errorem agnoscendum et fatendum. Dicit gloriam a se non curari, me vero ea maxime duci; scilicet eam non curat, at affectat adeo et anhelat, ut etiam Fortunae ipsi suas opes invidere videatur, et aegre ferat, si alios praeter ipsum earum participes faciat. Quid quaeso in Geometricis facimus, quid invenimus, quod sibi non antea cognitum dixerit, vel simile aliquid praesenserit, vel si problema sit sibi insolubile, ambiguis tamen verbis Lectorem in dubio relinquat, an solverit nec ne; ut ante annum ab eo factum est in Actis, cum ageret de curva brachystochrona, ubi non quidem ausus est diserte dicere se solvisse, quia revera non solvit, nec tamen etiam se non solvisse dicere voluit, ut saltem imperiti ambiguo verborum sensu deciperentur. Sed cur ita fecit? haud dubie ut non omnino expers esset gloriae hujus inventi, quam ab aliis reportari solam perferre non potuit: eat jam et persuadeat cui volet, se non curare gloriam, cum tamen laureolam in mustaceo quaerat. Dicit porro se posse apertissime mihi ostendere, meam regulam esse erroneam, atque ita mea interesse eam non prodire: terriculamenta sunt, quibus pueros deterreat; mihi vero permittat ut edam, aut ipso invito prodibit. Ille qui vix unquam veritatem puram sine errore admixto exhibuit, ille qui quicquid hactenus in lucem edidit, pa-

ralogismis fere nunquam caruit, ille iam mihi ostenderit errorem, mihi qui solitus sum nihil in lucem protrudere, nisi prius mature et accurate singula pensitaverim: Quis tulerit Gracchos de seditione querentes? Ast facile judico, cur schediasma meum supprimendum suadeat, ne scilicet sua regula pro comparandis arcubus Parabolicis *), quam ipse pro falsa agnovit, tanquam inutili rejecta, jam ab alio meliorem editam approbare cogatur, imitando vulpem in fabula quae, nescio quo infortunio, amissa cauda, sociis persuadere conabatur, ut pariter caudas amputarent, tanquam impedimentum inutile et indecorum. En hic alterum schediasma **), quo fundamentum meae regulae explico, quod rogo ut paulo attentius legas; judicabis dein, quo jure Dn. Tschirnhausius meam regulam falsitatis accuset, aut quam aperte, ut jactat, ostendere mihi possit, eam esse erroneam. Lectum Dno. Menckenio, si placet, transmitte, cum literis adjectis; non dubito quin illud jam sine scrupulo sit Actis inserturus, et vel ideo, quia nulla ibi fit mentio Dni. Tschirnhausii. Quantum ad ejus rationem secandi areas, sprevi eam, quia remota est et magno conatu parum praestat. Judicare utique debui ex iis, quae vidi. Si praeterea aliquid aliud in se habet, nempe, ut jactat, modum determinandi areae quadraturam, quoties est possibilis, id ego non somniavi: ostendat ergo; tunc demum laudabo ejus methodum: ast vereor, ne hic iterum pro more suo solito plus sibi suaeque methodo ascribat, quam praestare possit. Si nudis promissis mundus decipitur, sane nemo ei eruditione cedet; promittit usque et antiqua promissa novis continue cumulando ex oculis nostris quasi subducit, ne scilicet eorum commonefieri possit: at vero sciat se ipsum maxime decipere, quando ingenuos quoque viros, qui inani jactantia nec pasci nec pascere solent, frivolis hujusmodi promissis contentos esse putat, multum enim ab existimatione ejus decedit, quam alias conceperunt de ejus acumine ingenii, aliisque animi dotibus.

Dn. Marchio Hospitalius nuper quidem, sed vix tribus qua-

---

*) Sie findet sich in der Abhandlung: Nova et singularis Geometriae promotio circa dimensiones quantitatum curvarum, Act. Erudit. 1695.

**) Investigatio Algebraica arcuum parabolicorum assignatam inter se rationem habentium etc. Act. Erudit. 1698.

tuorve lineis ad me scripsit, nimirum occasione sumta mittendi Fratris schedulam; nihil plane praeterea de rebus mathematicis aliisve attingens, ut olim facere solebat. Ego quidem hoc non miror, qui novi Gallorum morem tunc tantum adulantium, quamdiu opera nostra indigent. Spero quam optime desiderio Tuo satisfieri posse per Dn. Varignonium, qui mihi multis nominibus obstrictus est, et se etiam obstrictum agnoscit; nec obstat quod ipse sit membrum Academiae, quin potius tanto commodius quod petis, efficere poterit. Vir est officiosus et aperti cordis; faciet, si potest; si non potest, rationem dicet: prima occasione hac super re ipsi scribam. Vale etc.

Groningae d. 16 Aprilis 1698.

P. S. Jam ab aliquo tempore Dn. Bellavallius communicavit mihi aliquot propositiones Parisiis sibi transmissas, quibus auctor jactat se invenisse quadraturam circuli; et rogat Bellavallius, ut eos etiam Tibi communicem, sed puto Tibi jam esse visas. Ego quidem pro deliriis habeo indignis quae audiantur.

LXXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas Tuas et perelegans Schediasma pro secando arcu Parabolae ad Dominum Menckenium misi, et hortatus sum, ut tuo meoque periculo edat, quando nihil in eo est, quod Dnum. Tschirnhausium nostrum tangat. Quantum mediocri attentione judicare licuit, et recte et pulchre procedis.

Hujus autem objectionem jam Tibi mitto, ex literis ad me excerptam. Misissem citius, nisi oblitus fuissem literas ejus mecum deferre Guelferbytum, ubi ferias et unam alteramve septimanam animi gratia exegi. Nunc reversus officio satisfacio. Examinandi nec otium nec voluntas fuit, praesertim cum alias a Tuis notas assumens, duplicaverit laborem comparationem instituere volenti, quam ipsum absolvere maluissem, ut facile suspicer aliquid ipsum fugisse, sive in calculo, sive in calculi applicatione, cum id ipsi saepe evenire ob distractiones jam sim expertus, et fieri potest, ut quas ille diversas habet aequationes, quarum ope

arcum incognitum rectificari debere judicat, coincidant in extremo et in identicum aliquid desinant, ut incognita arcum designans postremo, praeter opinionem, evanescat, quod in talibus etiam saepe sum expertus, cum singulares methodos excogitatas in rem contulissem, quibus quadraturae particulares Hyperbolae, vel partium Circuli haberi posse videbatur.

Caeterum de Dni. La Hirii modo agendi secum coram parum humano parumque etiam urbano, etiam Dn. Tschirnhausius olim apud me querebatur. Ego Dmn. La Hirium de facie non novi, sed, quod postea didici, inscius ei obstaculum dedi, nam cum diu id fuisset actum ab ejus amicis, ut in Academiam Scientiarum Regiam reciperetur, me demum a Duce Brunswicensi Serenissimo Johanne Friderico in Germaniam evocato, res confici potuit, quod antea de me retinendo ageretur, eo autem tunc res ob bellum loco essent, ut ipsum pariter et me vocare Colberto non placeret. Ego vero libens fateor, Virum, qualis ipse est, industrium in observando atque etiam in delineando utiliorem fuisse ad solitos Academiae Regiae labores, quam me, qui in varia diffundor et aptior sum ad consulendum, quam ad laborandum, quem vereor ne ipsi dicturi fuissent hominem ignava opera, philosopha sententia. Ita fata utrique nostrum recte prospexere, praesertim cum ego, non minus quam Hugenius, mutationem postea secutam, sublato Nannetensi Edicto interdictaque Religionis libertate, haud dubie fuissem discessu praeventurus.

Caeterum nescio quomodo literae in Gallia declinant, nec mortuis Viris egregiis alii pares succedunt. Sed meliora jam spero studio Abbatis Bignonii, qui Pontchartrainio est ex sorore nepos, et res Academiae Scientiarum Regiae curat. Eum enim puto esse simul bene animatum et intelligentem. In Dno. Marchione Hospitalio aliquid inaequalitatis observo, quod valetudini ejus, an genio adscribendum sit nescio. Vides opinor, quam recte consilio meo usus suppresseris apud ipsum illam nuperam meam tangentium calculi promotionem, cujus quam late pateat usus ipse observasti. Et danda opera est, ut ne suspicetur quidem tale aliquid nobis esse; sed nescio quas alias potius artes indirectas a nobis ad similia conficienda adhiberi arbitretur; ita enim non tam facile ipsi in mentem veniet methodus nostra, quanquam ipsa per se satis sit abstrusa.

Cum credibile sit, relationem inter areas ejusdem curvae, in

Conicis coeptam, longius progredi certa serie in altioribus curvis, optandum esset lucem aliquam nobis in hoc genere accendi. Id si posset Dn. Tschirnhausen, faceret operae pretium; nunc quae promittit de sectionibus, quae ubi non succedant, impossibilis sit quadratura, vereor ut sit praestiturus; neque enim satis ea in re video connexionis.

Singulari nos beneficio obstringet Varignonius, si quae in Gallia per varias Matheseos partes geruntur, significare subinde Tibi velit, ut per Te ad me porro eorum notitia perveniat. Grata mihi erit via Tua directa, pariter et indirecta, omnisque adeo Analysis pro Problematibus Fraternis. Vale.

Dabam Hanoverae 15 Martii 1698.

Beilage.

Aus Tschirnhauss' Brief an Leibniz, d. 8. März 1698.

Ich habe bey vergangener Newen Jahres Messe in Leipzig bereits den Modum des Hrn. Bernoulli gesehen, die Arcus Parabolicos zu compariren; nun hette zwar ex tempore gleich darauff antworten können, obschon mediis Aulae occupationibus et diverticulis damahl abgehalten zu sein schiene; doch nicht praecipitanter zu verfahren, so habe erwartet, bies zu meinem ordinairen otio vor die studia gelanget. Da annoch gleicher gedanken bin, das uebmlich vorerst dessen inventum, die Arcus Parabolicos zu compariren, absolute falsum sey, und dan dass Er mir unterschiedene Sachen affingirt, welche mir niehmahls in Sinn gekommen. Das erste wihl ich so klar dartbun, dass es niemand wird leugnen können, der nur aliqualem cognitionem in hisce studiis hatt. Sit (fig. 124) CFILN hyperbola aequilatera, cujus Asymptoton AM angulum CAO bifariam dividens, dupla AC tanquam latere recto describatur Parabola ARSTV. Notum est vel ab Heuratii tempore rectangulum ex recta CA in curvam AS aequari semper spatio Hyperbolico CAQ. Secundo ist auch bekand, si duo spatia sint hyperbolica FDGI et LKMN hac ratione in se posita, ut AD sit ad AG sic AK ad quartam proportionalem AM, spatia haec fore aequalia, welches auch gantz leicht per Methodum Indivisibilium Cavalerii zu demonstriren. Wir wollen nun setzen, dass der Arcus Parabolicus RS sey aequalis x, und der Arcus TV sey ex. gr. duplus prioris; sit AB ∞ a ∞ BC, AD ∞ b,

AG $\propto$ c, AK $\propto$ f, AM $\propto$ g, $\sqrt{area}$ $\propto$ k. Dieweilen nun spatium ex AC in RS und TV aequalia sind den spatiis hyperbolicis PFIQ und TLNO, und ex his spatiis gantz leicht zu deriviren die spatia FDGI und LKMN, ponamus haec jam aequalia et obtinebitur aequatio talis $f^4 \propto \frac{bbccff + a^4ff}{cc} + \frac{akbbccffx}{c^4 - bbcc} - \frac{a^4bb}{cc}$, in welcher ad determinandam f nihil obstat, quam quantitas x seu Arcus Parabolici mensura. Aber diesem ist leicht zu helffen, nam quia ad determinandas AN et AO a Dn. Bernoullio aequatio inventa, ubi Arcus Parabolicus non comprehenditur, ope duarum harum aequationum non solum determinabitur Arcus duplus, sed etiam absoluta mensura Arcus Parabolici dati (quia duae aequationes, Joh. Bernoullii et haec mea, et duae hic incognitae sunt Arcus RS $\propto$ x et AK $\propto$ f) adeoque certo hinc sequitur vel spatii Hyperbolici mensura hactenus desiderata, vel quod Methodus, quam nobis exhibuit, falsa sit, et quia ipse prius negat (quadraturam nimirum hyperbolae) hinc impetrari, suspicor calculi lapsum Authori inanimadversum alicubi haerere, prout expertissimo circa similia facile accidere potest. Und kan diese Methode (so ich bieshero gebraugt) gantz leicht durch einen generalem Calculum verificirt werden, dass man multiplicire datum arcum wie man wihl, niehmahls das intentum Geometrice kan obtiniret werden, ohne die quadraturam Hyperbolae, ausser wan Arcus aequales desideriret werden, aber alsdan kombt Arcus ab altera Parabolae parte existens herauss, welches wohl kein novum inventum zu nennen eo respectu, dass es nicht bieshero bekand, aber doch novum ea ratione ist, wen man demonstriren kan, dass ohne die quadraturam hyperbolae dergleichen nicht zu erhalten, wie vorietzo gethan. Wiewohl einen gantz andern weg weiss, solam naturam curvae Parabolicae considerando, ohne einzige reflexion auff die hyperbolam zu haben, da den eben diess conclusum herauss kombt, und ea ratione glaube dass es noch weniger unrecht als aliquid novi vormahls erwähnet habe. Wie den Meine Methodus universalis non ejusdem saltem curvae, sed qua quarumvis diversarum curvarum inter se comparandos arcus non absolute kan geschehen, wie mir affingiret wird; sondern nichts anderes anweiset, als wieweit es möglich oder unmöglich, wie der Hr. Bernoulli ingleichen vorietzo in der Parabola intendiret hatt zu thun, obschon infelici successu.

Ferner habe niehmahlen nirgends wo gesaget, dass secare curvam rectificationis ignotae et secare spatium curvilineum quadraturae ignotae, ejusdem difficultatis res sit; sehe also nicht, auss was vor ursachen mir dergleichen affingiret wird. Wie mich endlich auch nicht wenig gewundert, das der Hr. Bernoulli mir die hierauff folgenden objectiones macht, dan ob zwar schon von des Cavalerii Zeiten an das bekandt ist, was Er hierbey saget, dass man nehmlich ex. gr. Ellipsin per infinitas Ellipses, und so alle spatia curvae per curvas ejusdem generis dieselbige in data ratione dividiren kan, ob auch gleich einer, der bloss den titulum meines inventi ansehe, auff diese gedanken gerathen kondte, so dächte doch nicht, dass wen Er die sache selber ferner deduciret sehe, die curvas so produciret, und da besonders des Hrn. Gregorii Scoti 62 propos. seiner Geometriae Universalis citiret, dass sage ich iemand mir dies objiciren kondte, den hierdurch werden nicht curvae ejusdem gradus gefunden, sondern diversae naturae, die aber sehr nahe beykommen, wie dan in der Hyperbola und Circulo curvae können gegeben werden, deren indeterminatarum dimensio saltem ad 3 dimensiones ascendit. Aber hierauff antwortet der Hr. Bernoulli, se non videre quid me permoverit ad indagandum per aliena et remota, quod in ipso statim vestibulo nulli non obvium; dieweilen aber durch meine Methode, die spatia in data ratione zu seciren, allezeit zugleich die quadratura spatii, wen es möglich, herauss kombt, welches wie bekand, durch den vorigen weg nicht erhalten wird, so versiehet man leicht, was mich diess zu indagiren bewogen, und dass dieses non cuilibet obvium sey, und also noch wohl Eruditi Orbis conspectum meritiret. De Circulo habe dergleichen auch nirgendswo gesagt: dass solche per lineas rectas in data ratione seciren kan, und also können die letztern worte auff mich nicht gerichtet sein, wie zwar alle Lectores nicht anders denken werden. Dan auss meiner Methode klar folget, dass die allergeringste Curva geometrica, dadurch wir solches thun können, ad tertium gradum gehöre, und also solches unmöglich sey, welches ein fein specimen, quanti momenti haec Methodus sey, zumahlen es cuivis curvae kan appliciret werden.

Dieses wehre also, was Ich, wie gesagt, den Actis zu inseriren vorhette, wihl aber solches zu dero überlegung vorhero communiciren, und aus dero antwort sehen, was hierbey zu thun

sein wird. Was die cycloiden anlangt, ist Demselbigen und mir lange bekand gewesen, wie die singularis proprietas Hugenii gar leicht zu demonstriren, wie auch Pardies publice gethan, und in Actis Anglicanis längst dergleichen etwas publiciret.

LXXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quamvis non opus sit defendere modum meum secandi arcus parabolicos contra objectionem Tschirnhausianam, quippe quem vidisti et approbasti, percurram tamen breviter principaliora hujus objectionis capita, inibique sequentia notabo. Initio habentur haec verba: „Hette zwar ex tempore darauff (auff diesen modum) antworten können, obschon mediis aulae occupationibus et diverticulis damahl abgehalten zu seyn schiene; doch nicht praecipitanter zu verfahren, so habe erwartet biss zu meinem ordinairen otio vor die studia gelanget; da annoch gleicher gedanken bin, dass nämlich dieses inventum die arcus parabolicos zu compariren absolute falsum seye.“ Ergo fatetur se non praecipitanter egisse, sed bono cum otio mature omnibus perpensis, ut putabat, judicium tulisse: hinc judica, si seriae etiam et diuturnae ipsius meditationes paralogismis adeo crassis non carent, quid de caeteris promissis quae nobis facit sit tenendum, quid de universali methodo quam jactat curvam quamvis secandi, quid item de illa altera possibilitatem vel impossibilitatem quadraturarum determinandi: vanitas vanitatum! Pergit „Das erste (dass nämlich dieses inventum falsch seye) will ich so klar darthun, dass es niemand könne läugnen, der nur aliqualem cognitionem hisce studiis hatt.“ Scilicet nemo negabit, qui aliqualem tantum cognitionem in hisce studiis habet, quia peritiores etiam rem obscure satis ab ipso expositam, quando non intelligunt, negare non audent, sed viso demum novo meo schediasmate negabunt. Calculum quem jam init, ut Tibi, ita nec mihi, animus fuit ob prolixitatem examinare, praesertim cum etiam Tecum divinare nequeam, qualem valorem per literam k intelligat. Examinavi tantum modum procedendi, ubi oppido paralogismum detexi evidentem adeo, ut mirer Tanto Viro et vel leviter attendenti, nedum serio meditanti, excidere potuisse. Supponit enim

ad quaerendum arcum TV duplum ipsius RS, debere necessario spatium hyperbolicum LKMN, correspondens arcui TV, aequari spatio alteri hyperbolico FDGI, correspondenti arcui RS. At vero unde haec necessitas? Quid, quaeso, me cogit ad supponendum potius LKMN = simplici FDGI, quam cuivis alii multiplici ejusdem? Adeoque hoc unicum omnibus fidiculis deducere poterit Dn. Tschirnhausius ex sua objectione, quod nempe sine quadratura hyperbolae vel rectificatione parabolae inveniri non possit arcus TV, qui sit duplus ipsius RS, et simul ut spat. hyperbol. LKMN sit aequale spat. hyperb. FDGI. Exinde vero, quod secundum hanc conditionem ex superfluo adjectam comparatio arcuum sit impossibilis, male concludit, illam esse absolute impossibilem. Peccavit ergo (ut Logici dicunt) argumentando a dicto secundum quid ad dictum simpliciter, et quidem, meo judicio, non minus absurde, ac si quis ex eo, quod Dn. Tschirnhausius jam non Romae existit, inferre vellet illum plane non existere. Ex dictis sequitur frustra sperari rectificationem parabolae ex bonitate methodi meae, quia illam conditionem LKMN = FDGI, praeter necessitatem a Dno. T. adjectam, non supponit; sed contra potius supponit LKMN esse duplum FDGI, et generaliter LKMN esse totuplum ipsius FDGI, quotuplus arcus TV desideratur ipsius RS. Et simul ex methodo mea patet, cur haec sola suppositio apta sit ad praestandum quaesitum, haec enim sola facit, ut x, quam Dn. T. pro arcu RS assumit, in aequatione finali evanescat, atque adeo valor ipsius f seu quaesitae AK proveniet in meris lineis rectis, loco quod per omnem aliam suppositionem x in aequatione finali maneat adeoque sine rectificatione hujus arcus x valor f obtineri non possit.

Non abs re fore puto, si Dn. Tschirnhausio hanc meam ad ipsius paralogismum responsionem communicaveris, ut videat quanto magis e re ipsius fuerit, quam e mea, errorem suum non in lucem emisse, et quanto majori jure ego ipsi consulere potuissem suppressionem ejus, quam ille mihi consuluerit, ne methodum meam publicari paterer; atque ut discat, posthac modestius judicare de propriis, et aequius de alienis, nec statim manifestae falsitatis arguere, quae verissima sunt. Sed pergo ad reliqua objectionis illius respondere:

Misere itaque hallucinatur, quando ait: „Man multiplicire datum arcum wie man wihl, so kan niemahls das intentum Geometrice obtiniret werden“, ostendi enim semper obtineri posse;

sed porro inquit: „ausser wan arcus aequales desideriret werden, welches wohl kein novum inventum zu nennen eo respectu, dass es nicht bisshero bekannt, aber doch novum ea ratione ist, wan man demonstriren kan, dass ohne die quadraturam hyperbolae dergleichen nicht zu erhalten, wie vorietzo gethan." Oh! elegans inventum, quo scimus, duos arcus in parabola sibi mutuo e regione oppositos esse inter se aequales, sed elegantius longe, quod demonstraverit (sc.) arcus in ratione inaequalitatis absque quadratura hyperbolae obtineri non posse. En duo inventa, mehercle cedro digna! Immediate subjungit: „Wiewohl einen gantz andern weg weiss, solam naturam curvae parabolicae considerando, ohne einzige reflexion auff die hyperbolam zu haben, da dan eben diess conclusum herausskombt." Qualisnam sit haec altera via, equidem scire non valde gestio; sufficit dixisse, idem per illam conclusum emergere, ut quanti sit aestimanda, licet nobis non visa, tuto tamen concludere possimus. Verba quae sequuntur, cum nulla constructione inter se cohaereant, ut Tu, ita nec ego, probe intelligere possum; videtur tamen D. T. innuere velle, se possidere universalem methodum non hujus vel alterius saltem curvae, sed omnium curvarum portiones inter se comparandi, quotiescunque possibile sit; sed vereor, ne universalis haec methodus cum superiori speciali pari passu ambulet. Ridiculum hic est, quod queritur sibi a me affictum esse, quasi dixisset se habere methodum curvae cujusque portiones absolute comparandi, cum tamen ipse idem et ibidem persuadere conetur, se scilicet per suam methodum determinare posse, quousque illa comparatio sit possibilis necne („sondern nichts anderes anweiset, als wie weit es möglich oder unmöglich"). Quid? dicere habere methodum rem praestandi quotiescunque res possibilis est, et si impossibilis, impossibilitatem demonstrandi: quid hoc aliud est, quam dicere, se habere methodum absolutam et perfectam? Quis enim unquam aliquid impossibile exigit? Rideo, quae modo citatis subjungit: „Wie der Hr. Bernoulli ingleichen vorietzo in der parabola intendiret hatt zu thun, obschon infelici successu." Festucam in oculo meo quaerens, trabem in proprio non animadvertit. Porro dicit: „Ferner habe niemahls nirgendswo gesagt, dass secare curvam rectificationis ignotae et secare spatium curvilineum quadraturae ignotae, ejusdem difficultatis res sit; sehe also nicht, auss was vor ursache mir dergleichen affingirt wird." Miror profecto, quod dicat me hoc

sibi affinxisse, an non multa in discursu, quae incidenter obveniunt, memoramus, ea tamen non statim alteri, cum quo nobis res est, affricamus? fateor quidem me dixisse, illa duo non esse ejusdem difficultatis res, sed nego, quod dixerim D. T. contrarium affirmasse. Quod autem D. T. male habeat, quod vilipenderim ipsius methodum secandi spatia curvilinea, dum ostendi nihil esse omnino novi, sed esse rem perfacilem et Lippis et Tonsoribus notam, eamque infinitis modis absolvi posse; sibi imputet, si non pro merito de illa judicavi, ostendat enim, quomodo per illam simul quamvis quadraturam, si possibilis eruere, vel si impossibilis, impossibilitatem ejus exhibere possit; tunc pluris aestimabo; sin minus, meliori jure de ea dicere possum, Eruditi Orbis conspectum non mereri, quam ipse iisdem his verbis de curva mea potestates vel rectangula, inter segmenta rectarum e puncto communi eductarum faciente aequalia, contemtum suum manifestaverit in Actis m. Maj. 1697; quod tamen inventum et Tibi et aliis defaecatioris judicii non parvi momenti videbatur.

Tandem ait: „de Circulo habe dergleichen auch nirgendswo gesagt, dass solchen per lineas rectas in data ratione seciren kan“: neque ego dixi illum dixisse; sed hoc ipsi proposui, tanquam quod foret alicujus ponderis, si per suam methodum solvere posset; alias nihil novi facturus, si non per rectas, sed per curvas circuli segmentum secaret.

Claudunt objectionem haec verba: „Was die Cyloidem anlangt, ist demselben und mir lange bekandt gewesen, wie die singularis proprietas Hugenii gar leicht zu demonstriren, wie auch Pardies publice gethan und in Actis Anglicanis längst dergleichen etwass publiciret.“ Sed scire velim Dn. Tschirnhausium me meam demonstrationem non voluisse venditare tanquam quid singulare vel difficile, sed contra potius ut, cum facillima sit, ostenderem La Hirii lapsum in re facili tanto turpiorem esse. Interim, si volet meam demonstrationem comparare cum illa quam Pardies publicavit, pessime agit, nullam enim vidi obscuriorem, prolixiorem simul et taediosiorem demonstrationem, quam Pardiesianam, loco quod mea tribus quasi verbis absolvitur. Quid in Actis Anglicanis hac de re prodierit, nunquam vidi.;

Dn. Marchio Hospitalius suspicatur utique novam nos possidere Calculi promotionem, idque suspicandi ansam habuit ex eo, quod ipsi dixerim non problemata illa, quae pronuper in Diario

Gallico proposui, etiam pro curvis dissimilibus et quidem generaliter solvere posse. Ex literis ejus satis colligo, quod haec ipsi salivam moverint, non tamen petere audet; ego vero dissimulo, quasi non perciperem quo collimaret.

Cum non suppetat tempus excerpendi, en ipsas Literas Varignonii cum adjunctis schedulis. Literas remittes, reliquis non indigeo. Penetrare non possum, qualem frater meus in solutionibus meis cavillandi causam sit daturus: video enim prout loquitur jamjam se praeparare ad cavillandum, ego quidem certitudine et evidentia solutionum mearum fretus, confirmor insuper quod illas consecutus fuerim diversissimis methodis, directa et indirecta; quemadmodum non dubito, quin Tu quoque illas pronuntiaturus sis legitimas, ubi methodos ipsas communicavero, quod hac vice fecissem, si illas jam conscriptas haberem, fiet autem proxima scribendi occasione. Varignonianorum communicationem differe nolim.

An relatio inter areas ejusdem curvae in Conicis coepta longius progrediatur in altioribus curvis, nondum mihi videre contigit. Interim modus meus comparandi arcus parabolicos etiam ad alias curvas extenditur, exempli gratia, ad parabolam cubico-biquadraticam, $ax^3 = y^4$. Notavi praeterea curiosam proprietatem circa hanc parabolam $ax^3 = y^4$, et parabolam communem $ax = yy$: nempe neutra quidem existente rectificabili, possunt tamen simul sumptae rectificari. Optarem, ut aliquis modum generalem traderet ad datam curvam algebraicam irrectificabilem inveniendi aliam curvam algebraicam, quae simul rectificari possent; habeo quidem talem modum, qui in plurimis curvis succedit, quemque si Dn. Tschirnhausius haberet, statim pro universali depraedicaret; ego vero nonnisi specialem illum agnosco. Denique habeo modum omnes Parabolas et Hyperbolas cujuscunque gradus, ut et innumeras alias curvas algebraicas, transformandi in alias alterius generis curvas algebraicas ejusdem cum ipsis longitudinis, nec non reducendi quamplurimas quadraturas impossibiles ad extensionem curvarum algebraicarum. Sed pro his aliisve similibus desiderarem methodum universalem. Vale etc.

Groningae d. 31 Maji 1698.

LXXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Mirum est Dn. Tschirnhausium in talem paralogismum incidere potuisse, qualem indicas. Multi spernunt vulgarem Logicam, et tamen plerumque paralogismi committuntur peccando in praecepta Logicorum. Faxo ut de responsione tua certior fiat, tametsi ex schediasmate tuo novissimo (siquidem id Dn. Menckenius, ut spero, edet) ipse satis errorem suum sit percepturus. Vellem etiam agnosceret candide, necdum de eo despero.

Gratias ago pro communicatione Varignonianae Epistolae, quam statim remitto. Desiderem describi nonnihil distinctius, saltem verbis (si figura commode non potest) fundamentum machinulae, qua artifex quidem aestimare se posse putat, quantum ex dolio sit emissum*). Mihi haec scribenti modus aliquis in mentem venit, sed oportet ut instrumentum in dolium immittatur initio, cum liquorem suum accepit, et ab eo tempore ibi haereat. Nempe pondere liquoris instrumentum aut in eo contentus aër comprimetur; liquoris autem parte detracta, laxabit se rursus instrumentum. Quod si artificio tali constructum sit, ut tam progressus, quam regressus distinctim animadverti possit, ope forte dentium singulariter accommodatorum; non turbabitur aestimatio, etiam reimmissione, dicique poterit, quantum ablatum, quantum redditum ponderis. Gravitas tamen specifica liquoris hinc agnosci nequit, sed mutatio tantum ponderis columnarum. Hactenus ergo praestari desideratum potest, sed nescio an magno fructu, cum etiam in vasis amplioribus non sit notabilis variatio altitudinis, multo licet liquore exhausto. Alium usum habere posset talis machinula, fortasse pro barometro portatili, quale olim animo concepi; nam integra nostra athmosphaera dolii instar se habet. Volebam autem adhiberi folliculum clausum, qui et comprimeretur et dilataret sese pro pondere aëris aucto vel diminuto. Nomen etiam horologiarii illius Galli discere non ingratum erit.

---

*) J'oubliois de vous dire qu'un horloger de cette ville a trouvé une machine pour voir si l'on a tiré du vin d'un tonneau et combien à peu près, quand même on l'auroit rempli. Aus dem Briefe Varignon's an Joh. Bernoulli, datirt Paris 27 May 1698.

Interroga, quaeso, Dominum Varignonium de progressu Astronomiae apud ipsos, et praesertim quousque producta sit methodus calculandi Eclipses, et an Dn. La Hirius suas Tabulas absolverit; et quid sentiatur de lineis, quas Dn. Cassinus voluit substituere Ellipsibus Keplerianis, quarum tamen novarum linearum causas Physico-Mechanicas dare difficile erit, quas nobis utique facilius praebent Ellipses.

Memini et Hugenium olim demonstrationem Tautochronismi Cycloïdis Pardiesianam non magnifacere. Ea quae in Transactionibus Anglicanis olim a me visa potius est quam examinata, Vice-Comitis Brounkeri erat, de qua judicat Hugenius, ob nimiam brevitatem supponi quaedam, nec satis absolvi demonstrationem, etsi insint argumenta, unde absolvi ipsa possit. Tua ratio demonstrandi mihi videtur perelegans et commendanda imprimis.

Quaeri etiam ex Dno. Varignonio utile erit, quo sit loco emendatio Geographiae, et annon aliquis responderit, aut responsurus sit Vallemontio (Autori libri de virgula divinatoria) qui nuper in Elementis Historiae agens de Geographia, Isaacique Vossii secutus sententias, impugnat novam Geographiam, et praesertim correctiones, quas dedit Academia Scientiarum Regia, male quidem, cum illo, improbans usum observationis Eclipsium Lunae aut Satellitum Jovis pro constituendis locorum longitudinibus, alia tamen fortasse monens notatu digna. Nam Vossius, quem sequitur, erat in Geographia valde versatus, habueratque in manu itineraria navigationum Societatis Indicae Batavae, et varia etiam Hodoeporica aut Diaria Itinerum Anglicana nondum edita, quemadmodum mihi Boylius olim confirmavit. Accepi etiam Samsonium, doctum apud Gallos Geographum, Tabulis ex Academiae Regiae sententia concinnatis contradicere. Ego non dubito praeferre judicium Academiae in rebus primariis; puto tamen inventorum Vossii et Samsonii aliquam fortasse rationem alicubi habendam. Cassinus alicubi dixit, Regem misisse Astronomos Alexandriam, ut observationes illic instituant comparandas cum observationibus Ptolemaei. Scire operae pretium esset, quid illi attulerint.

Dn. Abbas Bignonius collegium quoddam institui curavit, cujus membra occupantur descriptionibus variorum opificiorum, quod ego institutum perutile esse judico, et nosse velim, quem habuerit progressum. Vel sola descriptio manuficiorum ad rem vestia-

riam pertinentium rem mechanicam et mathematicam plurimum augeret.

Conscripserat olim Dn. Mariottus libellum mechanicum in usum Ingeniariorum, in quo proponebat experimenta ad praxin utilia, v. g. quantum pondus sustineant tigna, scalae, saxa, aliaque id genus. Libellus iste nunquam fuit editus, quod Autor morte praeventus esset; non dubito tamen, quin in nonnullorum versetur manibus. Si posset impetrari, ego libenter sumptus persolverem.

Optime facis et ex condicto, quod novam differentiandi rationem per summas differentiuncularum premis; quod si forte urgeat Dn. Marchio Hospitalius, poteris eum remittere ad me. Miror eum tam inaequali ratione cum amicis agere, ut nunc magni eos facere, nunc eorum oblivisci videatur. Dn. Fratrem Tuum praestat ad alia potius quaerenda adhuc flecti; nam si detegeret, fortasse statim in lucem protruderet, ut fecit in Methodo directa pro lineis maximum praestantibus, quam alias fortasse nondum nosset Dn. Hospitalius.

In Dno. Varignonio laudandum est, quod agnoscere videtur quantum Tibi debeat, officiisque id testari pergit: dispicies tamen, an non plurimum ad hoc conferat ipsa ejus in hac nova methodo mediocritas. Quod si tantum profecisset, quantum Dn. Marchio Hospitalius, fortasse et ipse minorem Tui curam gereret. Nolim hoc pro certo asseverare, ne Viro fortasse candido injuriam faciam; sed vereor tamen valde, ne sit caeteris plerisque similis, praesertim Gallis.

Agnosco ex ejus responsione, Te quaedam ad ipsum scripsisse profunda et ingeniosa de corporibus varie infinitis. Videor mihi intelligere mentem Tuam, saepeque de istis deliberavi, sed nondum tamen adhuc pronuntiare audeo. Fortasse infinita, quae concipimus, et infinite parva imaginaria sunt, sed apta ad determinanda realia, ut radices quoque imaginariae facere solent. Sunt ista in rationibus idealibus, quibus velut legibus res reguntur, etsi in materiae partibus non sint. Quod si statuimus lineas reales infinite parvas, consequitur etiam statuendas esse rectas utrimque terminatas, quae tamen sint ad nostras ordinarias, ut infinitum ad finitum; quo posito, sequitur esse punctum in spatio, ad quod hinc nullo unquam tempore assignabili per motum aequabilem perveniri possit; oportebitque similiter concipere tempus utrinque ter-

minatum, quod tamen sit infinitum, atque adeo dari quoddam genus aeternitatis, ut sic dicam, terminatae; sive posse aliquem vivere, ita ut nullo unquam assignabili annorum numero moriatur, et tamen aliquando moriatur; quae omnia ego, nisi indubitatis demonstrationibus coactus, admittere non ausim. Reale infinitum fortasse est ipsum absolutum, quod non ex partibus conflatur, sed partes habentia, eminenti ratione et velut gradu perfectionis comprehendit. Si daretur aliquid perfecte rigidum, et perfecte aequabile, haberentur sane, quae nos concipimus in nostra Geometria; sed vereor ut natura haec patiatur. Interim laudo ingenii Tui vim ad abstrusissima eruenda promtam. Si quando colloqui dabitur, fortasse multa adhuc mira circa rerum summam et principia a me audies, quae habeo pro demonstratis. Nunc vale et fave. Dabam Hanoverae 7 Junii 1698.

LXXVI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postremas Tuas accepi, cum nuper in Batavis essem, ad quos animi gratia trajeceram, ut ibi partem feriarum transigerem. Placet modus, quem excogitasti, parandi Vinometrum per elasticitatem aëris, sed nescio an in praxi tam utile esset, quam in theoria ingeniosum; quomodo enim dentes adaptares instrumento, ut laxationes et constrictiones aëris ostenderet? praeterquam quod, ut ipse animadvertis, multo liquore detracto, columnarum altitudo notabiliter non minuitur. Hoc cum legerem, statim mentem subiit, an non melius intentum obtinere liceret, ope phialarum liquore semiplenarum, quibus Boylaeus, ni fallor, primus ostendere solebat pressionem columnarum. Ita ergo phialae ex. gr. (fig. 125) quatuor A, B, C, D parari possent, ut, dolio existente pleno, omnes demersae haererent in fundo; detracto vero liquore, ex. gr. usque ad $\alpha\alpha$, tunc phiala prima A (aëre in illa, ob diminutum pondus columnae, sese expandente et liquorem per orificium apertum expellente) jam levior facta sursum peteret, reliquis B, C, D ob gravitatem adhucdum praepollentem in fundo manentibus. Sin autem porro liquor ex dolio emitteretur ad $\beta\beta$, tunc B ascenderet; sic subsidente ad $\gamma\gamma$, emergeret C, et tandem

ubi ad $\delta\delta$ perventum esset, eniteretur D. Redimpleto dolio phialae in superioribus natabunt, nec fundum repetent, nisi vi eo detrudantur. Pronunciaturus itaque, quantum liquoris ante redimpletionem fuerit exemtum, respicerem tantum ad numerum phialarum in summo natantium, ex. gr. trium A, B, C; unde conluderem tantum ad minimum fuisse exhaustum, quantum continetur in spatio $\gamma S \gamma$. Interim quo minores essent differentiae columnarum, cum quibus phialae sunt aequilibratae, et quo plures essent talium phialarum, eo accuratius detracti quantitatem explorare possemus. Postea alii modi complures idem praestandi, sine elasticitate aëris, mihi inciderunt, e quibus duos hic apponam, qui effectu faciles mihi videntur. Concipe (fig. 126) tubum recurvum A, ab utraque parte apertum et liquore plenum, ita imitti in dolium plenum, ut orificium cruris brevioris pertingat ex. gr. ad superficiem imaginariam $\alpha\alpha$. Jam finge detrahi aliquid liquoris ex dolio, patet utique, quod quamdiu orificium cruris brevioris intra liquorem latet, tamdiu totus tubus plenus manebit, sed statim ac liquoris superficies infra orificium seu infra superficiem imaginariam $\alpha\alpha$ subsiderit, tunc omnis liquor, qui in superemineuti parte tubi existit, per crus longius descendet, aëre in ejus locum per crus brevius succedente; qui aër, licet dolium postea omnem suum liquorem ad summitatem usque resumat, cum neutrorsum evadere possit, in tubo manere cogitur. Hinc si plures tales tubos recurvos A, B, C, D, quorum orificia crurum breviorum gradatim ascendant, in dolium immiseris, poteris iterum judicare ex numero tuborum aërem continentium, quousque dolium depletum fuerit; vel si malueris loco tot tuborum assumere unicum tubum rectum FE instructum pluribus ramulis inflexis a, b, c, d etc. per minima intervallula a se distantibus, eundem usum obtinebis. Illi enim ramuli, qui semel a liquore evacuati sunt, post redimpletionem dolii, retinebunt in flexuris suis ampullas aëreas. Infimus ergo ramulus, tali ampulla conspicuus, indicabit quousque dolium fuerit exhaustum.

Ecce jam alterum instrumentum, quod mihi in mentem venit. AB (fig. 127) tubus est utrinque apertus, multos habens varices seu tumores excavatos, aemulantes venarum valvulas, quem liquore plenum (poterit autem facile impleri, si primo invertatur, et obturato A, per B infundatur) immitto in dolium liquore pariter plenum. Jam si tantum liquoris ex dolio effluxerit, ut

ejus superficies subsiderit ad $\alpha\alpha$, adeoque etiam omnis liquor, qui in parte tubi supereminente Abc extitit, descenderit, illamque totam cavitatem aër succedens impleverit, manifestum utique est, ob affusum deinde novum liquorem, quo dolium redimpletur, totum quidem tubum AB etiam redimpletum iri, relictis tamen aëre plenis omnibus illis varicibus, qui supra $\alpha\alpha$ existunt; cum enim varicum convexitas sursum spectet, aër qui semel in illos se recepit, a liquore amplius expelli nequit. Ergo et hoc modo infimi varices b, c, aërem continentes, monstrabunt quousque dolium fuerit evacuatum. Hujusmodi Tubus varicosus etiam alibi usum obtinere posset, ex. gr. ad Thermometra conficienda, quae non solum praesentem aëris temperiem, sed etiam praeteritam ostenderent et simul limites summi caloris et summi frigoris. Ut si observator medio Aprilis (quo tempore aëris temperies maxime variabilis) certo quodam die explorare vellet maximum et minimum gradum caloris aëris, seu quantum aër mutari potuerit intra 24 horas, certe continua observatio 24 horas durans, taediosissima esset; imo etiam inutilis, quia experientia docet praesentia hominum, eorum scilicet habitu et continua transpiratione insensibili, aërem ambientem alterari et calefieri hincque liquorem in Thermometris plus justo descendere. Huic igitur duplici incommodo remederi licet, si duo nobis comparemus thermometra, ordinariis similia, excepto quod habeant tubos varicosos, unius varicibus sursum (fig. 128), alterius varicibus deorsum (fig. 129) spectantibus. Illud enim (fig. 128) observatori, licet per totum diem absenti, et sub finem tantum diei observatum redeunti, ostendet maximum descensum liquoris, id est maximum gradum caloris, quem aër illo die habuit; id quod arguere poterit ex infimo varice a aërem includente: alterum vero (fig. 129) determinabit maximum ascensum liquoris seu maximum gradum frigoris, varice nempe summo b pauxillum liquoris retinente. Dum haec scribo, video non opus esse duobus thermometris, unum enim utrumque praestare poterit, si nempe constet tubo contrarios habente varices, ut hic delineatum vides (fig. 130). Caeterum hoc modo explorare possemus limites intensissimi frigoris et ferventissimi aestus totius anni; sed talis eligendus esset liquor, qui in varicibus b, b, b ob modicam quantitatem non exsiccaretur.

Quae me ex Dno. Varignonio quaerere jubes, curabo diligenter, ut ad notitiam perveniant Tuam. Ego etiam legi, quae Vallemon-

tius de Geographicis habet, videtur ideo imprimis impugnare correctiones Academiae Scientiarum, ut tanto liberius depectere possit suum popularem Du Fer, cujus Tabulas istis correctionibus fundatas (ut ait) turpiter traducit. Maximum argumentum quo nititur, est quod dicit, longitudinum differentias per Eclipses determinatas semper justo minores esse, teste experientia, quam refert de certamine Hispanorum et Portugallorum, quorum utrique Japoniam aliasque regiones circa lineam demarcationis a Papa assignatam sitas, in suum Hemisphaerium transtulerunt Eclipsibus nixi.

Gaudeo meam rationem demonstrandi Tautochronismum Hugenianum*) Tibi placere: scire vellem an lucem viderit, aut quid de ea fecerit Dn. Menckenius: si suppressit, per me licet, modo id non fecerit suasore Tschirnhausio: hunc enim pro Judice meo non agnosco. Miror sane Dnum. Menckenium tantum deferre huic Viro ad lapsum adeo proclivi, ut propterea aliorum inventa nihili habeat.

Si Dn. Hospitalium novam differentiandi rationem denuo forte postulantem ad Te remisero, quid quaeso ipsi responsurus es? Proposui**) Fratri meo, aut potius Nonnemini ficto, hujusmodi problemata, ut par pari referrem et ille videret, se non solum tam mirabilia et tam inaudita problemata proponere posse.

Ecce hic methodum meam tam directam quam indirectam***); examina quaeso utramque attente; nunquam enim desistam provocare ad Tuam sententiam. Videbis me uti ellipticula, prout initio conceperam: asserva, rogo, schediasma, ut si forte opus fuerit, Lipsiam id mittere possis, Actis inserendum. Divinare mehercle non possum, quid Frater in meis solutionibus sit cavillaturus, consensu duarum Methodorum tam egregie confirmatis; oportet sane hut ejus solutiones, si a meis abludunt, potius sint falsae; sed Tu ipse optime judicabis.

Prope satis accessisti ad mentem meam de varietate infinitorum; nec ego infinitos infinitorum gradus pro certo asserui, sed conjecturas tantum adduxi, quibus rem possibilem et probabilem esse statui. Et quidem rationem praecipuam hujus

*) Act. Erudit. 1698 p. 267.

**) Journal des Savans 1698 Avr.

***) Siehe die Beilage.

esse, quod nulla sit ratio, cur Deus hunc tantum infinitatis gradum seu hoc quantitatum genus, quae nostra faciunt objecta nostroque intellectui proportionata, voluisset existere cum tamen facile concipere possim, in minimo pulvisculo posse existere Mundum, in quo omnia proportionata sunt huic magno, et contra nostrum mundum nihil aliud esse, quam pulvisculum alius infinities majoris; atque hunc conceptum continuari posse ascendendo et descendendo sine fine: unde nostrum genus quantitatum unicum tantum ex infinitis gradibus efficere; nihil autem esse, quod mihi persuadeat, hunc potius debuisse existere quam alium; quicquid enim afferri potest, illud applicabile fore ad quemvis alium gradum. Ita si ex. gr. concipiam in globulo aëreo mundum formatum, partes habentem nostris hisce proportionatas, Solem, Stellas, Planetas, Terram cum suis incolis, omnesque caeteras quantitates eadem ratione, nempe quod nobis tempusculum unius secundi est, illis fore seriem multorum seculorum, et ita de aliis; interim hos homines iisdem argumentis uti posse ad probandum se solos esse, suum mundum infinitum esse, nihil extra se existere. Sed abrumpo, plures paginae mihi non sufficerent, si deliria mea, suavia quidem mihi, quibus interdum per infinitates illas velificor, hic omnia recensere vellem. Cavebo tamen mihi, ne talia tangam apud Theologos quosdam hujus Civitatis, omnium libere philosophantium osores; haud dubie me ad rogum ablegarent, si tantas haereses a me audirent: ut nuper fere mihi accidit in Disputatione Philosophica publice ventilata, ubi cum incidenter quaestio moveretur de statu corporum nostrorum post resurrectionem, et ego dicerem, eadem numero corpora non resurrectura, quia durante vita singulis momentis alterentur, ita ut forte Corpus nostrum minimam partem substantiae habeat ejus, quam ante annum habuit; unde impossibile esse nos resurrecturos cum omni illa substantia, quae olim successive nostrum corpus composuerit, nisi velimus statuere Giganteam molem tunc nos habituros. Quid autem fit? Ecce pastorculus quidam, cui vox est praeter eaque nihil, bruto zelo animatus, subito contra me insurgens me meamque sententiam vixdum auditam protinus criminari, exagitare, explodere, et ut orthodoxae fidei adversantem damnare et execrari; praeterea in Philosophos novatores (ut vocat) tam inepte, tam insulse instar furiosi debacchari, ut illum phraeneticum catenis ligandum dixisses, si vidisses. Nec hoc sufficit: Ur-

bem totam rumore implet, me esse Socinianum, me docere novam creationem novorum corporum in resurrectione, et nescio quot alias ineptias mihi imputat, quae nunquam in mentem mihi venerunt, reliquis interim Theologastris undique concurrentibus, seque mutuo fideliter succurrentibus. Subsequenti Dominica, suggestus omnes ad Populum resonabant, intonantes horribiliter contra Philosophos seductores studiosae Juventutis (ita nos traducunt) et subversores revelatae veritatis. Necdum quiescunt, aperte et clanculum contra me machinantur quidquid possunt; mugit adhuc surdus tonitrus, perderent me, si per illos staret. Sed vanae sine viribus irae; rideo eorum imbecilles conatus, mecumque rideant quicunque solidiori judicio pollent: sunt etiam Theologi sanioris mentis et profundioris eruditionis, qui suorum Collegarum caecum impetum maxime ex puro, puto, odio in bonas scientias ortum improbant. Habeo etiam superiores ordinis Patronos, qui meas sustinent partes: unde nihil mihi timeo; interim magna cum confusione Theologastrorum,

Superi risere diuque
Haec fuit in toto notissima fabula caelo.

Cum nuper Leyda transirem, Volderum conveni saepius, isque me semel ad prandium invitavit, ubi etiam aliorum aliquorum Professorum Leydensium notitiam et familiaritatem nactus. Intererat convivio Nob. Dn. De Blyswick, Delphensium Consul et Academiae Leydensis Curator, Vir affabilis et generosus, bonorumque studiorum insignis amator et promotor, qui a Te subinde literas accipere et Tibi vicissim scribere mihi dixit: magni Te aestimat: sua quoque officia ultro mihi obtulit, si quondam occasio dabitur. Vidi praeterea illum aliquoties apud alios Professores; sensi illum summum esse Tui admiratorem. Volderus sub discessum meum proponebat mihi difficultatem contra Calculum infinitorum, quam sibi se eximere non posse neque à Nieuwentitio, cui dudum eamdem proposuerat, hactenus enodationem accepisse rebatur, rogans ut ego sibi hac super re satisfacerem, quod etiam libenter promisi, me scilicet satisfacturum, statim ac huc redux factus essem, et revera nudius tertius solutionem ipsi misi. Intellexi quoque, quod a Papini parte stet circa aestimationem virium, dicens a Te gratis supponi corporum elasticitatem; hanc enim corporibus tantum esse accidentalem: si corpora perfecte dura supponantur, Tua ratiocinia amplius locum non habere; duritie perfecta supposita,

sequi ex. gr. quod duo corpora aequalia et aequali celeritate sibi mutuo centraliter concurrentia, non debeant reflecti, sed sisti in ipso momento occursus; et quod generaliter corpora duo perfecte dura cujuscunque molis et cujuscunque celeritatis post conflictum separari non debeant, quia separatio proveniat ab elasticitate, quam autem supponendam dicit. Ego vero, cum temporis angustia non permiserit illum ab opinione sua deflectere ore tenus, ipsi promisi copiam excerptorum ex literis Tuis meisque hac de materia agentibus, ut videat quid me impulerit ad amplectendum Tuas partes. Hagae-Comitum vidi Dn. Dierquens, Praesidem in Curia Brabantiae: etiam hic multa civilitate me affecit. Dn. Bellavallius mihi ostendit Logogryphum aliquod, sibi a Dno. Hugenio, dum viveret, depositum, suo tempore clavem missuro: morte autem occupatus id non praestitit. Dnns. Dierquens et ego ipsi consuluimus, ut tamen ederet, quale accepisset. Nactus sum Hagae Cosmotheoron Hugenii, recenter praelo enixum. Vale et fave etc.

Groningae d. 5 Julii 1698.

P. S. Dn. Varignonius a me rogatus de Vinometri artificis Parisiens. statu et pretio, sequentia reposuit in literis heri acceptis: „L'autheur du Vinometre nous dit en nous le montrant à „l'Academie, qu'il avoit ordre d'en faire deux mille à 5 liv. cha-„qu'un pour les fermiers generaux. Ainsy vous voyez qu'il sera „facile d'en avoir un désque vous voudrez; mais il ne le sera „pas de vous la faire tenir, sa longueur étant double du grand „diametre du tonneau ou elle doit servir: j'en feray faire un des-„sein que je vous envoyeray. Il y a aussy icy un autre Horloger „qui m'a dit avoir trouvé une machine pour tailler les fusées des „montres suivant les forces des ressorts qui doivent agir contre „elles: il m'en a promis une description avec un dessein, mais à „condition que je les feray mettre dans les Actes de Leipsic. Si „vous voulez, je vous les envoyeray etc."

Beilage.

Joh. Bernoullii Solutio Problematis Isoperimetrorum duplici methodo inventa.

Problema.

Ex omnibus curvis isoperimetris super axe determinato BN (fig. 131) descriptis quaeritur illa BFN, cujus applicatae FP ad

datam potestatem elevatae seu generaliter earum quaecunque functiones per alias applicatas PZ expressae faciant spatium BZN omnium, quae ita fieri possunt, maximum. Seu quod eodem recidit: Data curva BH super axe BG normali ad BN determinare curvam BFN, cujus applicatae FP productae ad Z, ita ut $PZ = GH$, faciant spatium BZN maximum omnium eorum, quae hoc modo fieri possent a quibuscunque aliis curvis super BN descriptis et ejusdem longitudinis cum BFN.

Solutio.

Sit $BF\varphi$ (fig. 132) pars curvae quaesitae, $BZ\zeta$ pars curvae ex illa progenitae secundum applicatas curvae datae BH. Concipio $FO\varphi$ elementum curvae $BF\varphi$ tanquam compositum ex duabus lineolis rectis FO et $O\varphi$, ut et huic respondens $ZL\zeta$ elementum curvae $BZ\zeta$ tanquam compositum ex duabus lineolis rectis ZL et $L\zeta$. Jam vero quoniam tota curva praestans aliquod maximum etiam ejusdem maximi leges servat in singulis suis partibus, sequitur quod si ex punctis F et φ inflectantur utcunque duae aliae lineolae $F\omega$ et $\omega\varphi$, quae simul sumtae sint aequales $FO + O\varphi$, atque si ex illis eadem lege formentur $Z\lambda$, $\lambda\zeta$, qua ex FO, $O\varphi$ formatae sunt ZL, $L\zeta$; sequitur, inquam, quod spatium $ZP\pi\zeta L$ sit majus, quam omne aliud $ZP\pi\zeta\lambda$. Ut igitur requisitam dispositionem lineolarum FO, $O\varphi$ maximum praestantium inveniam et exinde naturam totius curvae $BF\varphi$, concipio focis F, φ et longitudine fili $FO\varphi$ descriptam ellipticulam, et in ea duo puncta O et ω incomparabiliter sibi vicina seu quorum distantia $O\omega$ sit infinities minor quam distantia focorum F, φ, licet haec ipsa $F\varphi$ jam per se sit infinite parva, utpote subtensa elementi curvae $BF\varphi$: adeoque ex natura maximi erunt duo spatia $ZP\pi\zeta L$ et $Z\pi\zeta\lambda$ inter se aequalia, unde ablato communi remanebit triangulum ZLY = triangulo $\zeta\lambda Y$, seu ducendo parallelos LO, $\lambda\omega$ (neglectis particulis infinities minoribus LYM et $Y\lambda\mu$) triangulum $ZLM =$ triangulo $\zeta\lambda\mu$; id est ductis axi parallelis ZC, ζD, ut et FI, φK erit $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$: quoniam vero LM est differentia linearum LR et MR, ut et $\lambda\mu$ differentia $\lambda\varrho$ et $\mu\varrho$ atque cum LR, MR; $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$ sint functiones suarum respective RO, RT; $\varrho\omega$, $\varrho\Theta$; repraesentabit LM differentiam functionum inter RO et RT, atque $\lambda\mu$ differentiam functionum inter $\varrho\omega$ et $\varrho\Theta$) (NB. differentia autem functionum duarum linearum ut RO, RT quantitate infinities-infinite parva TO se excedentium reperitur differentiando

simpliciter functionem R O et quod provenit, omissis differentialibus, multiplicando per T O. Ex. gr. si R L functio ipsius R O esset tantum ejusdem R O potestas n, in quo consistit casus fraternus, id est si curva data B H esset parabola gradus n, tunc L M seu $RO^n - RT^n$ foret $nRO^{n-1} \times TO$: ita etiam si curva BH esset circulus, cujus radius $= a$, tunc L M seu $\sqrt{2aRO - RO^2} - \sqrt{2aRT - RT^2}$ foret $\frac{a - RO}{\sqrt{2aRO - RO^2}} \times TO$; et ita de caeteris. Notetur autem generaliter differentia functionum RO, RT hoc signo $\mathrm{D}RO \times TO)$ ideoque cum $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, erit $FI \times \mathrm{\bar D}RO \times TO = \varphi K \times \mathrm{\bar D}\varrho\omega \times \Theta\omega$. Jam centris F et φ concipiantur arculi minimi X O et $\xi\omega$, qui per naturam ellipseos sunt aequales inter se, adque T O ad $\Theta\omega$ ut secans ang. X O T seu I F O ad secant. aug. $\xi\omega\Theta$ seu $K\varphi\omega$; est vero etiam F I ad φK ut $FO \times \sin FOI$ ad $\varphi\omega \times \sin \varphi\omega K$; ergo si loco FI, φK et TO, $\Theta\omega$ sumantur eorum porportionalia, erit $FO \times \sin FOI \times \sec IFO \times \mathrm{\bar D}RO = \varphi\omega \times \sin\varphi\omega \times K \times \sec K\varphi\omega \times \mathrm{D}\varrho\omega$; sed quoniam, ut constat ex natura sin. sec. et tangentium, sin $FOI \times \sec IFO =$ quadrato sinus totius $=$ sin $\varphi\omega K \times \sec K\varphi\omega$, erit $FO \times \mathrm{\bar D}RO = \varphi\omega \times \mathrm{\bar D}\varrho\omega$: seu si loco RO sumatur aequipollens PF (quae licet differat ab R O particula infinite parva I O, censetur tamen in speculatione curvarum non solum ut ipsi aequalis, sed prorsus tanquam eadem; quamdiu enim curvae particula infinite parva F O consideratur ut lineola recta, tunc singulae applicatae inter P F ex. R O, cum legem mutationis curvaturae nondum subeant, haberi possunt pro una eademque applicata, quasi nempe singulae ipsi P F absolute essent aequales: eodem modo quia $\omega\varphi$ considero ut rectam lineolam, singulae applicatae inter $\varrho\omega$ et $\pi\varphi$ utpote legem mutationis curvaturae pariter non subeuntes possunt pro se invicem sumi adeoque eaedem poni cum $\pi\varphi$) si igitur, inquam, loco R O sumatur aequipollens PF et loco $\varrho\omega$ aequipollens $\pi\varphi$, habebitur $FO \times \mathrm{\bar D}PF = \varphi\omega \times \mathrm{\bar D}\pi\varphi$ adeoque $\mathrm{D}PF$ ad $\mathrm{\bar D}\pi\varphi$ ut $\varphi\omega$ (φO) ad FO ut sin $OF\varphi$ ad sin $O\varphi F$ et permutando $\mathrm{\bar D}\,PF$ ad sin $OF\varphi$ ut $\mathrm{\bar D}\pi\varphi$ ad sin $O\varphi F$. Hinc cum $F\varphi$ sit subtensa arcus curvae infinite parvi $FO\varphi$, adeoque angulus $OF\varphi$ et $O\varphi F$ haberi possit pro semisse anguli curvedinis in F et φ, erit DPF ad sinum curvedinis in F ut $\mathrm{D}\pi\varphi$ ad sinum curvedinis in φ, hoc est, in ratione constanti.

Problema itaque ad pure analyticum redactum huc redit, ut quaeratur curva BFφ ejus naturae, ut sinus curvedinis in singulis punctis F sit ad functionem differentiatam (neglecta differentiali) suae respective applicatae PF in ratione constante. Hoc autem facile solvitur sic: Esto BF (fig. 133) curva quaesita, cujus elementum quod pro constanti assumo $Fl = dt$, $BP = y$, $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$, concipiatur Fm tangens in $F = Fl$, adeoque lFm angulus curvedinis, cujus sinus lm: sit porro $mn = ddx$, et $nl = ddy$. Quia itaque (ob triangula similia) $lC . Fl :: nl . ml$, reperietur $ml = \frac{dt\, ddy}{dx}$; cum vero ex natura curvae requisita ml ad $\dot{D}$FP se habeat in ratione constante, faciamus $\frac{dt\, ddy}{dx} . \dot{D}x :: dt . a$, quod hanc suppeditat aequationem $a\, ddy = \dot{D}x\, xdx$; jam autem $\dot{D}x\, xdx$ utpote ipsissima functio differentiata, si iterum summatur, dabit functionem ipsam seu GH; sit ergo haec $GH = X$ (compositae ex x et datis quomodocunque) sumtis itaque integralibus aequationis modo inventae, proveniet $a\, dy = X \pm C$, vel suppletis homogeneis per constantem dt, $a\, dy = X dt \pm C dt$ (NB. per C intelligo quantitatem constantem et arbitrariam, qua integrale cujusvis differentialis augere vel diminuere licet) sumto utrobique quadrato $aa\, dy^2 = dt^2 \times \square\, \overline{X \pm C} = \overline{dx^2 + dy^2} \times \square\, \overline{X \pm C}$, et reducta aequatione habebitur tandem $dy = \frac{dx \times X \pm C}{\sqrt{aa - \square\, \overline{X \pm C}}}$. Ut vero simplicissima curva reperiatur (sufficit enim unam exhibuisse, quae satisfacit) ponatur $C = o$, et erit $dy = \frac{X dx}{\sqrt{aa - XX}}$ proindeque sumta integrali $y = \int \frac{X dx}{\sqrt{aa - XX}}$, dico curvam hac constructione descriptem quaesito esse satisfacturam. Coroll. Quoniam posito $C = o$, $a\, dy = X dt$, erit $dy . X :: dt . a$; est autem posita dt constante, dy sinus anguli BFP, adeoque sinus anguli BFP est ad X (GH) ut dt ad a, id est in ratione constante. Jam vero si BF est brachystochrona, et BH curva, cujus applicatae GH denotant celeritates in F, ostendi (Act. Lips. m. Maj. 1697) tunc sinum anguli BFP esse ad GH in ratione constante: unde discimus unam eandemque curvam BF duplici officio simul satisfacere

posse, quippe quae $\int X\,dx$ maximum et simul $\int \frac{dt}{X}$ minimum facit; sed hoc non obtinet, si C non est $= 0$; adeo ut si curva quaepiam faciat $\int \frac{dt}{X}$ minimum, necessario etiam factura sit $\int X\,dx$ maximum, sed non vice versa.

Problema II.

Iisdem positis, si PZ (fig. 131) jam sit ut functio data ipsius arcus BF, quaeritur determinatio curvae BFN.

Solutio.

Iisdem vestigiis insistendo res facile expedietur. Erit enim semper (fig. 132) triangulum $ZLY =$ triangulo $\zeta\lambda Y$ seu $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$; jam vero $LM\,(LR - MR)$ est differentia functionum duorum arcuum BFO et BFT, ut et $\lambda\mu$ $(\lambda\varrho - \mu\varrho)$ differentia functionum duorum arcuum $BF\omega$ et $BFO\Theta$. Atque hae functionum differentiae eodem modo reperiuntur, ut supra dictum, multiplicando scilicet differentiatam simpliciter functionem neglecta differentiali per differentiam duorum arcuum BFO, BFT, nempe per TX, adeoque loco $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$ scribendum est $FI \times \bar{D}BFO \times TX = \varphi K \times \bar{D}BF\omega \times \Theta\xi$. Quoniam nunc per naturam ellipseos OX et $\omega\xi$ sunt inter se aequales et proinde TX ad $\Theta\xi$ ut tangens ang. IFO ad tang. $K\varphi\omega$, est vero iterum FI ad φK ut $FO \times \sin FOI$ ad $\varphi\omega \times \sin \varphi\omega K$; ergo si loco FI, φK et TX, $\Theta\xi$ sumantur eorum proportionalia, erit $FO \times \sin FOI \times \text{tang.} IFO \times \bar{D}BFO = \varphi\omega \times \sin \varphi\omega K \times \text{tang.} K\varphi\omega \times \bar{D}BF\omega$; sed quoniam, ut constat, ex natura sinuum, tang. et secant. $\sin FOI \times \text{tang.} IFO =$ rectangulo inter sinum totum et sin IFO, ita etiam $\sin \varphi\omega K \times \text{tang.} K\varphi\omega = \text{sin. tot.} \times \sin K\varphi\omega$, erit ergo $FO \times \sin IFO \times \bar{D}BFO = \varphi\omega \times \sin K\varphi\omega \times \bar{D}BF\omega$, seu si loco BFO sumatur aequipollens BF, et loco $BF\omega$ aequipollens $BF\varphi$, habebitur $FO \times \sin \times IFO\,\bar{D}BF = \varphi\omega \times \sin K\varphi\omega \times \bar{D}BF\varphi$; adeoque $\sin IFO \times \bar{D}BF$ ad $\sin K\varphi\omega \times \bar{D}BF\varphi$ ut $\varphi\omega$ (φO) ad FO ut $\sin OF\varphi$ ad $\sin O\varphi F$, et permutando $\sin IFO \times \bar{D}BF$ ad $\sin OF\varphi$ ut $\sin K\varphi\omega \times \bar{D}BF\omega$ ad $\sin O\varphi F$ in ratione constante. Problema itaque jam analyticum factum eo recidit, ut quaeratur curva $BF\varphi$ hanc habens proprie-

tatem, ut sinus curvedinis in quovis puncto F sit ad sin IFO×DBF in ratione constanti. Hoc ut solvatur, positis ut prius (fig. 133) BP = y, PF = x, BF = t, Pp = dy, Cl = dx, Fl vel Fm = dt; functio data arcus BF = v, erit $ml = \frac{dt\,ddy}{dx}$; faciamus itaque secundum proprietatem curvae modo inventam $\frac{dt\,ddy}{dx} . dx \times Dv \left(\frac{dv}{dt}\right) :: dt . a$, unde haec aequatio $\frac{a\,ddy\,dt}{dx^2} = dv$ seu $\frac{a\,dt\,ddy}{dt^2 - dy^2} = dv$, sumtisque integralibus $\int \frac{a\,dt\,ddy}{dt^2 - dy^2} = v$, seu quia a et dt sunt constantes, potest simpliciter poni $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$, quae itaque aequatio determinat naturam curvae quaesitae.

Scholium.

Haud majori difficultate hac methodo determinare possemus curvam BFφ, si desideraretur ut PZ (fig. 131) esset functio composita pro lubitu ex functionibus non arcus tantum BF vel applicatae PF, sed utriusque simul quomodocunque inter se complicatae. Eo enim tandem semper pervenitur, ut sinus curvedinis in quovis puncto F sit ad certam quandam quantitatem in ratione constante; unde problemate hoc modo ad pure analyticum redacto, facile deinde aequatio naturam curvae exprimens obtinetur. Hac eadem methodo solvi etiam possunt curvae catenariae, ut et brachystochronae, quarum omnium solutiones egregrie conspirant illis, quas olim diversis methodis inventas dedimus: id quod non parum hujus methodi bonitatem commendat.

Caeterum cum haec directa sit, placet adjungere indirectam, a natura pressionis liquorum desumtam, quae eandem omnino dabit solutionem; quo methodorum directae et indirectae tam mirabili consensu mirifice confirmabimus de illarum certitudine. Esto (fig. 131) BFN linteum a liquore stagnante uniformis sive non uniformis gravitatis expansum, evidens est illud eam induere curvaturam, quae liquori maximum concedat descensum. Hoc autem tunc continget, quando omnium particularum totius liquoris gravitationes simul sumtae faciunt maximum (NB. non dico quando centrum gravitatis liquoris est in infimo loco, hic enim non potest considerari

centrum gravitatis, siquidem variante curvatura BFN, licet isoperimetra, variat tamen etiam ipsa quantitas liquoris sub illa contenta, adeoque non esset centrum gravitatis unius ejusdemque liquoris) gravitatio autem particulae cujusvis aestimatur a pondere incumbente filamenti liquoris; per gravitationem itaque intelligo vim, qua superficies aliqua imaginaria in liquore horizonti parallela ab incumbentis pondere deorsum urgetur. Jam vero distinctum concipiatur spatium BFN in sua filamenta per applicatas verticales PF, pl etc. sitque linea BL, cujus applicatae GL denotent gravitationes liquoris in altitudine BG seu PF, id est cujus applicatae ex. gr. GL et ED ostendant rationem, in qua liquoris particula FC in profunditate PF magis gravitet seu magis prematur ab incumbente pondere filamenti PFCp, quam aequalis particula Mn in profunditate PM premitur ab incumbente pondere filamenti PMnp. Cum ergo LG denotet gravitationem particulae FC reliquarumque omnium, quae sunt in eadem profunditate seu quae sunt in recta GC prolongata: pariterque cum singulae reliquarum applicatarum DE denotent gravitationem particulae Mn caeterarumque, quae sunt in recta prolongata EM: omnes utique applicatae simul sumtae, hoc est spatia BLG, BDE designabunt omnes gravitationes (non dico gravitates) simul sumtas particularum, quae sunt in filamentis PFCp, PMnp. Ideoque si fiat alia curva BH, cujus applicatae GH sint ut respective spatia BLG, atque si ad P applicentur PZ = GH, habebitur nova curva BZN, cujus applicatae PZ exhibebunt summas gravitationum particularum in suis respective filamentis PFC; et proinde summa applicatarum PZ, id est totum spatium BZN repraesentabit gravitationes omnes omnium particularum totius liquoris linteo BFN contenti. Si quidem igitur linteum talem capiat figuram, ut gravitationes omnes simul sumtae, hoc est spatium BNZ faciat maximum, evidens utique est, si adhiberetur liquor gravitatis continue difformis hac lege, ut LG, DE seu gravitationes particularum in profunditate F, M essent in ratione differentialium applicatarum HG (quae scilicet in problemate fraterno designant functiones ipsarum PF) evidens, inquam, est, quod tunc curvatura lintei exhiberet eam ipsam curvam, quam Frater pro potestatibus tantum ipsarum PF mihi quaerendam proposuit, ego vero generaliter pro quavis functione per methodum directam resolvi. Ut igitur hujus methodi directae cum indirecta consensum demonstrem, placet indagare naturam

curvaturae lintei, a liquore ea, qua dixi, ratione gravitationes variante onerati, quod si in eandem incidero aequationem supra inventam, quis, quaeso, de infallibilitate methodorum tunc dubitare audeat? Hic quidem statim occurrit casus facillimus, qui primo discutiendus est, nempe si liquor sit ordinarius seu gravitatis uniformis, hoc est si gravitationes LG, DE sint ut ipsae profunditates BG, BE, adeoque linea BL sit recta, et BH parabola communis, tunc BFN erit ordinaria curvatura lintei, quam etiam Frater suae elasticae tribuit quaeque exprimitur, ut jam olim reperi, conveniente Fratre per hanc aequationem $y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Jam vero si in aequatione generali per directam methodum supra inventa $y = \int \frac{X\,da}{\sqrt{aa - XX}}$ ponatur loco generalis functionis X casus particularis xx, qui hic supponitur, provenit $y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{aa - x^4}}$ seu suppletis homogeneis $y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; ergo constat hac in parte methodorum consensus.

Sin autem pro generali lege gravitationis liquoris, hoc est existente curva BDL quacunque, invenire lubeat naturam curvaturae lintei BFN, id quidem praestari potest per methodum, qua olim usus sum ad indagandam curvam velariam, quae praecipue consistit in eo, ut directio pressionis liquoris, quae ubique normalis est, ad curvam consideretur tanquam composita ex duabus pressionibus collateralibus horizontali una et verticali altera, atque ex utraque separatim sumta quaeratur lintei tenacitas requisita in imo puncto seu vis, qua linteum in imo puncto secundum tangentem extenditur. Cum autem absoluta illa vis constans sit, in quocunque puncto curvaturae suae linteum suspendatur vel si mavis clavo figatur: hinc aequando, quod provenit, cum quantitate constante ad arbitrium assumta (eodem modo, ut olim pro funicularia feceram) obtinebitur eadem aequatio, quam supra per methodum directam erui. Iste autem modus procedendi quamvis legitimus, prolixior tamen est nec tam naturalis, quam alter ille, quem brevi abhinc excogitavi quemque proin hic fusius exponam. Quoniam quaelibet lintei particula FI urgetur secundum FI directionem normalem ad curvam a pondere filamenti incumbentis seu

a gravitatione particulae liquoris F C, quae gravitatio exprimitur per L G: curva B F N erit utique eadem cum illa, quae fieret si conciperem (fig. 134) filum B R F S T etc. distendi a potentiis in singulis punctis R, F, S, T etc. normaliter applicatis R_1, F_2, S_3, T_4 etc. et ipsis E D, G L, V K etc. proportionalibus. Hanc autem curvam adeoque et lintei curvaturam eandem esse cum illa supra per methodum directam inventa, ita facile ostendo: concipiatur curva ut polygonum infinitorum laterum B R, R F, F S, S T etc. quae producta faciunt angulos a R F, b F S, c S T etc. designantes nempe curvae curvedines in punctis R, F, S, T etc. Jam vero ex Mechanicis constat, potentiam pellentem 1 R esse ad potentiam sustinentem, seu quod idem est, ad vim tenacitatis requisitae fili in puncto quovis intermedio l inter R et F, ut sin a R F ad sinum F R l, id est ad sinum totum; et pariter potentiam sustinentem in l ad potentiam pellentem 2 F, ut sin 2 F m seu sinus totus ad sin b F S, ergo ex aequo pot. 1 R ad pot. 2 F, ut sin a R F ad sin b F S. Eodem modo demonstratur pot. 2 F, ad pot. 3 S ut sin b F S ad sin c S T, et ita porro: ergo iterum ex aequo pot. 1 R ad pot. 3 S ut sin a R F ad sin c S T, et permutando sin c S T ad pot. 3 S (K V) ut sin a R F ad pot. 1 R (D E): hoc est sinus anguli curvedinis in quovis puncto R se habet ad D E, quam diximus repraesentare functionem differentiatam ipsius B E, in ratione constante. Hanc vero proprietatem per methodum directam quoque supra invenimus. Ergo curvatura lintei et Isoperimetrorum est una eademque curva, hoc est, methodus directa et indirecta se mutuo confirmant. Q. E. D.

LXXVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

A deprecatione (quod mireris) cogor incipere literas. Infelicitate quadam singulari, non sine culpa tamen mea, Tuae novissimae periere. Cum acciperem, in eo eram ut Herrenhusam irem, ubi Aula nostra est extra urbem, quod altera die summo mane discessura esset Electrix Brandeburgica, Aulaque Cellensis. Tuas igitur obiter inspectas mecum sumo, lecturus in itinere.

Forte supervenere, quae alio verterent mentem; sub noctem reversus recordatusque requiro, et magna cum perturbatione nusquam reperio. Quaesivi anxie, praemium etiam reperturo spondere jussi; hactenus frustra. Oportet sacculo excidisse, qui togae assutus est, forte dum egredior ingrediorve currum. Cum igitur nihil aliud relictum sit mihi, quam ut ad veniam a Te petendam recurram, pro gratiae factae iudicio habebo, si denuo ad me redeant, quae amisi. Schediasma enim Tuum solutionem Fraterni Problematis complexum videram, non legeram, sed et quae de machinulis Barometris, occasione Oenometri Parisini meaeque designationis disserebas, inspecta magis fuere, quam lecta, quod figurarum consideratione esset opus.

Gaudeo innotuisse Tibi Dominum de Bleswyck, Consulem Delphensem et Curatorem Leidensis Academiae, Virum praeclarum eumque mei benevole meminisse. Quod Dnus. Volderus de Calculo differentiali dubitat, magis miror, quam quod de virium aestimatione a nobis dissentit. Ego ipse olim adolescens, cum de Legibus motus scriberem Libellum, in ea eram sententia, quae nunc est Dni. Volderi, duo Corpora aequalia et aequivelocia sua natura post concursum directum non debere reflecti, sed potius se sistere mutuo. Idque etiam sequitur ex vulgari notione materiae, cum nempe nihil aliud in ea concipitur, quam extensio et ἀντιτυπία seu impenetrabilitas. Sed ex his ipsis et similibus postea agnovi, longe aliam esse naturam materiae in systema mundi redactae, quam vulgo creditur, et vim elasticam omni corpori esse essentialem, non ita quasi ea vis sit aliqua qualitas inexplicabilis, sed ex eo quod omne corpus, utcumque parvum, est machina, ex cujus structura resilitionem, ubi opus ea est ad virium conservationem, oriri oportet. Haec autem mira videri non debent consideranti actualem cujusque materiae partis divisionem in partes omnem numerum excedentes. Haec an, cum multa a me salute, Dno. Voldero significare velis, in Tua est manu. De caetero rem gratam facies, si communicabis, quae Dno. Voldero scripsisti scribesve, aut ab illo recipies.

Mirum non est, Dnum. Nieuwentiit ipsi non satisfecisse circa Calculum differentialem, quem ab eo ipso non satis profunde penetratum constat. Cujus rei indicium fuit, quod nihil de suo potuit praestare; an nunc magis profecerit, res docebit.

Si Dnum. Marchionem Hospitalium novam Methodum diffe-

rentiandi postulantem, ut aequum est, ad me remittas, isque (quod vix facturum credo) apud me pulset, deliberandi adhuc locus erit.

Ex actuali divisione sequitur, in quantulacunque parte materiae velut mundum esse quemdam constantem ex innumeris creaturis; sed illud adhuc quaeritur, an ulla usquam portio detur materiae, quae ad aliam portionem habeat rationem inassignabilem, seu an detur linea recta utrinque terminata, sed quae tamen ad aliam rectam habeat rationem infinitam vel infinite parvam. In Calculo haec utiliter assumimus; sed hinc non sequitur extare posse in natura. Res igitur altioris est indaginis.

Nihilne apud Batavos intellexisti de edendis Posthumis quibusdam elaborationibus Hugenianis, praesertim Cosmotheoro per sidera ambulante, quem absolutum aut pene absolutum acceperam, itemque de Dioptrica dudum promissa?

Gratissima aliquando erunt, quae, ut spero, ad Quaestiones meas, Te parario, respondebit Varignonius. Ego quidem Isaaco Vossio et Vallemontio longitudinum determinationem per Eclipsium observationes factam impugnantibus minime omnium assentior; fieri tamen potest, ut ab Observatoribus ad loca remota tendentibus errores graves subinde sint admissi, et memini, Anglos fidem derogare Observationibus quibusdam Jesuitarum Gallorum ad Siamense regnum ante annos aliquot tendentium. Talia ergo cum sint facti, diligentem merentur discussionem. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{1}{2}\frac{2}{2}$ Julii 1698.

LXXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Groningae d. 23 Jul. st. v. 1698.

Doleo profecto jacturam literarum mearum novissimarum non ob rei pretium, sed ob ingratum redescribendi laborem mihi molestissimam. Vereor ne a quopiam reperiantur, qui Tibi redditurus non sit; nollem enim ab alio legi ea praesertim, quae Tibi narraveram de quibusdam Pastoribus nostris. Ecce repeto quae

disserueram de Vinometris construendis, eorum enim pro more meo descriptionem asservavi etc. *).

Haec Tibi scripseram circa Vinometra; caeterum simplicissime res confici posset ope tubi communis ab utraque parte aperti, qui in inferiore extremitate adaptatam haberet valvulum intus foras spectantem. Ex. gr. (fig. 135) AB esset tubus ab A et B apertus, c valvula exacte congruens orificio B; hunc tubum liquore plenum immitterem in dolium plenum, ex quo si emittatur liquor donec subsiderit ad $\alpha\,\alpha$, descendet liquor in tubo ad eundem terminum D, quia libere per B egredi potest: jam autem si iterum redimpleatur dolium (cavendum tamen ne aliquid per A ingrediatur) valvula c obstabit regressui liquoris, ita ut post redimpletionem tota pars AD a liquore vacua mensura sit; visurus ergo quantum liquoris sit extractum, superinducto pollice orificio A tubum AB eximerem ex dolio et pars vacua AD mihi indicaret descensum liquoris in dolio.

Adjeci, quia petis, excerpta ex literis ad Volderum scriptis **); videbis an ad objectionem ipsius sufficienter responderim. Jam coram ipsi dixeram, quod mihi jam scribis ipsi significandum, Te scilicet praeter extensionen et impenetrabilitatem tertium quid requirere ad essentiam corporis, quod consistat in vi ingenita ad conservationem virium, unde necessario vim elasticam omnibus corporibus ex natura sua competere. Ille autem regessit, Te aliquid statuere, quod concipere non possis, an illud tertium sit substantia an modus? Si modus, nihil novi esse; sin substantia, an spiritus an corpus? aut forte tertium? hoc autem tertium explicari non posse, nisi cum veteribus ad formam substantialem diu explosam recurrere velis. Ego quidem ipsi respondi, sufficere experientiam nos docere, corpora quo duriora, tanto perfectiorem habere vim elasticam: hac autem posita facile posse demonstrari quantitatem virium conservari, non vero quantitatem motus Cartesianam, nisi in certis casibus. Illa autem vis elastica an corpori sit congenita, an a materia ambiente proveniat, mihi perinde esse; imo utrumque esse posse illud aeque ac hoc, facile enim me posse concipere Deum creasse materiam cum conatu quodam, id est ma-

---

*) Es folgt hier ein Auszug des Briefes n. LXXVI, den Leibniz später wieder auffand.

**) Siehe die Beilage.

teriam tunc cum quiescere videtur, habere tamen celeritatem infinite parvam, illamque semper in materia manere, quia semel a Deo fuerit impressa, atque hunc conatum esse seu motum infinite tardum, qui producat illam insitam vim elasticam, unde non opus esse illam deducere ab anima quadam corporea seu forma substantiali.

Miror Te quaerere, an ulla usquam portio detur materiae, quae ad aliam portionem habeat rationem inassignabilem, seu an detur linea recta utrinque terminata, sed quae tamen ad aliam rectam habeat rationem infinitam vel infinite parvam, cum tamen actualem materiae divisionem in partes numero infinitas admittas: nam si corpus finitum habet partes numero infinitas, credidi semper et etiamnum credo, minimam istarum partium debere habere ad totum rationem inassignabilem seu infinite parvam. Nec opus est actuali divisione, sufficit talem particulam in toto coexistere, quemadmodum linea mathematica coexistit cum superficie vel superficies cum corpore, vel quodlibet differentiale cum suo integrali, vel ut aptius loquar, quemadmodum secundum Harvaeum et alios, sed non secundum Leuwenhoeck in animali innumera sunt ovula, in quolibet ovulo animalculum vel plura, in quolibet animalculo iterum innumera ovula et ita in infinitum. Sed quidquid sit, cogitationes meas de infinitate mundorum non pro certis et demonstratis venditare volui, sed pro conjecturis tantum probabilibus, hoc principali fundamento nisus, quod existentia eorum nullam implicet contradictionem, quod cognitio nostra ut de finito, ita de infinito quanto sit, tantum relativa, quod nihil in se ut neque magnum neque parvum, ita nec infinitum nec finitum sit, quod tandem nullum sit argumentum contra infinitatem mundorum, quo non aeque uti possent alius mundi incolae ad demonstrandum se solos esse. Sed dabitur forsan occasio, qua haec fusius explicabo.

Jam in novissimis meis dixeram, ni fallor, me Hagae nactum esse Hugenii Cosmotheoron, etiam hic praeter probabilia nihil vel parum habet: de dioptrica ejus nihil intellexi. En habes hic secundam descriptionem methodorum mearum pro solutionibus problematum isoperimetrorum; examina, quaeso, accurate et asserva schediasma, ut si opus fuerit edere possis. Vale etc.

Beilage.

Excerpta ex literis ad Volderum datis
d. 27 Juni. st. v. 1698.

Ecce mitto, ut promiseram, enodationem difficultatis paulo ante discessum meum a Te notae contra infinitorum methodum. Vix posueram pedem in scapham Hagam petens, cum missis distractionibus, quibus Tecum colloquens adhucdum detinebar, anguem in herba latentem detegerem, videremque in eo laborare objectionem Tuam, quod quantitatem aliquam, ad quam non attendisti, tanquam nihil neglexeris, cum tamen revera non modo sit aliquid finiti, sed ipsa prorsus infinita, ut jam patebit. „Sint „(fig. 136) AG, AM (ita circiter argumentabaris) asymtoti hyper„boles FCL, cujus natura (positis $AB = x$, $BC = y$) exprimitur „per hanc aequationem $xxy = a^2$; constat subtangentem BO esse „$= \frac{1}{2}AB$; ergo si CN parallela ipsi AB producatur ad E, ita ut „NE sit $=$ BO seu dimidiae AB, idemque si fiat ubique, gene„rabitur nova hyperbola IQE, cujus areae elementum En erit „aequale prioris elemento correspondenti Cb; unde elementis in „summam collectis erit area quaevis NRQE aequalis areae cor„respondenti SBCP." Optime! hoc omnes concedent. „Ast cum „AS sit arbitraria (porro inferebas) ubicunque sit punctum S, „semper erit $SBCP = NRQE$, poterimus ponere $AS = 0$, „unde sequitur totum spatium asymtoticum in infinitum extensum „GABCF aequale fore toti alteri spatio asymtotico pariter in in„finitum extenso GNEI; interim cum ubique NC, RP etc. sint „duplae, ipsarum NE, RQ etc. adeoque et ipsum spatium GNCF „sit duplum spatii GNEI, erit potiori jure sp. GABCF saltem „duplum spatii GNEI, ac proinde haec duo spatia non possunt „esse aequalia, contra prius ratiocinium; quomodo igitur haec „concilianda?"

Hic, ni fallor, est sensus objectionis Tuae, ad quam ut breviter respondeam, velim consideres, AS nunquam posse assumi absolute $= 0$, nam punctum P semper existere debet in hyperbola, nunquam vero in asymptoto AG; et quamvis in infinitum intelligatur removeri a puncto C, ita ut ad asymtoton data quavis assignabili propius accedat, distantia tamen in ipso infinito non omnino evanescet, sed erit a l i q u i d, licet infinite exigua. Hocque clarum est ex eo, quod solidum sub PS et AS^2 constanti

cubo a^3 aequari debet; id vero fieri non posset, nisi utraque tam AS quam PS esset aliquid reale, etenim ex non-quanto seu ex absolute nihilo multiplicato per quantitatem, licet infinitam, non potest produci aliquid. His bene intellectis, nego jam sequi ex priori ratiocinio, spatium GABCF aequari spatio GNEI; quippe exinde concludi nihil potest aliud, quam quod assumta AK infinite parva et ducta KH asymtoto parallela, fieri debeat spatium GNEI aequale spatio HKBCF: id quod minime absurdum nullamque contradictionem implicat, quia potius probitatem calculi differentialis et integralis egregie confirmat; quoniam ex posteriori ratiocinio spatium GNCF seu GABCF duplum est spatii GNEI, hoc vero ut modo ostensum aequale spatio HKBCF, sequitur GABCF duplum esse ipsius HKBCF ideoque GAKH (id est rectangulum sub abscissa infinite parva AK et applicata infinita KH) = spatio HKBCF = (addita quantitate finita MBCL ad infinitam HKBCF) HKMLCF; at generaliter verum est (notantibus id etiam jam pridem Robervallio, Cavallerio, Pascalio, Fermatio, Wallisio aliisque, quod per calculum differentialem facillime invenitur) rectangulum scilicet sub abscissa AS et applicata PS aequari spatio hyperbolico MSPCL. Interim mirum Tibi videri non debet neve methodus differentialium ideo suspecta, quod rectangulum AKH latitudinis infinite exiguae AK reperiatur aequale spatio infinito AKMLCF, siquidem hoc rectangulum revera infinitum esse non obstante, quod habeat latitudinem infinite parvam, patet in ipsa aequatione ad hyperbolam $xxy = a^3$, quae resoluta in proportionem dat $x . a :: aa . xy$; unde si x seu AK sit infinite parva, id est infinities minor, quam determinata et finita a, erit pariter aa seu quadratum finitum infinities minus quam xy: proindeque xy seu rectangulum AKH revera est infinitum. Haud aliter judicandum de omni alia hyperbola $x^n y = a^{n+1}$; quotiescunque enim n unitate major est, difficultas Tua semper occurrit, nempe quia tunc semper rectangulum AKH evadit infinitum et comparabile cum spatio HKBCF, adeoque minime negligendum: sed contra quotiescunque n unitate minor vel eidem aequalis, tunc cessat objectio, quoniam scilicet rectangulum AKH tunc fit infinite parvum vel finitum et incomparabile spatio HKBCF, adeoque tuto negligi potest. Unde vides; et vel hoc nomine genuinam esse responsionem, quam hic dedi ad difficultatem Tuam; non dubito quin sit Tibi satisfactum.

LXXIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Doleo me causam Tibi fuisse innocentem laboris ingrati; sperabam ab alio describi posse, quod iterum mitteres. Cum nemo hic curiositates valde curet, credo ad me rediissent litterae, nisi fuissent conculcatae aut dilaceratae.

Ut Celeberrimo Voldero circa vim Elasticam satisfiat, non est opus recurri ad animas aut formas aut spiritus; nam his sepositis sufficit, uti jam in praecedente Epistola notavi, tale esse Systema rerum, ut materiae portio quantumvis exigua, ab alia adhuc subtiliore perlabente, mechanicam sese a flexu restituendi causam accipiat, quantum opus est ad observandas nostras motus leges; atque ita vis Elastica erit corpori omni essentialis, ex Systematis structura. Nec magis nos conservationem potentiae, quam Cartesianos conservationem producti ex mole in velocitatem statuentes, recurrere necesse est ad aliquid altius; neutra enim ex sola extensione et impenetrabilitate duci potest; ad Dei autem hic voluntatem nudam recurrere cum Cartesio parum philosophicum est. Et quocunque modo aestimemus eam, quae servatur, potentiam, concluditur ex eo, quod vis vel actio non perit, aliud esse in corpore, quam illa duo, extensionem scilicet et impenetrabilitatem; nam alias, ut in praecedente Epistola mea notavi, duo corpora aequalia directe sibi occurrentia se sisterent mutuo, aliaque multa contingerent prorsus et ab experimentis et a rationibus etiam aliena; quae scilicet ex simplici compositione conatuum Geometrica necessitate consequerentur, ut alicubi explicare memini in Diario Eruditorum Gallico, et jam olim in Theoria motus, quam juvenis publicavi.

Quod vero Dn. Volderus nobis objecit, nos ita cogi ad aliquid in corpore statuendum, quod concipere non possimus, bene a Te responsum est, sufficere quod experientia nos cogat ad admittendum aliquid praeter extensionem et impenetrabilitatem, sive id concipi a nobis possit, sive non. Porro ut ostendat, rem non posse concipi, quaerit, utrum id quod praeter extensionem et impenetrabilitatem admittimus, substantia sit an modus; additque, si modus sit, nihil futurum esse novi; si substantia, spiritum fore aut corpus aut tertium, et hoc tertium non posse

explicari, nisi cum Veteribus ad formam substantialem dudum (ipsius judicio) explosam recurrere velimus. Sed quaerere vicissim liceret, quam assignet definitionem substantiae vel modo; praeterea dantur, quae nec substantiae sunt nec modi, ut attributa primitiva; sic certa magnitudo essentialis est datae materiae; et ita non est modus, ut sunt figura, vel motus; et tamen magnitudo non est substantia, sed attributum. Nec nostra refert, utrum id quod statuimus, sit novum, modo sit verum. Cum etiam quaeritur, an dari possit substantia, quae nec sit spiritus nec corpus, rursus definitione opus est, qua fortasse cum illo non convenimus; nam ipse corporis essentiam in extensione collocabit, ego aliquid aliud postulo. Si spiritum omnem cogitatione et intellectu praeditum censet, ego animas formasve existere putabo, quae spiritus non sint. Nec video, quid impediat varios esse Monadum gradus, ut aliae intellectu sint praeditae, aliae inferiore sensu. Itaque si formas substantiales ut res animabus analogas concipiamus, dubitare licebit, an jure sint explosae.

Rectissime etiam solvisse mihi videris Viri Clarissimi Objectionem, sane peringeniosam et elegantem, contra Calculum infinitesimalem; nempe revera infinite parvum longissime abest a nullo. Et cum aequatio ad Hyperbolam est $xxy = a^3$, patet, x posita infinite parva nempe primi gradus, esse y ad a ut aa ad xx, adeoque y esse infinitam non simplicis sive primi, sed proxime altioris, hoc est, secundi gradus; quod secus est in Hyperbola simplice, ubi y est ad a ordinariam, ut eadem ordinaria a ad infinite parvam primi gradus x. Cognatam objectionem ipse formavi olim mihi in Scholio Propositionis 22 Tractatus inediti, quem in Gallia de Tetragonismo meo Arithmetico, paulo post inventionem ejus conscripsi, ubi apparet, objectionem non tantum nostrum Calculum, sed et Geometriam jam antea receptam pari jure ferire. Nempe demonstraveram (Prop. 18) in figura Analytica simplice (sic vocabam eas, quarum aequatio relationem continens ordinariam inter ordinatam et abscissam, nonnisi duobus membris constat, quales sunt Paraboliformes et Hyperboliformes, seu ubi quaedam dignitates abscissarum sunt ut quaedam dignitates ordinatarum) (fig. 137) zonam ${}_1C_1B_2B_2C_1C$ esse ad zonam conjugatam ${}_1C_1G_2G_2C_1C$, ut exponens dignitatum ab ordinatis BC est ad exponentem dignitatum ipsis

proportionalium ab ordinatis conjugatis seu abscissis GC vel AB. Unde in Hyperbola Conica zonae sunt aequales; in ea vero Hyperboloide, quam Antiparabolam vocare possis, ubi ordinatae sunt reciproce ut quadratura abscissarum, erit zona ad zonam conjugatam ut 1 ad 2, et ita porro. Hinc talis nascitur difficultas, etiam in ipsa Conica Hyperbola: Zona $_3C_3C_2B_2C_3C$ aequalis est zonae conjugatae $_3C_3G_2G_2C_3C$ et zona $_2C_2B_1B_1C_2C$ ipsi conjugatae $_2C_2G_1G_1C_2C$, et ita porro, ponendo zonas illas semper lineis terminatis esse comprehensas. Et ita semper quodlibet tale spatium horizontale aequabitur respondenti verticali. Jam omnia quadrilinea horizontalia in infinitum usque ad A complent spatium infinitum quadrilineum $_3C_3BA$ etc.$_3C$, et omnia verticalia illis respective conjugata et aequalia in infinitum complent spatium infinitum trilineum $_3C_3G$ etc.$_3C$. Ergo haec duo spatia infinita sibi sunt aequalia, pars toti, quod est absurdum. Excessus enim prioris super posterius est rectangulum $A_3B_3C_3G$. Respondi multum abesse, uti indivisibile seu nullum in magnitudine, ab infinite parvo, ita interminatum ab infinite magno; neque sermonem hic fieri debere de spatio absolute interminato, velut $_3C_3BA$ etc.$_3C$, rectis finitis $_3C_3B$, $_3BA$, et Asymptota interminata A etc. et curva interminata $_3C$ etc. comprehenso, vel quasi; neque adeo ultimam abscissam A_0B accurate loquendo esse nullam, quasi O incideret in A, nec ultimam ordinatam $_0B_0C$ esse interminatam, quasi $_0B_0C$ incideret in Asymptotam; sed A_0B esse infinite parvam, et $_0B_0C$ esse infinite magnam, sed terminatam; inter quas media proportionalis sit ordinaria quantitas, latus scilicet quadrati constantis, quod aequatur rectangulo cuicunque ABCG, atque adeo et rectangulo $A_0B_0C_0G$, quod est longitudinis infinite magnae et altitudinis infinite parvae. Atque ita cessat objectio, neque enim duo spatia interminata supra dicta, quadrilineum nempe et trilineum, aut sibi aequantur aut a quadrilineis (unum ab horizontalibus, alterum a verticalibus) conflantur, sed spatia infinita ambo debent esse quadrilinea et terminata, nempe zona horizontalis totalis ex prioribus numero infinitis conflata $_3C_3B_0B_0C_3C$, et zona verticasalis totalis itidem ex prioribus numero infinitis composita $_3C_3G_0G_0C_3C$, quae duae zonae infinitae quidem longitudine, sed tamen terminatae, inter se aequantur. Quod etiam in Hyperbola Conica per se patet, quemadmodum et in universum in ea con-

stat, quod zona horizontalis respondenti verticali aequetur; nam si a duabus zonis detrahas commune trilineum $_3CE_0C_3C$, restabit in uno rectangulum $A_3B_3C_3G$, in altero $A_0G_0C_0B$, quae duo rectangula aequantur inter se, ut constat.

Atque haec quidem circa aestimationem virium naturamque corporis, pariter ac circa Calculum infinitesimalem, excerpta ex his pariter ac praecedentibus literis, Domino Voldero, si videbitur, communicari possent. Inter nos autem haec addo, quod et jam olim in dicto Tractatu inedito adscripsi, dubitari posse an lineae rectae infinitae longitudine et tamen terminatae revera dentur. Interim sufficere pro Calculo, ut fingantur, uti imaginariae radices in Algebra. Semper enim, quod per infinita ista et infinite parva concluditur, deductione ad absurdum, mea Incomparabilium methodo (cujus aliquando Lemmata dedi in Actis*)) evinci potest. Itaque mirari etiam non debes, quod dubito, an revera detur quantitas infinite parva, aut infinite magna utrinque terminata. Etsi enim concedam, nullam esse portionem materiae, quae non actu sit secta, non tamen ideo devenitur ad elementa insecabilia, aut ad minimas portiones, imo nec ad infinite parvas, sed tantum ad minores perpetuo, et tamen ordinarias; similiter ut ad majores perpetuo in augendo acceditur. Sic etiam semper animalcula in animalculis dari facile concedo; et tamen necesse non est dari animalcula infinite parva, nedum ultima. Si talia, de quibus inter nos agitur, infinita et infinite parva possibilia esse concederem, etiam crederem esse.

Sed ad reliqua literarum tuarum venio. Et quidem simplicissima est Oenometri ratio tua novissima per tubulum communem erectum et infra valvula foras spectante instructum; habet tamen illud imperfecti, quod dum reaffusionem non indicat, etiam indicare non potest, quantum post reaffusionem iterum detrahatur. Imo poterimus detrahere aliquid, ut nihil plane indicet tubulus, si nempe praecedat aquae tantae affusio, quantum mox vini detracturi simus. Quid ergo, si adjungamus adhuc alium tubulum, cujus valvula spectet introrsum? Is affusionem indicabit, detractionem non notabit; et machinamento effici posset in utroque tubulo, ut appareret, quantum quaque vice affusum aut detractum,

---

*) Act. Erudit. 1689. Febr.

et quis fuerit ordo affusionis aut detractionis; imo ratio posset excogitari definiendi specificam liquoris affusi gravitatem, si tanti ea res esset.

Pressionem columnae aqueae indicatam ope globuli aërem continentis et plus minusve aquam admittentis, atque adeo depressi aut emergentis, excogitavit quidam Italus, si bene memini, non Boylius. Tubi Tui varicosi inprimis placent ad usus, quos notas, ut non sit opus observatione Thermometri continua, et tamen sciri possit, quis medio tempore maximus fuerit ascensus vel descensus. Follem ex materia durabili maxime desiderarem pro Barometro portatili, aliisque usibus multis.

Cosmotheori Hugeniani praecedentes Tuae non meminerant: libenter intelligo prodiisse; nam in rebus pulchris et magnis etiam conjecturae ingeniosae pretium habent.

In Actis nuperrimis non sine admiratione mea vidi primum Tschirnhausianum*), deinde Tuam Parabolici arcus sectionem**). Vellem autem narratum fuisset, qua ratione ille a Te in rectam viam fuerit reductus; id fecissem ego, si mihi tale aliquid contigisset. Miraberis etiam expressionem dicentis, nihil Methodum suam fugere; credo, ex quo nostra intelligere coepit. Sed supersunt tamen adhuc fortasse, in quibus haereat.

Magna cum voluptate vidi methodum Maximi, quam ego ab initio statim, antequam etiam Problema Brachystochronae proponeres, maxime directam et generalem judicavi, et illi problemati adhibui, aliisque adhibendam, si bene meministi, suaseram, pulchre a Te in rem praesentem Isoperimetrarum usurpatam. Placet etiam, quod appellatione Functionum uteris more meo. Loco Isoperimetrarum liceret generalius adhibere figuras Isodynamas, secundum unam fungendi rationem, et ex iis reperire vel eligere eam, quae Maximum aut Minimum praestet alia fungendi ratione, v. gr. in simplicissimo eam, quae ex aeque capacibus est brevissimi ambitus, quae est Circulus, decussata, ut sic dicam, quaestione cum inquisitione capacissimae ex Isoperimetris. Saepe

*) De methodo arcus curvae parabolicae inter se comparandi. Act. Erudit. 1698. Jun.

**) Investigatio algebraica arcuum parabolicorum assignatam inter se rationem habentium etc. Ibidem.

etiam ego utor Functionibus differentiatis x, neglectis differentialibus; ut si z sit Functio ipsius x, tunc ż mihi est quantitas ordinaria, quae prodit dz dividendo per dx, seu ż = dz : dx. Signa in cujusque arbitrio sunt, mihi tamen non placet, × multiplicationem significare, ob facilem confusionem cum x; malo adhibere τὸ in vel ⌣ ut ZC in LM, vel ZC ⌣ LM. Imo saepe simpliciter duas quantitates puncto interposito conjungo, multiplicationemque designo, ZC.LM. Hinc in rationibus designandis non utor puncto, sed duobus punctis, quippe quae simul apud me signum sunt divisionis, itaque pro Tuo dy.x :: dt.a scribo dy : x = dt : a; idem enim est dy esse ad x ut dt ad a, quod dy divisum per x aequari ipsi dt diviso per a.' Ex qua aequatione etiam consequuntur omnes proportionum regulae.

Nondum satis attente examinare vacavit, an nihil referat ad maximum, quam sumas arbitrariam constantem C, in summando addendam vel subtrahendam; quo posito infinitae erunt curvae quaesitae praestantes idem seu aeque maximum; alioqui oporteret ex ipsis C rursus eam, quae maximum praestet, eligere.

Ad linteum haec noto, pro gravitatione (fig. 131) particulae FC clarius dici potuisse ejus gravationem; solet enim gravitatio sumi active, gravatio passive; sed haec minuta sunt. Illud putem, si liquor superstet linteo, ut contineatur et (fig. 138) linteo BFN et rectis RB, SN, ipsius quoque Centrum gravitatis (cum idem semper liquor maneat, utcunque mutata lintei figura) maxime descendere; sed res tamen eodem redibit.

Consensus duarum methodorum, directae et indirectae, egregius est, tum pro illis, qui haec altius non introspiciunt, tum pro nobis ipsis, ut calculi errores, aut ratiocinii paroramata melius vitemus. Dn. Menckenius tuae sectioni arcus parabolici adjecit tuam demonstrationem Tautochronismi Cycloidis, et censuram in La Hirium, nonnihil puto temperatam. Scribit mihi, in proximis Actis *) comparere debere Davidis Gregorii Catenariam ex Transactionibus. Rectius consuluisset nos prius, an aliquid afferat dignum referri. Sed ille exterorum benevolentiam captat, secus quam exteri faciunt nostris.

Pene oblitus eram dicere, quod tamen fortasse jam Tibi notum est, Dominum Fratrem Tuum specimina quaedam dedisse in

*) Act. Erudit. 1698 Jul.

Actis*) primi Problematis a Te in Diario Gallico propositi, et a Domino Marchione Hospitalio praeteriti, pro linea minima inter duo puncta ejusdem superficiei: sed non dicit, an possit generaliter. Memini me Tibi dudum scribere, quod mihi occurrerit Methodus generalis. Pono superficiem constare ex portionibus superficierum, in quibus minimae jam duci possunt, quales sunt planae aut sphaericae, tanquam elemeutis. Nam in plana minimae sunt rectae, in sphaera minimae sunt arcus magni. Jam quia ex Methodo mea generali directa formarum maximum minimumve praestantium, etiam linearum minimum praestantium portiones utcunque parvae minimum praestant, ita quoque ex puncto unius portionis seu hedrae (quod eligi potest maxime determinatum) ad punctum alterius proximae portionis quaerenda est via minima, composita ex minimis viis in utraque hedra ad punctum in communi hedrarum sectione ita sumtum, ut summa sit possibilium minima. Sint (fig. 139) hedrae (nempe portiones planorum vel sphaericarum superficierum datam superficiem tangentium, vel, si in sphaeris malis, osculantium) LMN et PMN haec plana, aut hae superficies sphaericae vel hedrae habeant communem in superficie data sectionem MN. Et sint duo puncta datae superficiei sibi indefinite vicina R et S, quae in hedris istis duabus determinatam maxime (ob facilitatem calculi) positionem habere intelligantur: quaerendum est sectionis hedrarum communis MN punctum tale T, ut minimarum ab R et S ad T, nempe ipsarum RT et ST (quae in hedris planis sunt rectae, in sphaericis arcus magni) summa RT + ST sit omnium possibilium minima, et determinatio puncti T dabit naturam lineae in superficie data ducendae, inter puncta sua minimae, generalem. Et harum linearum eae deinde eligendae infinitae, quae transeunt per punctum datum, et ex his demum una (regulariter) quae a puncto dato tendit ad alterum punctum datum. Quod si Tibi alia occurrerit via, tanto erit gratior. Sin hanc ipsam excolueris, etiam sic jucundum erit intelligere Tuo studio eruta; materia enim pulchra est et Te digna. Vale etc.

Dabam Hanoverae 29 Julii 1698.

---

*) Solutio sex problematum Fraternorum etc. Act. Erudit. 1698 Mai.

LXXX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Groningae $\frac{16}{26}$ Aug. 1698.

Hactenus a Dno. Voldero nullam accepi responsionem; an sit quod forte ipsi satisfecerim, nescio: percuperem saltem nosse, quid jam sentiat de sua objectione contra Calculum infinitesimalem, quam insolubilem credidit, nisi ad plurimum dicendo (hac enim responsione sibi ipsimet adblandiebatur) Axiomata pro finitis quantitatibus recepta non valere pro infinitis, ita ut sine contradictione duo infinita censeri possint simul aequalia et inaequalia, pars infiniti aequalis toti infinito, simplum duplo etc. Sed cum valeat ubique, Nihil simul esse et non esse potest, hanc responsionem nullam esse praevideram statim, et genuinam promiseram, quam misi. Etiam mihi quandoque occurrerunt objectiones similes Tuae, quam ipse Tibi in Gallia formasti (utilem et gratam rem faceres publico, si tractatum ederes, quem de hisce conscripsisti) etnon ita pridem Varignonius hujusmodi diluendam mihi proposuerat circa descensum gravium.

Instabit, scio, Volderus petere claram explicationem illius tertii, quod praeter extensionem et impenetrabilitatem requiris in corpore. Regeret forsan, si tales Monades statuas corporibus peculiares, sive illas nomines formas substantiales sive res animabus (intelligentibus an sentientibus, quod Voldero perinde est) analogas, monadem aut toti corpori aut parti attribuendam esse non toti corpori, quia potest dividi in partes a se mutuo independentes, non parti, quia pariter in plures partes independentes dividitur. Si vero corpus ex infinitis monadibus conflatum dicas, tunc quamlibet aut extenso aut non extenso fore affigendam: si extenso, licet infinite parvo, priorem recurrere difficultatem, nisi ad atomos refugere velis; si non extenso, ergo nihilo, quia ex non-extensis non componi potest extensum; ita ut forte cogaris dicere, quodlibet corporis punctum (dico punctum mathematicum indivisibile) peculiari monade seu tali anima donatum esse. Quantum ad vim elasticam, Tecum sentio, nec forma nec anima nec spiritu opus esse, ut illa corpori sit essentialis; rectissime, namque mihi dicere videris, eam ex mechanismo seu structura corporis dependere posse: quemadmodum non opus est anima, ut duo

magnetes se mutuo attrahant vel repellant. Et ego sane saepius cogitavi, annon quodlibet corpusculum, quantumvis exiguum, ita a Deo sit constructum, ut pro ratione molis suae, certam habeat copiam materiae longe subtilioris circa se et per se continuo perlabentis, ipsiusque quasi sphaeram activitatis constituentis. Tale quid etiam Newtonus statuisse videtur, quando illum dicere memini, omnia et singula corpora totius universi in se mutuo gravitare seu se mutuo attrahere, adeo ut meum corpus, verbi gr., non magis versus centrum terrae trahatur, habita ratione vicinitatis, quam versus centrum Saturni, aliusve Planetae, praeterquam quod vacuum admittat, Hugenio approbante, ut ex Cosmotheoro vidi.

Nunquam me dixisse memini, in divisione materiae ad elementa insecabilia aut ad minimas portiones deveniri posse: sed hic non est quaestio, quousque ego divisione seu actuali seu mentali pervenire possim; quaeritur quousque jam perventum sit. Concedis materiae portionem finitam actu jam divisam esse in partes numero infinitas, et tamen negas aliquam istarum particularum posse esse infinite exiguam: quomodo haec cohaerent? Nam, si nulla est infinite exigua, ergo singulae sunt finitae; si singulae sunt finitae, ergo omnes simul sumtae constituent magnitudinem infinitam, contra hypothesin. Concipe aliquam magnitudinem determinatam dividi in partes geometrica hac progressione descendentes $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ etc. Quamdiu numerus terminorum finitus est, fateor singulos terminos fore etiam finitos; sed si omnes termini a c t u existunt, erit sane infinitesimus omnesque sequentes infinite parvae magnitudinis: atqui in quolibet corpore ob divisionem actualem jam factam, non faciendam, r e v e r a et a c t u omnes termini talis progressionis existunt. Ergo etc. Praeterea corpus, quod motu suo describit lineam, existit utique a c t u in singulis punctis, quae in illa linea concipere possum, ergo etiam in duobus, quae ego concipio infinite sibi vicina, adeoque actu intervallulum illud seu particulam infinite exiguam emensum est. Tandem licet talis particula infinite parva non existeret separatim, coexistit tamen cum toto; sed miror, quod dicas, quodsi talia, de quibus inter nos agitur, infinita et infinite parva, possibilia esse concederes, etiam crederes esse. Vellem ergo, ut mihi demonstrares impossibilitatem; nam quemadmodum non tantum mihi tribuo existentiam eorum probare me posse, ita e contrario persuasissimus sum impossibilitatem ejus nullis argumentis posse evinci.

Gaudeo. Tibi placuisse Oenometri rationem meam; placet vicissim perfectio Tua pro reaffusione cognoscenda, de qua ego non sollicitus eram, quia nec Galli illius automatarii machinulam id praestare intellexi; forte praestat. Sed quid, si detractio vini et reaffusio aquae fiunt simul, ita ut quantitas liquoris in dolio nunquam mutetur? Uterque sane tubulus observatorem frustrabit, neque remedium video pro hoc. Ceterum valvulae etiam applicari possent Barometris et Thermometris communibus pro maximo ascensu et descensu explorando, unde tubis varicosis non esset opus; sed praevideo difficultatem applicationis valvularum intra tubos vitreos.

Mirabilia mihi narras de Tschirnhausii modo procedendi; expectabam ab ipso agnitionem sui erroris et revocationem absurdae suae refutationis, imo et gratiarum actionem, quod a me in rectam viam sit reductus. Quid? loco horum rependere ingratitudinem, mihi furari inventionis laudem, dicere nihil methodum suam fugere: talia profecto virum honestum non decent. Ubinam antiquus ille candor, quem Dn. Menkenius impense adeo in illo extulit, ut nullum unquam inter Eruditos Tschirnhausio candore parem vidisse gloriatus fuerit (ein ehrlicher Cavalier, dessen gleichen ich unter gelehrten an candore, höfflichkeit und Dienstwilligkeit nie angetroffen); aut magnus Hypocrita Tschirnhausius, aut caecus adorator Menkenius. Quicquid sit, Dn. Menkenius non omnino est extra culpam, cur primum meum schediasma suppressit? cur secundum tam diu retinuit? cur Tschirnhausio communicavit, antequam imprimeret? cur Tschirnhausianum meo praeposuit? cur publicum non monuit, meum schediasma longe prius ad manus suas pervenisse et quidem jam tum, cum Tschirnhausius rem adhuc impossibilem crederet? cur non monuit, ut alibi fecit pro Tschirnhausio inventore, mihi deberi primam inventionem? Si haec fecisset, ex debito fecisset et prout nulli partium studio addictum deceret; sed video populari suo plus favere quam mihi, nec exterorum benevolentiam adeo captare, quia suorum plus ambiat. Interim gestio scire, an Tschirnhausio communicaveris meam responsionem ad futilem ejus refutationem, et quid Tibi rescripserit; optarem etiam ipsum admoneas, ut mihi justitiam faciat, primam inventionem mihi publice attribuendo; quodni fecerit intra hoc, quod restat anni tempus, sciat me vulgaturum (non quidem in Actis Lips. quia Dn. Menkenius non imprimeret, sed alibi) narrationem totius Hi-

storiae una cum priore meo schediasmate suppresso et ejus literis ad Te scriptis meaque ad illas responsione, ut publicum videat, quid inter nos privatim fuerit gestum et quantum ille hujus inventionis sit particeps. Quae omnia procul dubio non vergent in ejus laudem, sed sibi imputet, si dando mihi quod meum est, duriora praevenire noluerit.

Laetor admodum solutiones meas Problematis Isoperimetrorum duplici methodo inventas Tibi probari: animadvertisti, credo, me adhibuisse in methodo directa considerationem Ellipticulae, prout ego ab initio statim conceperam, absque qua forte non tam facile pervenissem ad cognitionem aequalitatis arculorum OX et $\omega\xi$, id quod palmarium est in hoc scrutinio. Elegans est conversio Tua quaestionis Isoperimetrarum in Isodynamarum, ubi scilicet ex omnibus figuris Isodynamis seu ejusdem capacitatis quaeritur illa, quae certa fungendi ratione producat aliam figuram brevissimi ambitus inter omnes illas, quae eadem functione ab aliis Isodynamis produci possent. Sed problema hoc modo consideratum difficilius mihi apparet. Ad denotandam Functionem alicujus quantitatis indeterminatae x, mallem uti litera majuscula cognomine X vel graeco ξ, ut simul appareat cujus, indeterminatae fit Functio; hoc levaret memoriam. Quantum vero ad signum Functionis differentiatae, facile adoptabo Tuum d loco mei D, quoniam simplicius est, ideoque in Tua est manu substituere illud in schediasmate meo. Reliqua, quae mones circa notationem signorum vulgarium, etiam ego approbabo; interim malui morem receptum sequi, quam novorum signorum definitionem praemittere, id quod commodius fieri potest conscribendo integrum Tractatum. Lubens credam Te nondum satis attente examinasse, an quid referat ad maximum, quam sumam constantem C in summando addendam vel subtrahendam. Si enim vel tantillum attendisses, vidisses facile, revera infinitas debere esse curvas, quae eadem functione maximum praestant, non tamen inde sequi, dari maximum maximorum; crescunt quippe illa maxima a o in infinitum. Sumamus ex. gr. casum simplicissimum, existente numero potestatis n = 1, problematis Fraterni, ubi scilicet curva quaesita genitrix BFN (fig. 131) et genita BZN est eadem curva, utraque nempe circulus: patet utique non modo semicirculum BFN quaesito satisfacere, sed quodcunque aliud segmentum vel majus ut (fig. 140) BRN, vel minus ut BSN, ita ut BRN et BSN aeque faciant

maximum inter suas respective Isoperimetras, quam BFN. Hic vero nullum est maximum maximorum, quandoquidem BSN in infinitum diminui et BRN in infinitum augeri potest. Hoc apprime convenit cum mea generali aequatione $dy = \frac{dx . X \pm C}{\sqrt{aa - \square X \pm C}}$ in qua si, loco generalis Functionis X substituatur x, habebitur $dy = \frac{dx . x \pm c}{\sqrt{aa - \square x \pm c}}$, seu summata aequatione $y \mp b = \sqrt{aa - \square x \pm c}$, quae aequatio est ad semicirculum BFN, si $c = o$; ad segmentum majus BRN, si adhibeatur $-c$; et ad segmentum minus BSN, si $+c$. Et quidem in hoc solo casu, quando $X = x$, omnes tres curvae BSN, BFN, BRN, sunt cognomines, nempe omnes circuli; sed in reliquis omnibus casibus sunt diversi generis curvae; si ex. gr. $X = \sqrt{x}$, tunc assumta $c = o$, erit BFN Cycloïs, sed si sumatur $+$ vel $-$ c, tunc BSN vel BRN cessat esse Cycloïs.

Gratum mihi esset videre Gregorii Catenariam et Tschirnhausii Schediasma. Si ea mihi mittere velles, remitterem ocyus; Acta enim non nisi tarde admodum ad me' perveniunt. Nondum vidi, quid Frater dederit in Actis pro linea brevissima inter duo puncta ejusdem superficiei: generaliter id posse dubito. Methodus Tua vel potius basis alicujus Methodi legitima est, eaque etiam primo se mihi obtulit, cum hoc Problema mihi incideret, et quidem porro facile videbam (fig. 139) lineam brevissimam in duabus haedris se secantibus, ab R ad S tendentem,' eam esse quae faciat cum communi haedrarum sectione NM duos angulos ad verticem, ut ita dicam, oppositos RTM, STN aequales. Sed hoc hactenus nihil juvat pro constructione totius lineae quaesitae in superficie curva. Alium praeterea inveni solvendi modum, qui generalissimus est, quique in eo fundatur, quod planum transiens per tria quaelibet puncta proxima lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum. Hinc enim generalem erui aequationem pro omnibus superficiebus, quae in nonnullis, ut in Conoidibus et Sphaeroidibus rectis cujusvis gradus facile construitur. Vale et fave etc.

P. S. Meis jam scriptis, accipio hasce a Dno. Varignonio cum descriptione Vinometri, quod valde compositum deprehendo vereor-

que, ne vel sola frictio denticulorum et virgulae ferreae liberum descensum et ascensum suberis multum impediat, praeterquam quod eundem defectum habet, quem nostrum, quod scilicet nihil indicet, si effusio et affusio simul fiant. Misit etiam longam, sed absurdissimam Fratris Epistolam in Diario editam*), ubi Frater singularem omnino refutandi viam init. Fingit enim sibi statim analysin quandam desumtam ex methodo indirecta (sed male et longe aliter, quam ego feci, adhibita, conjicit enim me supposuisse centrum gravitatis debere infimum locum sumere in liquoribus, ubi mutata figura non eadem copia manet, quod tamen scis me in primis praecavisse, nullamque me habere considerationem centri gravitatis, sed rem totam deducere a summa gravitationum seu gravationum, prout volueris nominare): illaque me usum fuisse conjecturat et tandem temere affirmat, quam igitur prolixe refutat, ostendendo quod multae absurditates exinde sequantur: quod quidem veritatem in multis invenerim: id autem factum esse ex accidenti, quod commiserim duos paralogismos feliciter adeo se mutuo corrigentes, ut fortuito verum exhibuerint. Vides miserum hominem cum umbra pugnare; quid, quaeso, ineptius quam refellere analysin, quae mea non est? si volueris, mittam foliola. Praeter Te asciscit adhuc in arbitros Dn. Hospitalium et Newtonum. Respondi**) ejus refutationem me non tangere, me meas Methodos et directam et indirectam cum Analysi apud Te diu deposuisse: etiam Fratrem debere suas Tibi summittere, quas utrasque simul publicaturus sis, ut Lectores reliquique inprimis arbitri cum se invicem tanto commodius conferre et de collatis judicare queant.

Hoc ipsissimo momento accipio Tuas postremas $\frac{3}{13}$ Aug. datas. Gaudeo quod mihi suadeas, quod jam antea facere constitueram: intra paucas hebdomades videbis meam responsionem in Diario prodituram. Simul etiam accipio Acta Lips. ad Junium inclusive; sed nihil adhuc in illis legi. Mittes ergo tantum si placet Gregorii Catenariam.

---

*) Journal des Savans Aout.

**) Journal des Savans Decemb.

LXXXI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Accipio Diarium Gallicum, in quo responsio Domini Fratris Tui. Omnino judicavit, ut divinasti, Te ope lintei pervenisse ad quaesitum, sed non praevidit, Te etiam via alia directiore usum esse. Suadeo ego, ne praecipites publicationem Tuam viae directae, ob rationes olim allegatas. Vix enim nisi paucissimi possunt esse judices, et hi possunt privatim intervenire; caeteris, quales Dnus. Tschirnhausius et Dnus. Nieuwentiit, qui nostris non ita uti mihi videntur, ut aequum erat, tantum suppeditamus, quibus alant suam ἀνθάδειαν beneficii accepti dissimulatricem.

Epistola Domini Fratris Tui ad Dominum Varignonium directa est, quod ex eo judico, quia ipsius Theorema mechanicum de sinubus laudat.

Uti se ait mea expressione per (:), commodo Typothetarum; poterat eodem modo etiam exprimere rationem, ut nuper scripsi.

Ad priores me referens nihil nunc addo, nisi ut valeas et me ames, qui sum perpetuo tuus etc.

Dabam Hanoverae $\frac{2}{12}$ Augusti 1698.

LXXXII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratum mihi est intelligere, Oenometrum Gallicum nihil aliud esse, quam suberem, qui elevatur secundum virgulam ferream, denticulis adjunctis. Huic constructioni nostram utique praeferendam putem. In Thermometris et Barometris Tubos varicosos valvulis Tecum praetulerim.

Dno. Tschirnhausio ad literas ipsius responderam, me Tibi communicaturum vel communicasse, quae objicit; ab eo tempore mihi non scripsit. Velim inter bonos bene et candide agier, et suum cuique tribui. Dn. Tschirnhausius quanto magis simulat a se negligi gloriam, tanto eam affectat magis. Dn. Menkenius uti-

litatum suarum magis, quam aequitatis rationem habet. Dno. Tschirnhausio defert tanquam vicino, quicum saepe agendi occasio est; exteris remotioribus, ut Gregorio, Nieuwentiitio et similibus favet, ut eos benevolentiae significatione invitet; nos satis sibi astrictos putat. Gregorii Catenariam nondum vidi, sed tantum ex literis Menkenianis intellexi, Actis insertum iri*): ubi accepero, mittam statim. Respondi ipsi, videri mihi eam venturam post festum, nec Anglos nostra, nisi aliquid novi et digni habeant, referre.

Video, quia Problemata Isoperimetrorum solvuntur non pro uno dato ambitu, sed pro procunque, utique non unum maximum maximorum ibi haberi, sed variari in infinitum debere; interdum tamen in aliis casibus haec cautio erit utilis, ut determinatio assumtae inter summandum constantis adhibeatur.

Uti dato ambitu, Ellipticula, ita alio dato, alia curvula est opus; et licet de curvula non cogitetur, sufficit duobus punctis datis tertium manere indefinitum (utique in curva) ex lege maximi determinandum: unde jam proprietas lineae quaesitae. Idque revera et pro ducenda minima in data superficie contingit, ut adeo semper eadem sit methodus directa generalissima et ad aequationem (saltem differentialem) deveniatur. Nec pro minima superficiei abludit speciale, quod adhibes, Theorema elegans et utile; nam circulus maximus in sphaera superficiem datam tangente, transiens per tria puncta proxima lineae minimae quaesitae, est planum rectum ad planum superficiem datam illic tangens.

Uti Dn. Volderus, ita olim Gregorius a S. Vincentio alicubi dixit, in infinito non habere locum Axioma, quod Totum sit majus parte. Sed mihi videtur alterutrum dicendum, vel infinitum revera non esse unum totum, vel infinitum, si totum sit, et tamen non sit majus sua parte, esse aliquid absurdum. Sane ante multos annos demonstravi, numerum seu multitudinem omnium numerorum contradictionem implicare, si ut unum totum sumatur. Idem de numero maximo et numero minimo, seu fractione omnium infima. Et de his dicendum, quod de motu celerrimo, et similibus. Etiam Universum non est unum totum, nec concipi debet ut animal cujus anima Deus, uti Veteres faciebant. Quemadmodum autem non datur Elementum Nu-

*) Acta Erudit. 1698 Jul.

mericum seu minima pars unitatis, vel minimum in Numeris, ita nec datur linea minima,' seu elementum lineale; linea enim, ut Unitas, secari potest in partes vel fractiones. Interim fateor, cum aliud sit maximum ab infinito et minimum ab infinite parvo, non hinc statim refutari possibilitatem nostrorum infinite parvorum. Et saltem in calculo et ratiocinatione adhiberi possunt, quod de maximo interminatoque, itemque de minimo non licet, ut jam observavi. Cum dixi, si infinite parva et infinita possibilia crederem, me concessurum ea esse, non ideo dixi ea esse impossibilia; sed rem in medio adhuc reliqui. Cum negavi, ad minimas portiones deveniri, facile judicari poterat me non locutum de nostris divisionibus, sed etiam de illis, quae actu fiunt in natura. Etsi igitur pro certo habeam, quamlibet partem materiae esse rursus actu subdivisam, non ideo tamen hinc sequi puto, quod detur portio materiae infinite parva, et minus adhuc sequi concedo, quod ulla detur portio omnino minima. Si quis consecutionem in formam redigere velit, sentiet difficultatem. At inquies: S i n u l l a e s t i n f i n i t e e x i g u a, e r g o s i n g u l a e s u n t f i n i t a e (concedo); s i s i n g u l a e s u n t f i n i t a e, e r g o o m n e s s i m u l s u m t a e c o n s t i t u e n t m a g n i t u d i n e m i n f i n i t a m. Hanc consequentiam non concedo; concederem si aliqua daretur finita, quae minor esset caeteris omnibus, vel certe nulla alia major; tunc enim fateor talibus assumtis, pluribus quam est datus numerus quivis, oriri quantitatem majorem data quavis. Sed constat, quavis parte aliam minorem finitam dari. Uteris exemplo sane ad rem accommodato. Ponamus in linea actu dari, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ etc. omnesque seriei hujus terminos actu existere; hinc infers dari et infinitesimum, sed ego nihil aliud hinc puto sequi, quam actu dari quamvis fractionem finitam assignabilem cujuscunque parvitatis. Similiter in motu, etsi per omnia puncta transeatur, non tamen sequitur duo puncta dari sibi infinite vicina, et multo minus dari sibi proxima. Et revera puncta concipio, non ut elementa lineae, sed ut limites seu negationes progressus ulterioris, sive ut lineae terminos.

Quod ad Corporis Naturam attinet, saepe dixi (quod videris non improbare) omnia phaenomena in corporibus explicari posse Mechanice, adeoque et vim Elasticam; interim ipsa principia Mechanismi seu Legum motus ex sola consideratione extensionis et impenetrabilitatis non posse derivari; itaque aliud quid in corpore

esse statuendum, cujus modificatione oriantur conatus et impetus, uti modificatione extensionis oriuntur figurae. Per Monadem intelligo substantiam vere unam, quae scilicet non sit aggregatum substantiarum. Materia ipsa per se, seu moles, quam materiam primam vocare possis, non est substantia; imo nec aggregatum substantiarum, sed aliquid incompletum. Materia secunda, seu Massa, non est substantia, sed substantiae; ita non grex, sed animal; non piscina, sed piscis, substantia una est. Etsi autem corpus animalis, vel meum organicum, rursus ex substantiis innumeris componatur, eae tamen partes animalis vel mei non sunt. Sed si nullae essent animae, vel his analoga, tunc nullum esset Ego, nullae monades, nullae reales unitates, nullaeque adeo multitudines substantiales forent; imo omnia in corporibus non nisi phasmata essent. Hinc facile judicatur, nullam esse materiae partem, in qua Monades non existant.

Miratus sum Hugenium atque Newtonum admittere vacuum, scilicet quod animum ultra Notiones Geometricas non sustulere. Magis adhuc mirum est, Newtonum statuisse attractionem, quae mechanice non fiat. Interim quod ait corpora in se gravitare (saltem ad sensibiles effectus in magnis corporibus nostri systematis) non videtur contemnendum, etsi Hugenio id minus arrideat. Et plane probo quod ais, corpus utcunque exiguum habere suam sphaeram activitatis; dicere soleo nullum esse corpusculum, quod non sit mundus quidam infinitarum creaturarum.

Optime facis, ut functionis nota designet, cujus literae sit functio, veluti ut ξ sit functio ipsius x. Si sint plures functiones ejusdem, possent distingui numeris. Soleo interdum adhibere notam relationis hoc modo $\overline{x}\lfloor 1 \rfloor$, $\overline{x}\lfloor 2 \rfloor$, etc. id est utcunque formatum ex x; ita si quod ex pluribus formatum, ut ex x et y scribo $\overline{x;y}\lfloor 1 \rfloor$, $\overline{x;y}\lfloor 2 \rfloor$. Et quando formatio' est rationalis adscribo r, veluti $\overline{x}\lfloor r.1 \rfloor$ et $\overline{x}\lfloor r.2 \rfloor$ vel $\overline{x;y}\lfloor r.1 \rfloor$, $\overline{x:y}\lfloor r.2 \rfloor$. Si formatio sit rationalis integra, scribo $\overline{x}\lfloor ri.1 \rfloor$, $\overline{x}\lfloor ri.2 \rfloor$. Sed ubi nonnisi una functio, aut paucae, sufficiunt literae graecae,[1] vel aliquid tale, ut soles.

Meus Tractatus Tetragonismi Arithmetici poterat applausum habere tunc, cum scriberetur; nunc tironibus nostrarum Methodorum magis placeret, quam Tibi. Cum Dn. Frater Tuus putet Te alicubi non dedisse verum responsum, oportet ut aliam sibi habere videatur solutionem generalem. Verba, quibus Hospitalium

et Newtonum mihi adjungit, non vidi, et ut communices rogo. Ais in P. S: „Meis jam scriptis accipio hasce a Dno. Varignonio;“ illud „hasce“ significare videtur ac voluisse Te adjicere Varignonianas, et id facere oblitum esse.

P. S. His jam scriptis, allatus est ad me mensis Julius Actorum, unde haec Gregoriana de Catenaria mitto, quae legendi mihi spatium nondum fuit. Judicium igitur Tuum ubi remittes, plagulas istas accipere spero.

LXXXIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Remitto plagulas Actorum cum gratiarum actione. Nihil in his video praestitisse Gregorium, quod applicationem septennalem post nostras solutiones editas mereatur, quodve non a quovis Tyrone, qui calculum nostrum tantillum calleret, praestari potuisset. In eo enim totus est, ut quas olim invenimus catenariae constructiones et proprietates, ille nunc per analysin examinet et demonstret; quod quam facile sit a posteriori, id est, ex generali rei natura semel cognita et a nobis tradita, Tuo judicio relinquo. Fecisset aliquid, si nostris non visis, a priori problema solvisset. Ut vero ex mechanicis primariam catenae proprietatem eliceret, ex qua cetera omnia pendent, ex ejus ratiocinio clare patet, sibi non fuisse scopum eruendi quod incognitum supponitur, sed potius ut, qua data porta, ad nostram solutionem perveniret, modo speciem solutionis exhibuisse videretur. Suum adeo solvendi modum quaesito, quod jam cognitum habebat, accommodasse credo. Etenim Prop. I. si non paralogizat, saltem maxima est inevidentia, dum nescio quo pacto confundit potentias. Sed tamen verum concludit, forte quod duos paralogismos se mutuo corrigentes (ut Fratris termino utar) admiserit, vel potius quaesiverit studio. Videtur enim, ut modo dixi, praemissas conclusioni, non vero conclusionem praemissis adaptasse. Miraberis innuentem statim, quasi etiam nos usi fuerimus methodo Newtoniana, quando illam Geometris familiarem depraedicat. Rem forte gratiorem multis fecisset Dn. Menkenius, si hanc cramben recoctam omisisset, prae-

sertim cum scateat tot vitiis typographicis, sensum non turbantibus, sed pervertentibus, ut qui nostra non antea intellexerit, frustra sit ea hinc ediscere velle. Notat Gregorius catenariam esse debitam curvaturam fornicibus conciliandam; sed diu est, quod idem et ego et alii annotavimus.

Oblitus fueram adjicere nuperis meis Varignoniana, ea nunc mitto. Legi et relegi quae Tschirnhausius de secandis arcubus parabolicis in Actis habet; at ne nunc quidem rem acu tetigit. Quam misere obscura sunt omnia! Nescio quid velit, quove tendat! Dicit se per suam methodum solvere posse sine prolixo calculo; cur ergo solutionem non dedit? cur finalem aequationem non exhibuit, si aliquam habet? Sed haec jactat in aëre, et mea attenuet, invidet quippe mihi primam inventi laudem, sed non impune; patefaciam publico, quam candide mecum egerit.

Legi etiam Fraternas solutiones Problematum meorum; sed eum longe abesse a generali solutione apparebit ex responsione, quam nuper ad Acta misi.*) Problema de ducenda linea minima solvit tantum pro Conoïdibus rectis et circularibus, non pro quavis superficie curva. Item reliqua Problemata in Diario Gallico proposita, pro curvis similibus, non pro quibusvis ordinatim positione datis soluta dedit. Trajectorias (datis ordinatim positione in angulo recto occurrentes) in paucissimis determinavit, non vero generaliter, multo minus pro angulo obliquo, et minime pro angulo data lege variante, quemadmodum ego solvi, si recordaris.

Hac ipsa hora extra urbem abiturus, nunc ad literarum Tuarum contenta prolixe, prout vellem, respondere non possum: id saltem dico, me etiam credere maximam et minimam quantitatem non dari; infinita et infinite parva non posse demonstrari existere, sed etiam non posse demonstrari non existere; probabile tamen esse existere. — Si omnes termini hujus progressionis $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ etc. actu existunt, ergo existit infinitesimus, et omnes qui eum sequuntur: mihi videor hoc jure posse inferre ex actuali existentia. Nec ego puncta concipio ut elementa lineae, sed ut limites tantum. Quid per materiam primam per se seu per molem di-

*) Annotata in solutiones Fraternas Problematum quorundam suorum, Acta Erudit. 1698 Octob.

stinctam a materia secunda seu massa intelligas, non satis capio; neque etiam quid Tibi sit incompletum. Si materia secunda seu massa non est substantia, sed substantiae; si bene comparas cum grege seu cum piscina; divide ergo mihi certam portionem materiae in suas substantias solitarias, singulares vel individuas, quemadmodum grex dividitur in animalia, exercitus in milites etc. et explica quaeso clare, in quo putes talem substantiam singularem consistere. Esto esse aliquod animae analogum: concedis portionem materiae nullam esse tam exiguam, in qua non infinitae existant tales animae, tales substantiae, tales monades, seu quocunque nomine velis notare: quousque ergo progrediendum, ut perveniam ad simplicem unitatem singularem et individuam, ut possim dicere hanc esse substantiam, non substantias? Sane materia non modo dividenda erit in partes infinite exiguas, sed in minimas, id est, in puncta seu non quanta, quae non dantur.

Hesterna luce accepi literas a Dno. Voldero. Is sibi satisfactum fatetur his verbis: „In literis tuis offendi solutam difficul-„tatem quam tibi proposueram, non ut impugnarem indivisibi-„lium methodum, de qua eram persuasissimus, sed quod mirum „mihi videbatur eadem ratiocinandi via in una parte hyperbolae „recte nos concludere, in altera secus, cum tamen omnia vide-„rentur paria, eademque aequatio utrique parti conveniret etc.“ Hisce vale et fave etc.

P. S. Verba quibus Frater arbitros, Hospitalium et Newtonum, Tibi adjungit, haec sunt: „Je declare que bien loin de re-„fuser dans tout ce different l'arbitrage de M. Leibnitz, je veux „encore accepter de bon coeur celuy de M. le Marquis de l'Hôpi-„tal et de M. Newton, comme de tous les plus excellens Geome-„tres de ce temps, pourvû qu'ils veuillent surseoir leur jugement „jusqu'à ce que j'aye parlé à mon tour, et que j'aye achevé de „repondre aux deux solutions que mon frere nous a données dans „le Journal.“

LXXXIV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ante omnia nuntio, literas Tuas, quas in itinere inter Hanoveram et Herrenhusam, ubi aula est, perditas ex circumstantiis credideram, praeter spem comparuisse in massa schedarum, ubi prius quaesieram frustra; itaque Te metu solvo, quam Tibi incutere poterat lector incommodus eorum, quae de Pastoribus quibusdam vestris dicebas, quos ego nunc a prudentioribus edoctos rectius judicare arbitror.

Gregoriana de Catenaria adspexeram magis, quam legeram; sed dubitatione Tua admonitus, demonstrationem propositionis primae, qua fundamentalem quandam lineae proprietatem constituere conatur ex Mechanicis, non tantum legi, sed et examinavi: et (mirum dictu) Vir caetera ingeniosus ita paralogizare deprehensus est, ut vix tyro possit magis; sed perplexitate exprimendi se fortasse ipsum decepit successu apparente. Adjeci examen, rogoque ut consideres, mihique sententiam Tuam perscribas, deliberesque mecum, an e re sit mittere ad Acta. Satis apparet quidquid affectet, non satis ab ipso intelligi usum Calculi infinitesimalis, et induisse sese in spinas, fere ut olim Dnus. Sauveur Parisiis. Usum Catenariae ad fornices non satis concepisse animo vel explicuisse videtur. Et sane mereretur res exponi a Te distinctius.

Dni. Tschirnhausii processum Tecum admiror, vellemque actum fuisse apertius, et suum cuique tributum.

Venio nunc ad ea quae in Epistola Tua novissima sunt *μεταφυσικώτερα*. Colligis ita: S i o m n e s t e r m i n i h u j u s p r o g r e s s i o n i s $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. a c t u e x i s t u n t, e t i a m e x i s t e r e i n f i n i t e s i m u m, e t q u i e u m s e q u u n t u r. Respondeo: Collectionem esse probam, si concedatur aliquem revera esse terminum infinitesimum, aut post-infinitesimum, id ipsum vero a me non concedi.

Quaeris 1°. quid per materiam per se, seu materiam primam sive molem, a secunda distinctam, intelligam. Respondeo: id quod est mere passivum, atque ab animabus vel formis sejunctum.

Quaeris 2°. quid mihi hic sit incompletum? Respondeo: passivum sine activo, et activum sine passivo.

3°. Petis, ut Tibi dividam portionem massae in substantias, ex quibus componitur. Respondeo, tot in ea esse substantias individuas, quot in ea sunt animalia sive viventia vel his analoga; itaque eodem modo divido, ut gregem sive piscinam, nisi quod liquidum interjectum inter animalia gregis aut inter pisces, itemque liquidum (imo et reliquam massam) in quolibet pisce vel animali contentam, rursus ut novam piscinam dividi debere arbitror, et sic infinitum.

4°. Monadem completam seu substantiam singularem voco non tam animam, quam ipsum animal aut analogum, anima vel forma et corpore organico praeditum.

5°. Quaeris, quousque progrediendum, ut habeamus aliquid, quod sit substantia, non substantiae. Respondeo, talia statim offerri etiam sine subdivisione, et unumquodque animal tale esse. Neque enim ego, Tu, ille componimur ex partibus corporis nostri.

6°. Vereris ne materia componatur ex non-quantis. Respondeo, non magis eam componi ex animabus, quam ex punctis.

Quanto plura quaeres, eo magis videbis connexionem firmitatemque sententiae, non levi consideratione, sed post diuturnam a longo tempore tractationem et retractationem tandem constitutae, et fortasse aliquando non minus probabis haec μεταφυσικώτερα, quam illa δυνάμικα.

Dnus. Bayle, auctor Dictionarii duobus in folio voluminibus editi, qui olim Novellis Reipublicae Literariae operam dederat, cum non in Philosophia minus, quam Historia valeat, lectis quibusdam meis Philosophicis in Diario Gallico et Batavo, objectiones quasdam humanissime propositas inseruit Dictionario suo, voce: Rorarius. Eas cum nuper legissem, responsionem modestam misi Dno. Basnagio, ut si videatur inserat suae Historiae Operum Eruditorum, modo Dnus. Bayle assentiatur. Hic responsionem meam secum communicatam sibi non tantum pulchram, sed et efficacem (fortem, ut Gallica vox habet) videri, significavit ipse Literis humanissimis ad me datis, editionemque ejus gratissimam sibi fore professus est. Quaeram, an adhuc aliquid ipsum moretur?

Pro Varignonianis notitiis, quae sane mihi valde placent, gratias ago. Oenometrum Langlosianum compositius est, quam ut facile homines id sint in ordinariam praxin deducturi.

Quoniam Historia Academiae Scientiarum Regiae typis paratur, rogo ut quaeras, sed tanquam per Te, an aliqua et qualis ibi mentio mei, cui reapse ibi datus fuit a Rege locus, etsi tunc cum introducendus eram, Johannes Fridericus, Dux Brunswicensis, me evocavit ad se; quod ipsum tanquam Tibi notum addere potes, quo minus Dnus. Varignonius quaestionem miretur.

Nosse etiam velim, quis Auctor Historiae, utrum Dnus. Abbas Gallois, an Dnus. Fontanella, qui nunc Secretarius est Academiae, auctor Dialogorum de Pluralitate Mundorum; et utrum Memoriae Physico-Mathematicae, quae coeptae erant, nomine Academiae continuentur.

Est quidam Machinista in Gallia, qui multa promittit, etiam in Mercurio Elegante (Mercure Galant) ejus nomen nunc non succurrit. Quantum intelligo nonnulla etiam executus est, sed aliorum spem facere voluit, quae mihi non videntur possibilia. Interim ipse peritia enchiresium et rei manuariae non contemnendus saltem videtur: promiserat inter alia currum non evertendum (un Carosse inversable). An et quid tum in hoc, tum in aliis reapse praestiterit, quod alicujus sit momenti, a Dno. Varignonio discere poteris, cui facile etiam erit judicare ex dictis, quis ille qui designatur, et quem nunc nominare non possum. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{28}{18}$ Septemb. 1698.

P. S. Haec jamdudum scripseram, una cum Examine Gregoriano, sed descriptionem et expeditionem varia distulere. Interea nomen Mechanici in mentem venit, credo Garoust. Adjeci et P. S.*) separatum, quod, si ita videbitur, Dno. Voldero communicare possis.

P. S. Etsi contentus videatur Dn. Volderus Tua solutione, quae verissima est prorsusque ad mentem meam, fortasse tamen non inutile judicabis, Viro Clarissimo cum multa a me salute significare, similem observationi ejus in Hyperbola secunda, ubi absurditas non nisi ab una parte, meam observationem in Hyperbola prima seu simplissima vel Apolloniana, ubi aeque ab utraque parte incommodum nascitur, similisque Tuae solutio ad me olim adhibita est; quae etsi Tibi non innotuerit,' facit tamen eorundem princi-

---

*) Dasselbe folgt unmittelbar.

piorum nobis communium accurata perceptio, ut pro se quisque saepe etiam diversissimis itineribus incidentes, tamen consentiamus.

Majoris momenti est quaestio de Vis Elasticae origine, quae Tibi cum ipso occasione Dynamicorum meorum intercessit; itaque mentem meam vobis exponere operae pretium visum est. Ego cum Vim Elasticam corporibus reapse in natura existentibus essentialem esse statuo, id non ita intelligo, quasi ex animabus vel formis immediate sit petenda, sed quod nascatur ex structura Systematis totius Universi, quam divina sapientia, rerumque adeo Leges a Deo ipsis inditae, et Principia dynamica ex reali metaphysica deducta, atque eo ipso formis a Deo creatis (seu virtutibus divinitus impressis) connexa, postulabant: ut scilicet dato corpore utcunque exiguo detur fluidum multo subtilius, ambiens atque perlabens, unde Elastrum corporis. Alioqui enim non observaretur magnum illud, et ut mihi videtur inviolabile Naturae ordinatae Axioma, quod primus forte observavi singularique dudum ratione adhibui in Novellis Reipublicae literariae et Legem Continuitatis voco, et quod cum Hugenio Atomis faventi altero ante obitum anno objicerem, consideratu dignum fassus est: nempe nullum in transitionibus esse saltum, et quod adeo nulla mutatio assignabilis fit in instanti, neque proinde a motu ad quietem vel contrarium motum, aut vice versa, nisi per intermedios gradus transiri potest. Unde illi qui statuerunt (uti quidem faciunt vulgo omnes) motum non fieri per saltum, seu corpus non transire a loco in locum nisi per intermedia loca, veritatem viderunt, sed non totam; idem enim observatur non minus in gradibus, quam in locis. Haec autem evitatio saltus in mutationibus corporum obtinetur per vim elasticam ipsis inexistentem. Ita enim fit, ut corpora in concursu sese comprimentia et mox restituentia paulatim sibi cedant et graduali translatione directiones viresque et ipsas, ut demonstratum vidisti, actionum motricium quantitates (longe a vulgo intellecta Quantitate motus diversas) conservent. Vides quoque hoc naturae principio Atomos Democriticas, primumque etiam et secundum Elementum Cartesianum de medio tolli; quemadmodum etiam hoc velut Lydio lapide erroneas Cartesii, Malebranchii aliorumque Leges, naturae ascriptas, tanquam oculari examine reprobavi, ut nosti. Ab anima igitur vel forma (ut ad hoc redeam) nulla specialia phaenomena deduco,

sed tantum naturam corporis et virium in universum. Gravitatem vero, Vim Elasticam, Attractiones, Repulsus, Directiones Magneticas et alia id genus mechanice explicanda censeo; sed ipsa principia ἀπὸ τοῦ δυναμικοῦ seu a formis derivo, tanquam a Deo inditas, et nunc insitas naturae corporeae Leges. Neque enim putandum est, naturam praescripto Dei obedire, velut edicto promulgato subditi parent, aut Deum ipsam semper velut exorbitantem in viam cogere et opus suum corrigere, ut mali automatopoei solent; sed Leges dando simul dedisse rebus vim nisumque eas observandi, in quo ipso consistit natura Entelechiarum. Etsi verum sit interim, et has ipsas et omnem in rebus realitatem divina emanatione perpetuo subsistere et conservari.

LXXXV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Groningae d. 8 Novembr. 1698.

Quod literae meae, quas perditas credideras, iterum comparuerint, valde laetor. Paralogismos Gregorianos, quos ego fugitiva perlustratione notaveram, egregie in ordinem redegisti. Meo judicio minime male facies, si examen Tuum quantocyus ad Acta miseris, ut videat Gregorius, ubi illud legerit, se Calculum infinitesimalem nondum in tanta perfectione possidere, ut quidem sibi imaginatur. Viso Tuo examine eoque perlecto attentius, nunc magis confirmor in eo, quod statim conjecturabam, quod scilicet pedem calceo accommodaverit, id est, quod ex solutione nostra quaesiverit modum solvendi. Et hoc credo ipsi ansam dedisse, ut tot paralogismos consueret, illosque apparenti successu fascinatus, videre nequiverit vel potius videre noluerit, quos procul dubio ab alio commissos vidisset, simiarum naturam habens, quae catulorum suorum deformitatem ut pulchritudinem perfectam demirantur.

Μεταφυσικώτερα Tua non improbo, et facile illa admittam, ut Tua *δυναμικά*, si modo claram eorum ideam mihi excitaveris. Responsiones Tuae pro hoc nimis sunt Laconicae, suntque definitiones potius, quam explicationes. Videtur mihi contradictio, dicere

omnes terminos hujus progressionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. existere, infinitesimos autem revera non esse terminos: si enim infinitesimi non existunt, tunc finiti tantum sunt termini, ergo non omnes existunt, contra hypothesin. Video quidem quo tendas, nempe non posse perveniri ad terminum infinitesimum, quia quamdiu continuamus progressionem, tamdiu termini sunt finitae magnitudinis. Sed non quaeritur, quousque nos sive actu sive conceptu pervenire possimus, sed quousque a natura ipsa jam perventum fuerit. Concedis autem omnes terminos simul existere, ergo sane etiam infinitesimus existit, et revera existit vel revera est; nisi enim esset, non existeret.

1°. Per materiam per se seu materiam primariam sive molem, a secunda distinctam, dicis Te intelligere id, quod est mere passivum atque ab animabus seu formis sejunctum. Sed Cartesianus, qui formarum nullam habet ideam, quique corporis naturam in extensione unice ponit, hic Tibi replicaret, se nescire quid illud sit, quod a formis sejunctum.

2°. Incompletum dicis Tibi esse activum sine passivo et passivum sine activo. Potuisses dicere incompletum esse materiam primam sine forma, et formam sine materia prima. Sed tunc Cartesiano, nullam distinctionem agnoscenti inter materiam et formam, eadem quae in praecedenti difficultas suboriretur.

3°. Si concedatur, massam esse congeriem viventium vel his analogorum, poterit dividi in substantias individuas. Sed Cartesiani negabunt, in corporibus esse aliquid animae analogum, vel quid illud sit analogum, clare sibi explicari postulabunt.

4°. Si Monas completa seu substantia singularis Tibi est animal vel analogum, anima vel forma et corpore organico praeditum, negabunt Cartesiani praeter hominem talem monadem dari.

5°. Concedo, non longe progrediendum, ut habeamus substantiam, non substantias; unusquisque enim homo talis est. Sed corpus quod vocant inanimatum, ut silex, quousque dividendus est, ut habeas substantiam, non substantias? silex enim, secundum Te, non est substantia, sed substantiae.

6°. Nunquam veritus sum, ne materia, scilicet secunda, componatur ex non-quantis, sed ne componatur ex punctis forma praeditis, quia minimum corpusculum, licet infinite exiguum, non substantiam facit, sed substantias. Oportet ergo substantiam sin-

gularem esse punctum cum forma, non quantum cum forma; alias in plures divideretur substantias.

Video rem totam eo recidere, ut formam vel illud animae analogum clare explices. Non quidem alienus sum, admittere tertium quid in corpore praeter extensionem et impenetrabilitatem, si modo aeque claram ejus ideam habere possim, ac habeo extensionis et animae. Scio etiam tertium illud posse existere, licet ejus essentiam clare concipere nequeam; contra quorundam Cartesianorum pertinaciam, qui statuunt, id quod clare et distincte a nobis concipi non potest, non existere; oporteret enim prius demonstraverint, se clare et distincte percipere posse quicquid existit: alias non minus absurde concluduut, quam caecus faceret, qui ex eo, quod solem nunquam viderit neque videre possit, argumentari vellet, illum non existere: id quod non semel tantum ipsis objeci. Sed antiquae cantilenae obstinate inhaerentes, surdi sunt suamque perpetuo obtrudunt regulam clarae et distinctae perceptionis, juxta quam rem esse, vel non esse, judicant. In horum igitur gratiam, pleniorem Tuam explicationem desiderarem, ut data occasione illis occurrere possim. Quid? si vocabulum animae analogi vel formae, quod odiosum est, relinqueres, illamque diceres consistere in conatu quodam insito vel vi primitus impressa, sine qua corpus non esset corpus, sed pura puta extensio uniformis, quam ita appellarem loco Veterum materiae primae; absolveres credo negotium longe facilius, atque felicius assuefaceres mentem Cartesianam insitatis terminis, quam veteribus, quibus vel auditis tantum statim efferatur. Possent enim hinc omnia Tua dynamica aeque facile salvari, et Naturae phaenomena, ut elasticitas, impenetrabilitas, conservatio quantitatis virium etc. explicari. Nec puto Cartesianos talem conatum insitum, seu vim impressam jure exsibilare posse; coguntur enim et ipsi statuere materiam cum motu simul creatam esse. Quidni ergo etiam cum motu infinite tardo? id est, cum conatu ad motum seu cum tali vi, quam Tu vocas aptissime mortuam, qua unamquamque materiae particulam, quantumvis exiguam, donatam esse existimarem, et quidem pro diversitate complicationis horum conatuum eorumque directionum et tendentiarum, putarem diversa hujusmodi corpora oriri. Sane non ausim negare, creationem materiae secundae constitisse dumtaxat in varia ista impressione conatuum; nolim tamen asserere extensionem illam uniformem seu materiam primam

praeextitisse ab aeterno adeoque cum Deo unicam substantiam fuisse', ne spinosizare videar: ipsa enim illa diffusione virium extensionem concreatam esse, mihi sufficit dicere.

Transmisi statim Voldero post-scriptum tuum; habebit, non dubito, etiam suos scrupulos circa ea, quae de formis dicis. Consului ipsi, ut ad Te ipsum scribat, si quid monendum haberet. Quae ibi habes de continuitatis lege, impense mihi placuerunt; sed quod observas celeritatem non uno impetu imprimi, sed a quiete per omnes gradus intermedios ascendere, Te non invito dixerim, etiam me habuisse tales cogitationes jam a longis annis. Id vero paulo aliter exprimere solebam, dicendo Naturam nihil ex abrupto neque incipere neque finire, eodem modo ac omnis curva principio et fine careat, id est, vel in se redeat vel utrinque in infinitum abeat, salvis tamen nonnullis exceptionibus; hinc quantitates successive crescentes vel decrescentes non solum non per saltus augeri et diminui posse, sed etiam non posse generari vel destrui uno impetu. Et hoc fere est ex praecipuis rationibus, quae me induxerunt ad conjecturandum, quod forte tot gradus infinitatis sint supra nostrum magnitudinum genus, quot infra sunt gradus infinitae parvitatis, hoc enim argumento ad Varignonium utebar; vel saltem, quia infinitum et infinite parvum in rerum Natura Tibi displicet, sumamus non quidem infinita, sed incomparabilia, quemadmodum enim microscopiis detegimus animalcula incomparabiliter minora, quam nos et caetera animalia nobis consueta, et procul dubio ista animalcula, si et sua haberent microscopia, iterum detegerent alia se iterum incomparabiliter minora, et sic porro: unde cum naturae non sit consentaneum secundum meum principium ex abrupto subsistere, colligo (videas, per me licet) alia animalia in rerum natura posse existere, quae nobis nostrisque animalibus consuetis, in eadem ratione majora sint, in qua illa animalcula microscopio detecta sunt minora, quaeque nos, in nostro mundo, suo microscopio intueri solent, ut nos intuemur talia animalcula innumera. Et alia rursus esse posse animalia incomparabiliter illis majora, sicque tot gradus pono ascendendo, quot inveni descendendo. Quis enim potentiae divinae limites posuerit? quippe non video (ut jam serio loquar) cur nos nostraque animalia hanc praerogativam habere et supremum gradum constituere deberemus, quia, ut clare patet, etiam talia animalcula incomparabiliter nobis minora sibi adulari possent, se

stuamque guttulam, in qua habitant, totum constituere universum, si modo haberent animam rationalem, ut ita ratiocinari possent. Concede, vel finge saltem, granulum piperis (in quo pariter multae myriades animalculorum, teste Leuwenhoeckiana et mea ipsa autopsia, microscopio conspiciuntur) habere suas partes nostri mundi partibus per totum proportionales, scilicet suum Solem, suas Stellas fixas, suas Planetas cum Satellitibus, suam Tellurem ornatam montibus, campis, sylvis, rupibus, fluviis, lacubus, maribus, variisque animalibus: Credisne hos pipericolas, qui omnia ista objecta sub eodem visionis angulo adeoque sub eadem magnitudine adspicerent, qua nobis nostra apparent, non eodem jure putare posse, extra suum granulum nihil esse, quo nos putamus nostrum mundum omnia complecti? Nam quamnam, quaeso, haberent rationem et quamnam experientiam, quae contrarium ipsis persuaderent, quaeque miscellis istis creaturis ostenderet alium esse mundum suo incomparabiliter majorem cum incolis pariter incomparabiliter majoribus? Jam vero, si isti pipericolae id scire non possint, quis ergo nostrum scit, annon totus noster Mundus adspectabilis forte sit granum tantum, respectu alius incomparabiliter majoris? Est enim utrobique par ratio. Sed aliae mihi sunt conjecturae, quas hic recensere nimis longum foret, quae tamen ex ea lege Naturae, nunquam abrupte incipientis vel desinentis, egregie confirmantur.

Incidit jam de lege continuitatis cogitanti, quod apud Newtonum aliosque legisse memini, gravitatem corporum extra terram esse reciproce in duplicata ratione distantiarum a centro, sed intra terram esse directe in simplici ratione distantiarum. Hoc mihi videtur aliquo modo adversari continuitatis legi, dum incrementa gravitatis in ipsa terrae superficie per saltum mutarentur in decrementa. Nam si ad rectam, a centro terrae prodeuntem, concipiantur applicari ordinatae gravitatem in singulis a centro distantiis exprimentes, erunt applicatae extra terram ad Hyperbolam secundi gradus, intra terram vero ad lineam rectam; jam vero Natura transitum faciens subitaneum ab una linea ad alteram continuitatis legem violare videtur. Tuam hac de re sententiam intelligere haud ingratum erit.

Quae scire desideras, curabo diligenter, ut discam a Varignonio. Oblitus es remittere mihi ejus literas. Examen solutionis Gregorianae, quia non petis, non remitto; si vero nullam ejus de-

scriptionem asservasti, remittam statim; fac modo, ut id resciscam quantocyus. Vale et fave etc.

P. S. Quod Catenaria vera sit curvatura fornicis, ex eo patet, quod omnes partes catenae, dum libere pendet, eum situm sumunt, ut inter se aequilibrentur; unde fit, ut si tota catena, eum partium situm retinens, circa horizontalem converti intelligatur, donec verticaliter sursum erigatur, partes catenae eundem situm etiamnum servare debeant, cum enim nulla pars alteram majori vi extrorsum urgeat, quam ipsa ab ea extrorsum urgetur, propterea quod directio gravitatis partium non fuerit mutata, sed tantum in contrarium determinata; sane altera alteram suffulcire adeoque tota catena, licet flexilis, ita arcuata manere debet, ad instar fornicis rigidi: et sic catenaria est aptissima figura fornici concilianda. Sed fallitur Gregorius, quod putat ordinariam Catenariam, quam scilicet induit catena uniformis gravitatis, solam aptam esse pro fornice. Liquet enim clare, fornicem posse esse circularem, parabolicum vel cujuscunque alterius figurae, si modo lapides quadratarii (les voussoirs) fornicem constituentes debiti ponderis fiant, pro ratione ponderis partium catenae non-uniformis gravitatis, quae libere pendendo eamdem curvaturam, quam fornici dare voluimus, indueret. Ridiculum hinc est, quod Gregorius dicit, fornices vulgares non ad figuram Catenariae ordinariae factos, ideo tantum se sustentare, quod cum habeant sat magnam latitudinem, semper intra suos limbos contineant veram curvaturam catenae. Si enim hoc esset, inferior fornicis limbus semper corrueret; vel si murus exstrueretur super duabus columnis, non totus murus corruere deberet, sed portio tantum quaedam excidere, quae cavitatem relinqueret, ad figuram catenae formatam: et sic natura sponte sibi faceret fornicem; quod lepidum est. La Hirius in suo Tractatu Mechanico, Propp. 123, 124 et 125, affinitatem inter fornices et catenarias suboluisse videtur, nec tamen rem satis assequi potuit, nostro calculo destitutus. Vidit aliquid; quid autem viderit, ipse non intelligit.

LXXXVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quia Tibi non displicent animadversiones meae in Gregorianam Catenariae solutionem, rogo ut eas Tuis inclusas ad Dnum. Menckenium pro Actis mittas, ita ut necesse non sit ei indicare, a quo sint. Dudum enim pollicitus est se Actis inserturum, si quid sine stomacho moneremus.

Dicis meas circa μεταφυσικώτερα illa nimis esse laconicas; sed dedi, ni fallor, operam, ut loquerer accurate et rotunde. Quodsi quae dubitationes supersunt, iis respondendo satisfacere conabor. Ais me attulisse difinitiones potius, quam explicationes. Sed utinam semper definitiones afferrentur! nam illis explicationes virtute continentur. Quod terminos infinitesimos attinet, videtur mihi non tantum ad eos non posse a nobis perveniri, sed etiam eos non esse in natura, id est, non esse possibiles; alioqui fateor, ut jam dixi, si concederem esse posse, concederem esse. Videndum ergo, quanam ratione demonstrari possit, possibilem (exempli gratia) esse lineam rectam infinitam, et tamen utrinque terminatam. Sed ad tuos numeros venio.

Ad 1. Cum dixi materiam primam esse id, quod est mere passivum et ab animabus seu formis sejunctum, bis idem dixi; seu perinde est, ac si dixissem esse mere passivam et ab omni activitate sejunctam. Formae enim nihil aliud mihi sunt, quam Activitates seu Entelechiae, et substantiales quidem sunt Entelechiae primitivae.

Ad 2. Malui dicere incompletum esse activum sine passivo, et passivum sine activo, quam materiam sine forma, vel contra, ut scilicet potius explicatum ponerem, quam explicandum, et ut quodammodo uterer consilio Tuo antequam dares, quando minus activitatum, quam formarum nomine offenditur vulgus Neotericorum.

Ad 3. Cartesianos negantes in corporibus esse aliquid animae analogum non debemus morari, cum nullas habeant rationes negationis, nec sequitur, quod non possumus imaginari id non esse.

Ad 4. Ridiculum mihi dudum visum est, naturam rerum adeo fuisse pauperem vel avaram, ut soli massae tantillae, qualis huma-

norum est corporum, in hoc nostro Globo prospiceret de animabus, cum posset omnibus, nullo ad caetera sua destinata impedimento.

Ad 5. Quousque silex dividi debeat, ut occurrant corpora organica adeoque Monades, haud scio; sed facile agnosco ignorantiam in his nostram nihil praejudicare naturae.

Ad 6. Puto nullum dari minimum Animal vel vivens, nullum sine corpore organico, nullum cujus corpus non dividatur rursum in plures substantias. Ergo nunquam devenitur ad puncta viva seu formis praedita.

Si claram habes ideam animae, habebis et formae; est enim idem genus, species variae.

Optime judicas, quae nos distincte et clare non percipimus, ideo rejici non debere.

Boni illi Cartesiani, quidquid jactent de sua clara et distincta perceptione, mihi ne extensionem quidem sic percipere videntur.

Caeterum, si Animam vel Formam concipiamus, ut primam activitatem, cujus modificatione oriantur vires secundae, ut extensionis modificatione oriuntur figurae, puto nos intellectui sic satis consulere.

Nempe ejus, quod essentia sua mere passivum est, nullae possunt esse modificationes activae, quoniam modificationes limitant magis, quam augent vel addunt; itaque praeter extensionem, quae est sedes vel principium figurarum, debemus ponere sedem vel πρῶτον δεκτικὸν actionum, nempe animam, formam, vitam, entelechiam primam, ut appellare lubebit.

Prorsus probo consilium Tuum, ut apud Cartesianos aut similes abstineamus mentione materiae primae et formae substantialis, contenti mentione massae per se passivae et entelechiae seu activitatis primitivae, animae, vitae.

Optime etiam sentis, complicatione virium insitarum oriri corpora omnia in mundo, nec dubito quin materiae ipsi coaevae sint vires, quia arbitror, materiam per se sine viribus subsistere non posse. Puto tamen, aliud esse Entelechias primitivas seu vitas, quam vires mortuas, quae et ipsaemet fortasse semper oriuntur ex vivis, ut apparet, cum conatus recedendi a centro, qui inter vires mortuas computari debet, oritur ex vi viva circulationis. At vita vel Entelechia prima aliquid amplius est, quam conatus aliquis simplex mortuus; puto enim inesse ei et perceptionem et appeti-

tionem, quasi in animali, utramque respondentem praesenti statui organorum.

Plane ad mentem meam disseris confirmasque quod dixi, mutationes non fieri per saltum. Praeterea non irrideo, sed plane profiteor, esse animalia in mundo, tanto majora nostris, quanto nostra sunt majora illis microscopiorum animalculis. Neque ullum natura terminum novit. Et fieri potest vicissim, imo fieri debet, ut sint in minimis pulvisculis, imo Atomulis, Mundi nostro non inferiores pulchritudine et varietate; neque quicquam prohibet (quod magis mirum videri possit) animalia moriendo in tales mundos transferri; ego enim mortem nihil aliud puto esse, quam animalis contractionem, ut generatio nil nisi evolutio est.

Gravitatem esse in duplicata ratione reciproca distantiarum, mea dudum fuit sententia ante Newtoni opus, in quam deveni non tantum successu a posteriori, sed etiam ratione a priori, quam miror ipsi non animadversam. Nempe abstrahendo animum a physica ratione gravitatis, manendoque in terminis notionis mathematicae, considero gravitatem ut attractionem factam radiis quibusdam seu lineis attractivis, exeuntibus a centro attrahente; itaque, ut in radiis luminis densitates illuminationis, ita in gravitatibus attractionis, uno verbo, radiationis densitates erunt in ratione duplicata reciproca distantiarum a radiante. Puto autem, eandem legem nonnisi per gradus mutari appropinquando ad terram, ubi scilicet ipsum radians minus incipit habere naturam puncti; sed ubi in terram ipsam inciditur, potest nova Lex oriri, ut si (fig. 141) corpus, quod ivit curva AB, post eat recta BC, ob novam causam, quanquam omnia expendendo, ne sic quidem violari debeat Lex continuitatis, nec reapse violetur, etsi linea mutetur.

Quod Catenaria sit linea fornicis, fortasse locum habet, si fornix est superficies seu sine crassitie vel altitudine, ita ut ejus sectio verticalis sit linea; sed si habeat crassitiem, ita ut sectio sit superficies et in ipsa crassitie concipiatur, quod impediat rupturam, ut in trabibus a Galilaeo, et paulo adhuc aliter a me olim in Actis Lipsiensium *) consideratis, patet alia in considerationem venire debere, atque adeo Lineas fornicum adhuc esse quaerendas, cum illi plus, quam uno extremo sustentantur. Nam cum gravia

---

*) Demonstrationes novae de Ristentia Solidorum, Act. Erudit. 1684 Jul.

in longitudinem ex uno fulcro projecta sunt, tunc per ea, quae olim a me exposita sunt, principium solvendi habetur.

Literas Varignonii me remisisse putabam, sed praeter opinionem adhuc penes me repertas nunc remitto cum actione gratiarum.

Nihilne amplius a Dno. Marchione Hospitalio, Dno. Varignonio, aliisque amicis ad Te pervenit, unde proficere possim? Quid Dnus. Marchio Hospitalius? an in valetudinis gratiam meditationibus nuntium remisit? an sibi canit et Musis?

Quid Analytica nostra? in quibus indies aliquid utile a Te praestari non dubito. Vale etc.

Dabam Hanoverae 18. Novemb. 1698.

P. S. Problemata Dno. Fratri vel aliis proposita, vellem et Dno. Newtono communicari curasses, pro incremento Scientiae. Accipio jam et Acta Octobris, ubi Tua quaedam *), in quibus, cum alia valde, tum id probo, quod Dno. Fratri illic ita respondes, ut nullam offensae causam jure habere possit. Unum addo, me Tibi novam applicationem Calculi differentialis non quasi pro Tuis communicasse (ut ex dictis videri potest) sed cum celare possem libere et generose, et ut esset qui uteretur, quando id mihi non satis licet.

LXXXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Animadversiones Tuas in Gregorianam solutionem ad Acta mittam prima occasione, qua Dno. Menkenio scripturus sum; sed vereor ne Te Authorem suspicetur, ubi viderit correctiunculas hinc inde Tua manu scriptas.

Concedo definitionibus contineri explicationes, sed ostendendum est, quod sint definitiones rei non nominis; secus enim non magis sequitur, definitum ita sese habere in rerum natura, quam sequitur Centaurum existere, ex eo quod illum clare definio et

---

*) Theorema universale rectificationi linearum Curvarum inserviens etc. und Annotata in solutiones problematum quorundam horum etc. Act. Erudit. 1698.

explico, dicendo: Centaurus est animal corpus habens ex humano et equino compositum; quamvis non negem, quin forte talis aliquis existat, quia indies multa alia nascuntur monstra. Ita pariter tua μεταφυσικώτερα possunt esse vera, sed veritatis demonstrationem expeto, quam hactenus nondum vidi. Vellem ex. gr. mihi demonstres corpora, quae vulgus vocat inanimata, suas habere perceptiones et appetitiones, adeoque suas animas, et quidem unumquodque innumeras, quatenus scilicet conflatum est ex innumeris substantiis seu Monadibus. Sed literarum Tuarum filum sequor.

Quantum ad terminos infinitesimos, aut Tu me aut ego Te non intelligo. Dico, si infinitesimi non essent in natura, tunc utique numerus terminorum foret tantum finitus, ergo non omnes existerent, contra hypothesin. Sed ecce hoc facio dilemma: Numerus terminorum in natura existentium aut finitus est, aut infinitus; tertium non datur. Si finitus, tunc omnes non existunt, quia possent dari plures; si infinitus, ergo eo ipso existit infinitesimus et qui eum sequuntur. Dices forsan, esse terminos numero infinitos et tamen singulos finitae magnitudinis, ceu manifestum est in hac progressione $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. ubi necessario infiniti sunt termini magnitudinis finitae; nam si tantum essent finiti (numero) termini magnitudinis finitae, tunc numerus terminorum foret determinatus, quod est absurdum. At si ex altera facie progressionem considero, quatenus si infiniti numero sunt termini, necessario infinitesimus existit, concludo hunc necessario debere esse infinities minorem termino finito, id est, debere esse infinite parvum. Jam ad numeros pergo:

1° Dicis materiam primam (quam ego extensionem uniformem seu potius informem nominarem) esse id, quod est mere passivum et ab animabus seu formis sejunctum: et alibi dicis, materiae primae coaevas esse vires seu formas, illamque sine his subsistere non posse. Ergo passivum ab activo realiter sejunctum non est nec esse potest, sed mentis tantum abstractione, quatenus illud sine hoc considerare possum, ut in Geometricis facimus. Sed quaero tamen, annon Deus per omnipotentiam suam potuisset creare passivum sine activo, seu materiam primam sine animabus vel formis, siquidem animas, nempe Spiritus et Angelos, sine materia seu activum sine passivo creaverit. Et posito po-

tuisse creare solam extensionem seu materiam sine forma, annon tuto supponere possemus vacuum? ibi enim esset extensum sine corpore, et tamen non esset nihil, sed substantia extensa distincta a corpore, unde hoc vacuum a Cartesianorum quidem argumento refelli non posset.

2. Capio mentem Tuam de incompleto: sed si activum sine passivo seu forma sine materia est incompletum quid, sequi videtur, Spiritus, Angelos, et ipsum Deum, qui Ens est completissimum, esse tamen incompletos. Video quid sis responsurus, nempe Te hic intelligere incompletum compositionis, non perfectionis. Dispice tamen, ne malevolis et invidis cavillandi et in deteriorem sensum detorquendi causam suggeras.

3. Verissimum est, Cartesianos negantes in corporibus esse aliquid animae analogum, suae negationis non habere rationem; sed affirmanti incumbit probare. Interim non dicunt, quantum ego scio, quod non possumus imaginari, id non esse: potuissent enim quotidiana experientia falsitatis convinci, cum caecus ex. gr. Solem imaginari non possit et tamen Sol existat: sed id non esse asserunt, quod clare et distincte concipere nequimus; quod tamen, meo judicio, aeque absurdum est ac prius.

4. Ergo datur particula silicis, quae substantia est, non substantiae. Dixeras autem, corpus quodvis non esse substantiam, sed substantias.

5. Quia arbitrabar Te in ea esse sententia, nullum corpusculum tam exiguum esse, quod possit dici unam esse substantiam, et non plures, merito me inferre credebam, substantiam singularem non esse extensam, sed merum punctum. Sed ex articulo praecedente didici, Te comprehendere substantias in substantia.

Non valet consequentia: si habeo ideam animae, ergo et formae, quia sit idem genus et species variae. Habeo ideam animalis tanquam generis, non vero hujus, vel illius speciei animalis, quod nunquam nec pictum nec vivum vidi: habeo etiam unius speciei ideam, ita ut non statim alterius speciei ideam habeam, licet sub eodem genere contineantur.

Fateor, nonnullas vires mortuas oriri ex vivis, ut conatus recedendi a centro, vis elastri, gravitas etc. sed non ideo sequitur, non posse dari etiam conatus primitivos et insitos; et nisi in hujusmodi conatibus constitueris Tuas Entelechias primitivas seu vitas, fateor iterum me non posse assequi, in quo illas consistere

facias. Dicis, ipsis inesse perceptionem et appetitionem; ergo quid diutius cunctaris? Dic, Entelechias illas Tuas esse animas rationales; solins enim animae rationalis est percipere et appetere, uti Cartesiani dicunt, et sic Te dispensabunt ab ulteriori explicatione, sed negabunt hujusmodi animas corporibus competere.

Non miror, Te mihi assentiri, quod conjecerim esse animalia in mundo, tanto majora nostris, quanto nostra sunt majora illis microscopiorum animalculis. Tibi enim totum Universum est congeries animalium. Sed ego magis proprie id sumo, statuendo illa animalia nobis nostrisque animalibus incomparabiliter majora esse in sensu vulgari animalia, habentia corpus et membra nostris similia vel eorum loco aliquid analogi; interque illa animalia esse etiam intelligentia seu ratione utentia, id est, homines. Sed revera mihi mirum videtur, quod dicis, animal moriendo transferri, in mundum suo, in quo vixit, incomparabiliter minorem, et mortem nihil aliud esse, quam animalis contractionem: hoc quodammodo sapit μετεμψύχωσιν Pythagoricam.

Prout Mathematice explicas gravitatem, abstrahendo a causis physicis, video clare, legem rationis duplicatae reciprocae distantiarum a radiante nonnisi per gradus mutari appropinquando ad terram, ubi scilicet ipsum radians minus incipit habere rationem puncti. Sed non video, ubi in ipsam terram inciditur, novam Legem oriri: est enim intra et extra terram eadem causa gravitatis; praeterea, radians naturam puncti ubique servat; id enim est centrum terrae, versus quod gravia detruduntur. Unde non capio quod Newtonus dicit, non centrum tantum, sed omnia reliqua terrae puncta attrahere. Demus autem talem attractionem singulis terrae punctis inesse, adeoque illam agere in corpora, cum sunt extra terram, eadem lege, qua quando sunt intra eandem, non video, cur in ipsa terrae superficie talis subitanea mutatio accidere debeat.

Puto Catenariam etiam locum habere posse pro figura fornicis, licet cum crassitie vel altitudine fiat, si modo centra gravitatis lapidum quadratariorum fornicem constituentium sint in Catenaria; palam enim est catenam flexilem, quamvis ipsa sit nullius ponderis, si in aequalibus intervallis oneretur ponderibus aequalibus, etiam tunc debitam suam figuram induere: seu si concipias ipsam catenam gravem et flexilem, sed cum crassitie aliqua pendere ab extremitatibus et sponte induere curvaturam, et si jam intelligas in hoc situ rigescere, et circa horizontalem sursum con-

verti, habebis hoc modo fornicem cum crassitie, qui sola dispositione partium se sustentat, ad quam, ni fallor, in constractione fornicis operarii primario attendunt, quantillum enim illud sit, quod tenacitas materiae contribuit, vel exinde patet, quod fornix, ni debitam habeat figuram proprio pondere, utcunque exiguo, corruat, etsi nullum aliud onus superinstructum adhuc sit.

Diu est, quod nihil literarum acceperim a Dno. Varignonio, quod miror; jam ante ferias ipsi misi replicationem Diario inserendam, ad responsionem Fratris; mihi tunc quidem rescripserat, se eam accepisse, cum jam sub praelo essent ultimae pagellae, quae imprimendae adhuc erant ante ferias; quibus autem finitis, se sine mora schediasma meum imprimi curaturum. Interim jam a Divi Martini festo redincepti sunt labores, nec tamen mihi scribit quid factum sit: vereor ut valeat.

Annus est et plus, quod ne γρὺ quidem ab Hospitalio acceperim, aut de ipso inaudiverim: credo illum mihi iratum esse, quod ad ultimas suas literas jejunas admodum, ego pariter frigidiuscule responderim. Sed ejus iram parvum curo; si mea amplius haud indiget opera, certe nec mihi ejus gratia valde necessaria. At ecce epistolam Volderi, ubi invenies nonnullas objectiones contra Dynamica Tua, plerasque jam a Papino et me olim factas; si ad eas respondere dignaris, poteris ad me dirigere responsionem, quam ipsi mittam, quamvis consultius putarem, ut Tute ad ipsum scriberes, unde libertatem captaret ad Te vicissim scribendi. Meo judicio, etiam non male egeris, si Dynamicam Tuam, quam supprimis et cujus specimina tantum hactenus edidisti, plene in lucem emiseris, una cum Tuis responsionibus ad objectiones Tibi factas; ita enim semel pro semper labore respondendi defungeris, qui Tibi alias ad nauseam usque repetendus erit. Accenderet, spero, nobis lucem pro meliori Metaphysica, quam si ab ullo alio, a Te inprimis exspectamus, quamque etiam Te promisisse memini. Habemus duas Philosophias, Veterem et Novam, sed in utramque extremitatem peccantes; quid si Tu tertiam conderes, servando medium inter utramque? Ad hoc enim opus Te neminem aptiorem novi. Non dubito quin systema, si quod componeres, felicissimum successum habiturum esset. Sunt enim in Batavis nonnulli egregii Viri, qui hunc Tuum ingenii foetum fortiter foverent et defenderent, interque illos ipse Dn. Volderus, qui cum Cartesiana principia tanquam insufficientia et plurimum falsa, ut ipse mihi fassus

est, jam a longo tempore deseruerit, si Tua semel probe percepisset et imbibisset, dubium non est quin ea gnaviter propagaturus fuisset suisque discipulis, quorum semper insignem numerum habet, adeo esset inculcaturus, ut forte brevi dominium haberet supra Philosophiam Cartesianam et Aristotelicam, veteresque cum modernis quasi reconciliaret. Rogo Te etiam atque etiam, velis de hoc cogitare deque Orbe philosophico bene mereri. Consule quaeso nobis et posteritati, Tuoque nomini erige monumentum. Quid Te Cartesio inferiorem putas?

Quam mihi suades moderationem erga Fratrem, optarem ipse observasset. Offensor cum sit, ego vero offensus, fateris me in nupera mea responsione nullam ipsi offensae causam dedisse, quamvis jure potuissem; videbis autem, quam moderate sit replicaturus. Ob pressam scriptionem in margine non satis dignosco, an displiceat, quod in Actis mentionem fecerim novae Tuae applicationis Calculi differentialis: ignosce, id non feci animo derogandi, sed potius inventum Tuum exaggerandi; nec puto me dixisse, quod id mihi communicaveris pro meis, sed ex occasione meorum, quod ipse agnoscere videris in literis Tuis. Da igitur veniam, si hac in parte peccavi; rei circumstantia id postulabat. Potuisses me celare, non nego; ego vero generosius me egisse puto, si quid communicavi, quam si celassem. Vale et fave etc.

Groningae 6. Decembr. 1698.

LXXXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Domini Volderi epistola Tibi scripta pene unice ad mea pertineat, consilium Tuum secutus ipse respondi. Vereor tamen ne nimis prolixe; sed malui in hanc partem peccare, et contrahendi otium non fuit. Rogo autem, ut responsionem meam transmittas, et ubi eam firmare, illustrare, imo et corrigere opus videbitur, id ne omittas. Nunc ad Tuas venio, ubi cogor esse brevior, cum non satis ad ambas suppetat tempus.

Hactenus quaedam per modum Hypotheseos affirmo, quae demonstrare majoris molis foret; et sic interim explicationes vel

definitiones pro demonstrationibus sufficiunt, modo phaenomena faveant.

Non tam dico, corpora, quae vulgo inanimata vocantur (ut silices) habere perceptionem et appetitum, quam ipsis talia quae habeant inesse, ut vermes caseo.

De Infinitesimis res huc redit, ut probetur haec quam adhibes, propositio: Si infiniti numero sunt termini in serie, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. existit infinitesimus. Quid enim, si quilibet eorum sit finitus, et assignabili intervallorum numero distans a primo? Nec video, quid impediat concipi seriem conflatam non nisi ex terminis magnitudine finitis, sed numero infinitis.

Recte judicas, passivum ab activo in creaturis nunquam actu sejunctum esse; quid Deus potuerit, definire non ausim. Passivum solum, et vacuum, si non pugnant cum ipsius potentia, saltem pugnare videntur cum ipsius sapientia; nec certum est, Deo excepto, dari Intelligentias plane separatas. Et Patres plurimi in contrarium inclinavere, etiam Angelis corpora tribuentes.

Deus haud dubie est purus actus, quia est perfectissimus; sed imperfecta sunt passiva, et si aliter concipias, summuntur incomplete.

Homo substantia est; corpus ejus seu materia est substantiae; idem de vivente, quod in silice latet, dicerem.

Ut nos analogia nostrae animae quodammodo concipimus alias animas et intelligentias, ita volui analogia animarum concipiendas utcunque alias, si quae sunt, Entelechias primitivas, a nostro sensu nimis remotas: perfecte non concipi fateor.

Animas omnes atque Entelechias esse rationales, minime necesse est; qui sic colligunt Cartesiani, mihi nimis praecipites videntur in judicando de ignotis ex notis.

Etiam ego facile admiserim, dari animalia in sensu vulgi nostris incomparabiliter majora; et dicebam aliquando per jocum, posse esse systema aliquod nostro simile, quod sit horologium portatile Gigantis maximi.

Quoniam indicasse me puto, et publice etiam professus sum, nec incipere nec perire naturaliter posse Entelechias seu, ut ita dicam, Atomos substantiae, et corporis etiam organici destructionem nihil aliud esse, quam organorum involutionem; possibilitas illa translationis in systema exiguum, ubi omnia aeque bene, imo magis esse possent quam in nostro, ex mea sententia patet. Sed

non procedo ultra possibilitatem. *Μετεμψύχωσιν* in novum animal non probo, sed *μεταμόρφωσιν*, *αὔξησιν*, *μείωσιν* ejusdem animalis. Caeterum cum de origine animae aut animalis mutationibus locutus sum, diserte sum protestatus, de animae rationalis origine et statu nihil a me definiri, Regnumque Gratiae peculiares habere leges praeter eas, quibus gubernatur Regnum Naturae.

Non examinavi, quae Dn. Newtonus habet de lege attractionis intra terram, et inclino interim, ut judicio Tuo accedam. Terrae autem partes quoque, ut magnetis, attrahere, verisimile puto. De fornice res mihi altioris indaginis videtur, nec dubito Te, ubi animum intenderis, optime ejus formam posse definire.

Dn. Marchionem Hospitalium ad Te non scripsisse miror, cum quo alias crebro commutabat literas. Velim id non ab invaletudine aut mutato animo, sed ab occupationibus oriri.

Paraenesin Tuam, ut mea edam, tanquam verae benevolentiae signum accipio, et vellem per omnia expectationi satisfacere posse. Id facillimum est, ut edam quae cum viris Doctis contuli per literas. Interea conabimur progredi, neque mediocria ego mihi promitto ab ingenii Tui ope. Non sum ita factus, ut statim movear, si quid forte amicus dixit frigidiuscule, aut hoc a malo animo profectum putem. Tantum malebam videri sponte, quam commercio egisse. Vale etc.

Dabam Hanoverae 17 Decembr. 1698.

LXXXIX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Misi Dno. Voldero responsionem Tuam; efficaciter, clare et nitide rem exposuisti; religio mihi fuisset vel minimum immutare. Pro potestate tamen, quam mihi concessisti, adjeci nonnulla eorum, quae olim inter nos agitata fuere, ea nimirum quae ad penitus convincendum aliquid conferre mihi visa sunt, qualia judicavi esse Tua argumenta a priori: Actio faciens duplum tempore simplo est dupla (virtualiter) actionis facientis duplum tempore duplo etc. Item demonstrationem Tuam, qua demonstrasti, corpus sua vi, qua ascendere potest uno tractu

ad altitudinem 4 pedum, posse efficere, ut corpus idem vel aequale ascendat ad eandem altitudinem per vices. Hoc enim inprimis necessarium duxi, cum alias Volderus dubitare potuisset, ut ego quondam dubitaveram, an elevare libram L ad 4 pedes, ideo praecise idem sit, quod elevare 4 libras A, C, E, G ad unum pedem, quia utrobique quater fiat elevatio unius librae ad unum pedem. Id enim, quod illae elevationes non sunt similes, id est, quod pedes LM, MN, NP, PQ inaequalibus, pedes vero AB, CD, EF, GH aequalibus temporibus percurruntur, potuisset scrupulum injicere vacillanti adhuc; quem vero mox deseret, ubi viderit revera eandem potentiam requiri, sive libra uno saltu elevetur ad Q, sive per singulos pedes LM, MN, NP, PQ novo impetu concepto ascendat. Communicavi praeterea modum meum determinandi centrum oscillationis, ex principio conservationis virium, monuique, ex pulcherrimo consensu cum Hugeniano theoremate ab omnibus admisso elucescere veritatem hujus principii. Tandem etiam ipse exposui meum quondam actionis materiae gravificae explicandae modum, ut si forte negotium facesseret vulgaris explicatio, meam tantisper substitueret. Spero interim Volderum parti nostrae accessurum, ubi omnia sedulo perpendere voluerit; quod si fiet, pro haud mediocri lucro id reputabo, praesertim si felix successus incitamento Tibi foret ad meditata Tua, quorum quaedam frustatim tantum dedisti, jam plene edenda, posthabitis omnibus vulgi praejudiciis, et imperitorum hominum censuris. Velim consideres, initio non quaerendos esse turbae plausus, sed aequiorum judicum, licet paucorum, suffragia unice respicienda. Quocirca libenter hic repeterem, quae nuper monui et rogavi, si Te movere possem; sed nescio, quid Te induxerit ad opinandum, quasi dixerim frigidiuscule, quod ex ardentissimo tamen animo emanavit. Fac prout libuerit, ut vel sponte vel commercio egisse videaris, modo partus Tuus tandem in lucem veniat, nil refert qua via.

Ad reliqua Tua ita breviter respondeo. Concedent Cartesiani, silici caeterisque corporibus inanimatis posse inesse animalcula, ut vermes caseo: sed quemadmodum vermes non componunt materiam casei, seu id quod est caseus, utpote aliunde in illum translati vel ex ovulis seu semine generati; ita negabunt illa animalcula, quae forte hospitantur in silice, ideo facere materiam silicis, seu id quod est silex.

Propositionem hanc: S i infiniti numero sunt termini in serie, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. existit infinitesimus (quam adhuc probandam mihi superesse ais, ad demonstrationem perficiendam existentiae quantitatis infinite parvae) ita facile probo: Si decem sunt termini, existit utique decimus; si centum sunt termini, existit utique centesimus; si mille sunt termini, existit utique millesimus; ergo si numero infiniti sunt termini, existit infinitesimus.

Nondum video rationem, cur passivum solum seu vacuum puguet cum Dei sapientia; hoc si demonstrares, jam sufficeret ad probandam impossibilitatem vacui. Quodcunque enim Dei sapientiae non convenit, etiam ipsius potentiae non convenire putem. Video Te inclinare in opinionem, quod neque Angeli, nec aliae Intelligentiae dantur (Deo excepto) plane separatae a corporibus. Optarim eam mihi aperias fusius, et simul explices, quibus ergo corporibus anima nostra post mortem alligetur. Hac occasione redit mihi in memoriam, quod jam olim mihi scripsisti, Te nimirum habere mirabilem opinionem de commercio animae et corporis, per quam putes omnia intelligibiliter explicari. Eam quoque tum prima occasione mihi perscribere promiseras, quod tamen hactenus oblitus neglexisti: patere igitur, ut Tui jam promissi Te commonefaciam.

Si Entelechiae nec incipiunt nec pereunt naturaliter, inceperunt tamen existere in universali creatione. Ais, corporis organici destructionem nihil aliud esse, quam organorum involutionem: ego dicerem potius organorum dissolutionem.

Accepi nuper literas a Dno. Varignonio cum responsione mea ad fraternam, sed nihil novi perscripsit. Exemplar unum Historiae Academiae Scientiarum, conscriptae a Dno. Du Hamel, mihi dono destinatum, Amstelodamum misit, sed ibi nuperrime nondum appulit. Ubi illud nactus fuero, inquiram et perscribam an et qualis de Te mentio fiat.

Transmisi Lipsiam Tuum examen Solutionis Gregorianae, quod a celeberrimo quodam Mathematico mihi communicatum dixi, Tuum nomen quod ita jusseris dissimulans. Vale, et novum hunc annum pluresque sequentes feliciter age etc.

Groningae d. 7 Jan. 1699.

Filiola recens mihi nata distractum me tenuit, ut fieri solet, et impediit, quominus citius responderim.

XC.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ante omnia filiolam recens natam gratulor, Tibique inde et illi et toti familiae carissimae laeta omnia apprecor, simul vota mea repetens solennia et Tuis gratias reddens. Gratissimum est, quod quae ad rem conferre visa sunt, Epistolae ad Dn. Volderum meae adjecisti. Fecisti id non tantum potestate a me concessa, sed et jure Tuo. Praeterea quid alios morari queat, Tu melius me ipso intelligere potes. Et comparare talia soleo cum eo, quod saepe animadverti in corrigendis Typographicis exemplis; plerumque enim aliena facilius corrigimus, quam nostra. Eodem modo facilius animadvertit alius, quam nos ipsi, quid nostris desit, praesertim qui antea iisdem difficultatibus obhaesit, seque demum expedivit.

Rogo ut mihi ea, quae Dno. Voldero ad hanc rem facientia scripsisti, communices, quo integra habeam, quae illi expendenda sunt data; praesertim cum credibile sit, responsionem ejus omnia esse complexuram.

Tuomet exemplo judico, in argumento a priori de aestimatione Actionis illud virtualiter melius imposterum omissum iri, tantum enim turbat, ut dubitet aliquis, quasi diversa ratio aestimationis in una alteraque praemissarum non possit conclusione in unam conjungi. Et quemadmodum simpliciter dicere sufficit: Ducatus est duplum thaleri, thalerus autem duplum semithaleri, ergo Ducatus est quadruplum semithaleri, ita ut non sit opus adjicere, Ducatum esse duplum thaleri virtualiter, thalerum vero esse duplum semithaleri formaliter, eodem modo sufficit hic procedi.

Tuus quoque modus determinandi Centrum oscillationis ex principio nostro sane elegantissimus plurimum afferet lucis et confirmationis.

Modus quo agit materia gravifica, adhuc altioris est indaginis, neque contemnenda sunt, quae in eam rem attulisti, etsi mihi ea consideranti subnatae sint dubitationes complures, quod in re a sensibus remota et difficili mirum non est.

Gratias et egi Tibi, et ago, quod existimationi meae velificaris plurimum, et ad ea me agenda hortaris, per quae nostra magis propagari et confirmari possint. Quod Te frigidiuscule scripsisse dixeram, non ad haec pertinet, sed ad ea, quae habebas

nuperrime in Actis Eruditorum. Sed jam significavi, me non eo esse animo, ut talia sinistre accipiam.

Fateor in caseo esse partes, in quibus nulli apparent vermes; sed quid impedit, in illis rursus esse alios vermes aut plantas subtiliores, aliave sui generis organica, et sic in infinitum, ita ut nihil sit in caseo a talibus liberum? Idem de silice dici potest.

Non dico, vacuum, atomum, aliaque id genus esse impossibilia, sed tantum non esse divinae sapientiae consentanea; etsi enim nihil Deus producturus sit, nisi secundum leges sapientiae, diversa tamen sunt objecta potentiae et sapientiae, nec confundenda. Deus ex infinitis possibilibus eligit pro sapientia sua, quod est convenientissimum. Vacuum autem (perinde ac atomos) relinquere loca sterilia atque inculta manifestum est, in quibus tamen, salvis caeteris omnibus, aliquid adhuc produci potuisset. Talia vero relinqui cum sapientia pugnat. Et nihil in natura sterile atque incultum esse puto, etsi multa nobis talia videantur.

Entelechiae haud dubie ortum habent cum caeteris rebus communem; naturaliter autem de novo produci non possunt.

Fateor quaedam organa animalium, nempe crassa, destrui ac dissolvi, sed puto semper aliqua superesse, ita ut maneat animal (involutum licet) priore adhuc Entelechia praeditum; nam nec migrant Entelechiae de materia in materiam, neque unquam sine organis reperiuntur.

Meas cogitationes de commercio vel unione Entelechiae et corporis expositas jam reperies in Diariis Eruditorum Parisino et Hagiensi Dni. Basnagii. Loca nunc statim indicare non possum. Puto tamen partim esse anni 1696, partim 1697 et 1698. Verum citata omnia reperies in Dictionario Domini Baylii, ubi mei meminit, quod index Alphabeticus cuique Tomo (duo enim sunt) subjectus indicabit. Mihi enim jam liber non est ad manus; Groningae autem haberi non dubito.

De anima humana nihil pronuntiare ausim, quoad originem pariter ac statum post mortem, quia animae rationales seu intelligentes, qualis nostra est, peculiari ratione ad imaginem Dei conditae, diversis longe legibus gubernantur, quam ea, quae intellectu carent. Neque enim Deus se erga Spiritus habet, tantum ut artifex ad opus, sed etiam ut princeps ad Subditos. Sed circa Entelechias naturalibus tantum legibus subjectas censeo, ut dixi, eas nunquam penitus ab omni materia semel accepta divelli.

Frustra quaesivi apud Typographos librum, cui Titulus: Doutes de Mr. Bernier sur la Philosophie, in Gallia ante annos aliquot editum et mihi visum, sed nunc non repertum. Vellem autem ideo iterum legere, quia ille Gassendistarum fuit princeps, sed paulo ante mortem libello hoc edito ingenue professus est, in quibus nec Gassendus nec Cartesius satisfaciant. Has dubitationes ejus breviter tollere et solutiones meas Animadversionibus in Cartesium, quas vidisti (quarum editionem amici flagitant) addere vellem. Si liber forte alicubi reperiri potest, quaeso ut me juves, quo eum vel ad tempus impetrare possim. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{13}{23}$ Jan. 1699.

P. S. Pene oblitus eram quaestionis, utrum extent infinitesima! Dubitari potest an sequatur: Positis terminis decem, datur decimus: ergo positis terminis infinitis, datur infinitesimus. Dicet enim fortasse aliquis, argumentum de finito ad infinitum hic non valere: et cum dicitur dari infinita, non dicitur dari eorum numerum terminatum, sed dari plura quovis numero terminato. Et pari jure conclusurum iri: Inter numeros decem datur ultimus, qui et maximus eorum; ergo et inter omnes numeros datur ultimus, qui et maximus omnium numerorum; qualem tamen numerum puto implicare contradictionem. Ipse quoque non respondes meae objectioni, cum monueram posse intelligi seriem infinitam ex meris numeris finitis constantem. Manifestum enim est, etsi poneretur Tecum series ex (magnitudine) finitis pariter et infinitis (numeris) constans, hoc posito posse intelligi partem ejus constantem ex meris (magnitudine) finitis, reliqua parte (magnitudine) infinitos complectente omissa. Haec autem series ex meris (magnitudine) finitis esset quidem et ipsa (multitudine) infinita, sed tamen nullum haberet terminum infinitesimum.

XCI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Gratias ago pro voto pio: vicissim Tibi laeta prosperaque quaevis apprecor.

A Dno. Voldero nihil hactenus responsi accepi; forte formalem parat responsionem. Quae Tuis literis ad eum de meo adjeci, Tibi jam in praecedentibus meis omnia narravi. Scrupulos quondam meos, quos putabam Voldero etiam subnasci posse, et Tuas eorum enodationes, ex commercio nostro simpliciter excerptas, ipsi transmisi, partim ut novo concipiendi labori parcerem, partim ut historiam et modum, quo Tuus sum factus videret, nec temere forte vel ad Tibi complacendum, in castra Tua transiisse me existimaret. In argumento Tuo a priori de aestimatione actionis, illud virtualiter et formaliter non omisi, quia de voluntate Tua illud inposterum omittendi mihi non constabat; si tamen Volderum hoc turbaverit, poteris ipsi respondere, quod mihi olim responderas. Etiamsi modus meus actionis gravificae explicandae non sit certus nec certo unquam demonstrari possit, valere tamen potest pro hypothesi tanquam res possibilis', ad os obturandum Papino suique similibus, qui ad convellendam veram aestimationem virium objectioni ex vulgari gravitatis concipiendae modo petitae pertinaciter inhaerent.

Non nego in partibus casei, in quibus nulli apparent vermes, posse tamen inesse subtiliores vermes aut plantas. Sed illud quaero, an isti vermes, praesertim conspicui, forment substantiam et essentiam casei, id est, an sint id, sine quo caseus non esset caseus? An vero sint tantum de substantia peregrina ad caseum non pertinente? quemadmodum plerique arbitrantur generari ex seminibus a muscis, culicibus aliisque insectis in caseum asportatis.

Si vacuum, atomus, aliaque id genus Divinae sapientiae non sunt consentanea, eo ipso sane ea et impossibilia crederem. Quicquid repugnat Dei sapientiae, ejus etiam potentiae repugnat. Attributa enim Dei sunt ipse Deus. Secus, si Deus posset facere, quae insipienter vel imprudenter facta essent, Deus non foret perfectus, quia se ipsum imperfectum redderet; adeoque potentia et sapientia Divina, nonnisi ratione et diverso concipiendi modo differunt: in Deo vero neutiquam. Deus ex infinitis possibilibus non eligit, sed elegit ab aeterno; imo omnia possibilia elegit, id est praevidit, decrevit, vel ordinavit: quae enim non decrevit, illa et ipsi Deo sunt impossibilia, quia ipsi impossibile est sua decreta revocare; alias sibi non constaret, et foret mutabilis. Sed transeamus haec et decidenda relinquamus Theologis, ne ad intricatam praedestinationis quaestionem delabamur: nollem enim Tecum Religionis cer-

tamen inire. Demonstrandum tantum restat, quod vacuum perinde ac atomi, licet relinquant loca sterilia, ideo pugnent cum sapientia Divina. Quid enim, si aliquis diceret, talem sterilitatem necessariam fuisse ad motum producendum, vel generatim ad systema mundi creandum. Ante mundum conditum, praeter Deum, nihil utique erat, adeoque erat sterilitas universalis (si ita loqui fas est); jam vero, si haec cum Dei sapientia non pugnavit, cur sterilia quaedam exigua pugnent, non satis patet. Praeterea si loca dantur vacua, non ideo statim sunt sterilia; sterile enim est, quód inutile est: illa autem suum usum habent, sicuti pori in spongia, et foramina in reti vel cibro omnino sunt necessaria ad usum, quem praestare debent. Difficile igitur demonstratu esse puto, vacua et atomos pugnare cum sapientia Divina, et tanto difficilius, quia ejus fines et scopi semper fere nos latent. Quid? si miseri nos homines semper judicare vellemus ab iis, quae nobis, bene maleve, prudenter vel imprudenter facta videntur, quid Dei sapientiae conveniat, quid non, annon dicere deberemus, Deum non debere permittere, ut peccata committantur; considero enim peccata inter actiones bonas, seu prava hominum cogitata inter bona, ut loca vacua inter corpora. Imo peccatum, cum non tantum nihil boni, sed minus quam nihil, id est malum producat, potest dici s t e r i l i u s quam vacuum, quod simpliciter nihil corporis habet. Caeterum tamen et ego ipse credo, nulla nec vacua nec atomos in rerum natura dari, nihilque sterile et incultum: semper enim existimavi, quamdiu nec per revelationem nec per rationem nec per experientiam contrarium habemus, tunc ea conjecturando statuere debemus, quae Dei gloriam, potentiam et majestatem quam maxime nobis sistant et repraesentent. Ita malim credere universum infinitum, quam finitum; plenum, quam vacuum; organizata, quam atomos; animalium infinitorum graduum varietatem, quam eorum certum numerum etc.

Quae de commercio et unione animae et corporis in Diario Hagiensi Dni. Basnagii exposuisti, non vidi: vidi autem Diarium Parisinum an. 1696, ubi tres notas harmoniae modos, primus est influentiae, secundus assistentiae, tertius praeordinationis. Rejectis primo et secundo, primo nimirum, quia concipi non possit, quomodo anima in corpus, vel corpus in animam possit agere ope specierum vel qualitatum immaterialium; secundo vero, quia esset accersere Deum ex machina, qui singulis momentis interveniat in

re omnino naturali et ordinaria: amplecteris tertium, tanquam elegantissimum et Deo dignissimum, quia sufficiat Deum utramque substantiam, animam scilicet et corpus, tanta cum perfectione et exactitudine formasse, ut alterum cum altero conspiret, suas tantum proprias leges observando, perinde ac duo horologia accuratissima perpetuo conveniunt, sine ulteriori interventu artificis horologiarii. Sed haec sententia non omnino nova mihi videtur: eundem fere in modum a nostro Dno. Braunio saepius explicari audivi, et ni fallor continetur in ejus systemate Theologico; ego quoque similiter fere rem semper concepi. Legi locum in Dictionario Dni. Baylii, ubi haec citat; inter alias objectiones quas facit, deprehendo maximi momenti, quando objicit, mentem, tanquam ens simplex, non posse habere tot diversas modificationes a se ipsa, nisi illas ab alio ente potentiore successive recipiat; sed in eodem statu debere manere, et de una eademque re perpetuo cogitare, quamdiu ab eo non disturbaretur per aliud externum, non secus ac corpus a suo motu rectilineari nunquam sponte deflectit: Item mentem suas cogitationes futuras non praenosse, quod tamen fieri deberet, si illas a se, non vero immediate a Deo per causas occasionales haberet.

Mihi videor satis capere opinionem Tuam de ortu Entelechiarum: Dicis, per mortem animalium organa tantum crassa destrui ac dissolvi, sed subtilissima manere, in quibus eadem Entelechia semper operetur, ita ut maneat idem numero animal, quia, ut dicis, Entelechia non migrat de materia in materiam. Hinc sequentem formo Theoriam: In creatione universi Deus cuique Entelechiae dedit certum corpusculum organicum seu certam portiunculam materiae, quae perpetuo informet vel animet et nunquam deserat, et quae ita ipsi sit essentialis, ut ab ea plane separari non possit; jam vero illud animalculi corpusculum (quod stamina vocabo corporis animalis postea generati) generatione et nutritione evolvitur et expanditur per modum receptionis novae et peregrinae materiae se in poros insinuantis; unde paulatim crescit, et tandem ex animalculo invisibili fit visibile. Haec autem evolutio ita peragi censenda est, ut per corpus maximi etiam animalis aequabiliter diffusa sint illa prima et essentialia stamina, quantumvis exigua; non secus ac concipio minimum granulum salis in magna quantitate aquae dilutum, sese uniformiter cum aqua permiscere, sic ut nulla sit aquae gutta, quae non, pro ratione suae molis, de

isto granulo salis participet. Porro si corpus animalis crescere desiit rursusque paulatim decrescit, dum partes illae adventitiae iterum abeunt seu quomodocunque destruuntur, evidens est stamina illa, quae per magnum spatium diffusa erant, jam iterum contrahi et cogi in minus, donec absumptis omnibus peregrinis, tandem in pristinam suam parvitatem redigatur, eo sane modo, quo concipio granulum salis, in aqua dilutum, paulatim aquae exsiccatione, coctione, evaporatione vel percolatione iterum pedetentim coarctari et tandem in minimam suam massulam condensari. Haec, ni fallor, ex Tua fluunt hypothesi, belle sane, si nullis premerentur difficultatibus. Mors, secundum illam, nihil aliud esset, quam successiva partium crassiorum corporis destructio; interim illa accidit repente, si non momento (dicis enim apud Baylium, momentum mortis observari non posse) saltem morula adeo exigua, ut tempus destructionis tempori generationis et nutritionis minime possit comparari, et hic natura debeat quasi per saltum operari. Dispicias igitur, quomodo Lex continuitatis salvari possit, dum post diuturnam adeo evolutionem, animal nutu velut oculi in pristinam involvitur parvitatem. Et dicas mihi, cur natura noluerit, ut tantundem temporis ad involutionem requireretur, quantum ad evolutionem. Praeterea, si ante mortem animalis ipsi crus aliudve membrum amputetur, eo ipso aliquid de staminibus amputatum separatur, et sic post reductionem animalis ad suum exiguitatis statum, illud quod de staminibus separatum fuit, aut redditur animalculo, aut non redditur. Si prius, vellem mihi explices, qua virtute illud, quod ex. gr. in Americam transportatum esset, rediret in Europam, seque cum animalculo conjungeret; sin posterius, tunc illud, quod amputatione membri staminibus animalis ademptum est, eidem non est essentiale neque necessarium, contra hypothesin. Nota, quod haec omnia fundentur in eo, quod Entelechia non migrat de materia in materiam. Sic ex. gr. equus post mortem in illud animalculum reductum est, eodem corpusculo et eadem Entelechia gaudens, quod ante generationem ejus in semine equino latitabat, quodque microscopii tantum ope potuisset videri. Hinc aliquid lepidum mihi venit in mentem, nimirum quod non sit impossibile, unum idemque animal bis, ter pluriesve generari et mori posse: si enim per mortem animalis nihil fit aliud, quam ejus reductio in pristinum suum statum, quid impedit, quominus denuo evolvatur per accretionem novae materiae?

Quis ergo scit, annon Bucephalus ab Alexandri Magni tempore multoties fuerit in mundo sub visibili equi forma? Ad id enim tantum opus esset, ut equus aliquis cum pabulo aut potione imperceptibilem Bucephalum absorberet eumque cum reliquis seminis sui animalculis permisceret. Vides me nihil dicere de homine, quia animam humanam ipse excipis; vellem tamen mihi certi quid diceres de statu animae post mortem. Videris enim credere, etiam tunc eam non sine corpore esse, sicuti nec Angulos nec Daemones.

Inquisivi in librum Domini Bernierii, sed nondum inveni. Mihi videtur clarissimum: si dantur termini infiniti, dabitur etiam terminus infinitesimus (non dico ultimus) et qui eum sequuntur.

Miror quod nolis admittere magnitudinem infinite parvam, cum tamen cogaris admittere numerum infinitum, quem etiam memini Te alibi negare. Vale et fave etc.

Groningae d. 11 Febr. 1699.

P. S. Accepi nuper Du Hamelii Historiam Academiae Scientiarum: Tui ibi mentionem bis tantum factum reperi, his verbis: pag. 152. Vir omni eruditione clarus Dominus Leibnitz horologium a se inventum asportari jussit, ut aequabilem illius motum exhiberet. Jam ineunte anno 1675 machinam numeralem protulerat, cujus ope quatuor Regulae Arithmeticae magna felicitate perficiuntur; p. 178. Die 15. Novembr. Dn. Hugens phosphorum liquidum a Domino Leibnitz ad se missum exhibuit.

De Calculo differentiali, qui in Academiam per Marchionem Hospitalium introductus fuerit, et a quo ille hauserit, ne γρὺ quidem memorat, usque adeo Galli, quae ab exteris habent, dissimulant, dum sua mirum quantum extollunt.

Ad quaesita Tua Varignonius in literis ad me nuper scriptis ita respondet: „Vous n'y (hist. acad.) trouverez pas Mr. Leibnits „comme de l'academie: j'en ay demandé la raison à Mr. Du Hamel, „Autheur de cette histoire, et il m'a dit que l'admission de Mr. „Leibnits n'ayant point été notifié à l'academie, il ne s'est point „trouvé comme tel sur les registres. Mais si ce que je pense, „reussit, il aura lieu d'être content. C'est Mr. de Fontenelle qui „fait cette histoire en françois, non pas comme traduction de la „la latine, mais à sa façon, et en travaillant seulement sur les „mêmes memoires. Il en a déja 9 ou 10 années de faites dont „il m'a fait voir plusieurs lambeaux: rien n'est plus beau, ni

„mieux écrit; les mathematiques et la physique y sont egayées „d'une maniere qui les fera lire presque comme un roman, ou „comme la Pluralité des mondes. L'Histoire latine contient „30 années, et celle cy en contiendra jusqu'au temps qu'elle sera „achevée. Apres cela Mr. de Fontenelle relevera les memoires „tombés; mais il ne les donnera que d'an en an, au lieu qu'on „les donnoit de mois en mois. Quant au Sieur de la Garouste, „gentilhomme Gascon, toutes ses machines sont à l'eau: il avoit „entrepris de faire monter les bateaux contre le fil de l'eau par le „moyen de l'eau seule, mais l'eau a tout entrainé, et il a tout „abandonné" (voyla une belle gasconnade).

Frater meus tandem in depositum remisit Varignonio 50 imperiales, mihi si problemata sua solverem promissos, Te vero ut judicem solum etiamnum recusat, non obstante quod in ultima mea responsione ipsi concesserim jus appellandi ad reliquos judices quos nominat, me vero hoc ipso jure privaverim et acquiescere promiserim Tua sententia, etiamsi contra me decisurus esses. Incredibile est, quantam in rabiem sit versus; ejus literae ad Varignonium scriptae mihique ad partem communicatae nil nisi flammam et sanguinem spirant, et extremam ultionem mihi minantur. Ego vero moderate admodum respondi Varignonio, ut Fratri significet, mihi adhuc sat phlegmatis superesse, quod fraternae bili opponerem, necdum caritatis scintillulam penitus apud me extinctam esse. Mireris obstinatam opinionem, in qua perseverat, me scilicet nulla alia methodo usum fuisse, quam illa indirecta sophistica, quam in Diario Paris. exposuit: quid quaeso absurdius, quam positive adeo affirmare, quod probari non potest, cum praeterquam quod Tu contrarium scias, mihi sufficiat constanter negare; non enim is est frater, qui renes et corda potest scrutari. Remitte, obsecro, mihi methodorum mearum scriptum prius, quod amissum putaveras, ut tertio describendi labore sublever, si in Galliam aliove mittendum.

De Phosphoro illo liquido, quem Hugenio communicaveras, vellem me informares, quomodo componatur, an et quantum Tibi supersit, num ejus me quoque possis participem reddere, vel aliunde pro me emere. Frater meus junior ex Anglia mihi attulit phosphorum solidum, sed hic communis est: liquidum hactenus nondum vidi.

XCII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Literis meis, quae ad Tuas postremas responsionem continent, ante triduum sub involucro Bremam missis ad amicum, quas ad Te recte perventuras spero, accepi heri post anni silentium literas Dni. Hospitalii, quibus mihi significat, Te ut et Dn. Tschirnhausium et Guilielmini Rege jubente in Academiam receptos, fratrem vero meum et me ipsum una cum tribus aliis, quorum nomina hactenus ignoro, per plura vota ad eandem dignitatem evectos esse. Hinc est quod nova haec ocyus Tibi communicare putaverim (nisi forte ab alio jam praeventus) gratulorque honorem, et mihi quoque quod Tuus sim factus Collega. Electio facta est $\frac{4}{14}$ Febr. Cum Dn. Marchio nullius emolumenti mentionem faciat, vereor ne onus magis sit, quam honos.

Eodem hesterno cursore accepi quoque literas a fratre meo juniore, qui jam Berolini agit. Spem habet perveniendi in pharmacopoeam Electoralem in locum administri per duodecim jam annos ibi servientis, sed proximo Paschate excessuri. Veretur tamen ab alio praeoccupari, nisi commendatione superiori stipatus fuerit; quocirca me rogat, ut a Te quam citissime commendatitias pro ipso efflagitem, ad Illustri. Dn. Kolbium scriptas praesertim multum valituras scribens dicensque non insolens esse, ut qui in pharmacopoea celebri inservire ambiunt, illustrium virorum commendatione utantur, quo admissionem facilitent. Quod si igitur tribus tantum verbis vel ipse vel per alium Maecenatem fratrem meum apud Illustr. Kolbium aliumve in aula Brandenburg. insignem virum commendare dignareris, me sane imprimis Tibi summopere devincires, nec de successu dubitarem. Posses si ita placeret, literas commendatitias adjungere meis easque sub communi involucro inscriptione facta, ut vides, fratri meo transmittere, ut ipsemet illas tradere posset. Quicquid hac in parte feceris et effeceris, pro me factum puta. Vale etc.

Groningae d. 14 Febr. 1699.

P. S. Pro fratris mei peritia, dexteritate et fidelitate spondeo: qua de causa fidentius illum commendare poteris. Insignia in hanc rem habet testimonia.

XCIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quoniam cum Illustr. Dno. Kolbio mihi nulla intercedit notitia, ideo Dn. Fratrem Tuum commendavi Dno. Baroni Dobrzenskio, supremo Praefecto Aulae Serenissimae Electricis Brandeburgicae, quem spero apud Dn. Kolbium favere posse, idque significavi Dno. Fratri Tuo literas ei Tuas transmittens. Nunc ad Tuas considerationes venio. Possibilia sunt quae non implicant contradictionem. Actualia nihil aliud sunt, quam possibilium (omnibus comparatis) optima; itaque quae minus perfecta, ideo non sunt impossibilia; distinguendum enim inter ea, quae Deus potest, et quae vult: potest omnia, vult optima. Cum dico, Deum eligere ex infinitis possibilibus, idem volo quod Tu, cum dicis, eum ab aeterno eligisse: quod vero ais, impossibile ipsi esse, sua decreta revocare, atque adeo alia creare, quam quae creare decrevit, id pertinet ad necessitatem hypotheticam, de qua non est sermo.

Scio multos dubitare, ut insinuas, an nos possimus cognoscere, quid sit Sapientiae Justitiaeque divinae conforme. Puto tamen, ut Geometria nostra, et Arithmetica etiam apud Deum obtinent, ita generales boni justique leges, mathematicae certitudinis et apud Deum quoque validas esse. Et si malum in se sit minus quam nihilum, tamen conjunctum interdum aliis effectu realitatem auget, ut umbrae prosunt in pictura, et dissonantiae in Musica. Nec dubium mihi est, tum demum permissa esse mala, cum plus inde nascitur boni.

Perplacet, quod mea sententia de unione et commercio Animae et Corporis a Tuo et Dni. D. Braunii sensu non abhorret. Sed eam non videntur satis percepisse, qui hactenus rem pro inexplicabili et quasi miraculosa habuere; sic enim omnis, ni fallor, difficultas cessat.

Dno. Baylio mea responsio ad objectiones duas, quae Tibi maximi momenti videntur, non displicuit. Et si enim anima non constet ex partibus, exprimit tamen perceptionibus suis rem ex partibus constantem, nempe corpus. Hinc cum multas habeat perceptiones simul, et ex perceptionibus praesentibus naturali consequentia nascantur futurae, mirum non est, sponte ex anima fluere tot modificationes. Dubium etiam nullum est, quin futuri status

nostri jam aliquo modo in praesentibus involvantur, etsi ob multitudinem et exiguitatem comperceptionum distingui non possint. Haec et alia Dno. Baylio reposui, et Dnus. Basnagius responsionem meam ultimo suo trimestri inserere promittebat literis, exeunte ni fallor autumno anni superioris scriptis. Quod si factum non est, vereor ut prodierit ipsum trimestre, in quod rogo ut inquiras. Mitto ecce censendum Tibi, quod Diario Parisino destinavi, occasione Autoris, qui putavit commercium animae et corporis esse supernaturale, uti certe statuere debent, qui meam praeformationis hypothesin non sequuntur Cartesiani. Quaeso ut remittas schediasma hoc meum, ubi expenderis, ut Lutetiam ire possit.

In Tua expositione Theoriae meae de subjecta materia Entelechiarum sunt aliqua, quae non ita asseverare ausim. In his enim, ubi certa haberi possunt, nolim hypothesibus uti; sufficit tamen summam rei teneri. Ad objectiones Tuas haec responderim. Cum dico momentum mortis definiri non posse, simul significo Methaphysico sensu nullum esse; nec video, qui sequatur Legem continuitatis infringi, etsi hic brevi admodum tempore magna fiat mutatio, quod ipsum saepe in natura fieri consentaneum est, praesertim in mortibus. Machinas enim compositas lente formari, facile turbari conveuit. Sed sapientia Autoris efficit, ut in summa rebus optime semper consulatur. Idem animal saepius prodire in hoc Theatrum possibile est: sed tamen et contrarium possibile esse putem. Itaque hic nihil facile definit ratio. Altioris ista indaginis habeo.

Non respondes rationi meae, quam allegavi, cur non sequatur: dantur termini infiniti, ergo infinitesimus, nempe, quod concipere licet seriem multitudine infinitam, constantem ex meris terminis finitis seu ordinariis progressionis geometricae decrescentis: Concedo multitudinem infinitam, sed haec multitudo non facit numerum seu unum totum; nec aliud significat, quam plures esse terminos, quam numero designari possint, prorsus quemadmodum datur multitudo seu complexus omnium numerorum; sed haec multitudo non est numerus, nec unum totum.

Valde ago gratias, quod communices, quae Dnus. Marchio Hospitalius et Dnus. Varignonius ad Te scripsere, quaeque notasti in libro Dni. Du Hamel. Puto nonnihil erroris esse in relatione de Phosphoro; nam recordor etiam, solidum Dno. Hugenio a me

fuisse missum. Et quoniam solidum esse communem, liquidum vero minus notum censes, scito utrumque eadem operatione prodire, nempe destillatione forti transit tandem liquor lutosus in speciem, in recipientem, et simul quaedam partes solidiores parietibus vitri agnascuntur. Liquor autem mea opinione non lucet, nisi quatenus partibus solidis nonnihil dissolutis est imbutus. A multis annis nihil tale habui; caeterum non dubito, ab iis qui solidum praebent, etiam liquidum haberi posse.

Etiam a Dno. Hospitalio accepi literas in eum, quem scribis, sensum; itaque et Academiae gratulor et mihi, quod Te quoque ascito Collegae sumus.

Dnus. Frater Tuus non male facere videtur, quod unum judicem recusat, neque ego facile in me judicium reciperem solus.

Cum Dnus. Tschirnhausius dudum Academiae Regiae membrum habitus sit, miror etiam nunc demum nominatum scribi. Vellem hac re animaretur ad inventa, quae nos sperare jubet, publicanda, sed ita tamen ut suum etiam aliis tribuat, quemadmodum vellem parabolicorum arcuum inventionem Tibi tribuisset. Quod superest, vale et fave etc.

21 Febr. 1699.

XCIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ecce quid Dno. Voldero respondeam, modo ne nimis prolixe, quod Tu arbitrabere, et si quid tamen deesse videbitur, in Tuis supplebis. Neque enim dubito, quin id optime possis, neque facile est praevidere, quid alios turbare queat. Ausus etiam sum, in Te rejicere onus satisfaciendi circa argumentum ab ascensu aequivalituro, sive continue fiat, sive per vices, quia non ita bene memini, quae olim ea de re inter nos acta, literaeque ipsae, inter alias disjectae, non sunt in promptu.

Circa Dei potentiam repeto, quod dixi, posse eum omnia, velle nonnisi optima; nec video, quid huic sententiae obstet. Distinctio necessitatis hypotheticae ab absoluta et in Dno. et in Creaturis mea sententia valet, rursusque non video, quid obsit. Vacua

et atomi mihi non videntur esse umbrae, sed maculae, et quidem inexcusabiles, quia nil juvant, cum ipsis sublatis alia omnia fieri possent, quae alias fiunt. Vulgatum illud, Non esse facienda mala, ut eveniant bona, falsum est, si nimis generaliter accipias. Saepe mala vel damnosa et facere et pati oportet, majoris boni obtinendi vel mali vitandi causa.

Non aliam intelligo similitudinem inter sensationem et objectum, quam repraesentationis. Sed hanc non agnoscere Cartesianos passim ipsi indicant, idque inprimis manifeste facit Autor, cui respondeo, adeo ut arbitrarium putet, quam sensationem dare animo Deus velit, ad qualitates sensibiles corporum exprimendas. Difficultas Tibi superesse videtur circa subitum transitum a calore v. gr. ad frigus. Sed sciendum est, si nos corpus perfecte intelligeremus, in ipso nos transitum praevisuros; idem ergo fit in anima, quae est corporis repraesentativa. Nulla ergo est mutatio per saltum, nisi in nostra opinione, quibus insensibiles transitus interjectos comprehendere non datur.

Non sine causa confusas perceptiones comparavi machinis naturae, distinctis a machinis artis. Refertur hoc ad primum meum de his schediasma Gallico Diario *) insertum; idque adeo verum est, ut machinae artis possint cognosci perceptionibus distinctis, naturae non nisi confusis, quia omnis machina naturae infinita involvit organa.

Non mala est comparatio distinctarum et confusarum cum recta et curva, quia haec infinitos habet flexus. Hoc tamen interest, quod curva infinitos habeat flexus quidem, uni tamen legi finitae distincte intelligibili submissos, quod in naturae machinis locum habere nequit.

Dnus. Menckenius mihi scripsit, se Censuram Demonstrationis Gregorianae de Catenaria Actis insertum. Septembri inseruit, quae Dno. Sturmio, Mathematico Altdorfino, respondi, qui in Physica Electica tueri voluit opinionem Cartesianorum, quod Creaturae semper a Deo, velut ex Machina interveniente impellantur nec ipsaemet agant. De caetero nihil observavi in rem nostram. Significabo, ubi aliquid videro, quamvis Acta interim ad Te perventura credam.

---

*) 1695, 27 Juin.

Dno. Varignonio rogo, ut multas pro gratulatione a me gratias agas, significesque gaudere me talium Virorum Societate, eumque honorem judicare maximum. Si quid in Historia rerum gestarum, quam Tibi descripsit, cognitioni meae convenire Tibi videbitur, rogo ut communices talium curioso. Saepe enim hinc indoles hominum notescit.

Celeberrima illa Domina De Scudery, cui ut innotescerem, Pelissonius olim fecit, misit mihi carmina funebria et sua et aliena in psittacum, quem habebat, sed eo ingenio, ut quemadmodum ipsa scribit, vel solus sufficere potuerit Automatis Cartesii refellendis.

Nescio an videris novum Diarii Eruditi genus, quod inscribitur: Nova Literaria Maris Baltici. Quae ibi inserta habentur mathematica schediasmata, sunt a Dno. Detlevo Cluverio et a Dno. Groningio, quem Tibi visum scripsisti. Etiam me salutavit anno abhinc. Dixi, mihi historiam Cycloïdis pro Torricellio contra Pascalium scribere tanti non videri; nam nec res adeo magna est, et quid ad Germanum Galli vel Itali lites? Sed si omnino Historiam Cycloïdis moliretur, suasi adjiceret tot alia inventa circa hanc lineam, majoris longe momenti, ipsasque demonstrationes; sed vereor, ne nimium ab eo petierim. Quae in Novis illis Maris Baltici Literariis habet, mediocria sunt. At Dnus. Cluverius videtur ibi velle nobis tandem aditum dare aliquem ad mysteria sua. Verum enim vero res non maximas apparet adhuc ab eo verbis efferri magnificis. Videbimus, an post haec initia nos ad majora sit ducturus. Vale etc.

Dabam Hanoverae 1 Mart. 1699.

P. S. Mitto primam solutionis Tuae ad Fraterna postulata communicationem mihi factam. Epistolae ad Volderum responsoriae nondum praesto est apographum: nolui tamen hanc meam ad Te ideo differre, vel solutionis illius quam remitti desideras causa.

XCV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ne fasciculum tot chartarum aggravem, cogor hac vice valde brevis esse. Ecce hic responsionem Volderi jam ante decemdium acceptam. Ejus instantiae praeprimis eo collimare videntur, ut demonstrentur axiomata Tua, quod nulla detur transitio per saltum; quod elasticitas corporibus sit essentialis; quod omnis substantia ex natura sua sit necessario activa; quod inertia materiae sit aliquid distinctum ab extensione; quod praeter extensionem requiratur vis, quae sit instar animae et quod illa vis possit concipi sine causa et fundamento sui. Voces „virtualiter" et „formaliter", ut praevideras, eum etiam turbarunt. Non satis intellexisse videtur vim argumenti, quo concluditur, vires corporis sive continuo sive per vires ad eandem altitudinem ascendentis esse easdem. Respondebis igitur ad haec omnia, si placuerit.

Ad Tuas nudius tertius acceptas haec habe: Devinxisti me Tibi plurimum, quod fratrem meum commendare non fueris dedignatus; favorem hunc in me collatum data quavis occasione demereri conabor.

Quae possibilia vel impossibilia, nos quidem semper non possumus determinare; crederem tamen, quae Dei prudentiae non conveniunt, ejusdem potentiae non convenire ob rationem in praecedentibus meis allatam: et distinctio necessitatis hypotheticae ab absoluta in Deo nihil realitatis habet, nec nisi sola ratione locum habet. Interim non nego, plurima nos cognoscere, quae Sapientiae Justitiaeque Divinae sunt conformia, sed non omnia cognoscimus. Videris idem mecum, aliis tantum verbis, sentire, quando dicis, malum interdum bono conjunctum realitatem ejus augere et utile esse, ut umbrae in pictura et dissonantiae in musica; exinde enim concludere volui, Deum forsan ob eandem rationem disseminasse vacuola plenis, atomos organicis, ob quam pictor umbras picturae vel musicus dissonantias harmoniae admiscet. Ubi vero dicis, tum demum permissa esse mala, cum plus inde nascitur boni, cave ne infringas vulgatum illud: non facienda sunt mala, ut eveniant bona.

Ad reliqua Tuarum literarum, praesertim quae de Unione animae et corporis in schediasmate exponis, alio commodiori tem-

pore respondebo; dicam tamen in antecessum pleraque mihi valde placere; unum tantum est alterumve, quod scrupulum injicere posset: ut quando ais; sensationibus similitudinem aliquam intercedere cum ipsis vestigiis objectorum: in quo autem ista similitudo consistat, non satis explicas. Si per similitudinem intelligas ideam ipsam seu repraesentamen, quo objectum menti sistitur tanquam in pictura, eam sane non exsibilant Cartesiani. Tecum etiam semper existimavi, perceptiones futuras omnes ex praesentibus naturali consequentia nasci; nimirum ex successiva combinatione variarum idearum aliae variae oriuntur, non aliter ac ex motu corporum praesenti eorumque vario concursu omnia futura phaenomena naturali ordine consequuntur, adeo ut non opus sit, Deum quasi ex machina accersere, qui immediate et singulis momentis menti exhibeat ideas seu perceptiones novas. Interim aegre intelligi potest, quomodo fieri possit, ut ex perceptionibus praesentibus subito contrariae nascantur, ex. gr. ut qui modo sensum frigoris summi passus est, ista perceptio momento jam degeneret in perceptionem intensissimi caloris; seu qui jam plena exultat laetitia, in instanti dejiciatur in extremum animi moerorem. Sane non videtur hujusmodi perceptiones se ipsas quasi per saltum mutare posse, nisi aliquid extrinsecus esset, qui eas singulis momentis de novo determinet. Differentia, quam ponis inter perceptiones distinctas et confusas, mirifice mihi placet, quod scilicet perceptiones distinctae sint unicae et solitariae, ita ut singulae sui attentionem excitare possint, confusae vero congeries quasi infinitarum distinctarum, quae ob multitudinem et parvitatem singulae debitam attentionem excitare non possunt: quod vero confusas compares machinis naturae, et distinctas machinis artis, non usque adeo haec comparatio valet, sequeretur enim, quod quemadmodum distinctae ideae confusis, ita machinae artis machinis naturae perfectiores essent, quod tamen nemo facile concedet. Quid si diceres eo modo potius differe, quo differunt linea curva et recta, ut enim curva ex infinitis lineolis rectis, ita idea confusa ex infinitis distinctis componitur. Simile candoris in spuma et speculi sphaerici rem egregie quoque illustrat.

Banagii Diarium ordinarie non accipio, neque adeo scio, an Tua inseruerit; inquiram tamen, an prodierit. Semestre est et plus, quod Acta Lips. non acceperim. Dn. Mencken solebat illa singulis trimestribus ad me mittere; nescio an nunc mittere cessaverit, an forte Wetstenius, Bibliopola Amstel. ad quem ea dirigit,

mihi transmittere fuerit oblitus. Si quid ibi prodiit, quod nostra concernit, gratum facies, si communicaveris. Nuper Te rogavi, ut mihi remitteres alterutrum schediasma solutionum mearum problematum fraternorum; rogo nunc iterum, ut id mittere ne obliviscaris.

Ex quo a Dno. Hospitalio literas me accepisse Tibi scripsi, accepi alias a Dno. Varignonio, qui nostrae electionis historiam narrat et me rogat, ut suo quoque nomine Tibi gratuler, quod igitur factum velim. Caeterum et mihi gratulor, quod ego Te habeam et Patronum et Collegam. Vale etc.

Groningae d. 4 Mart. 1699.

XCVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ecce nunc tandem literas meas responsorias, quas ut ad Dnum. Volderum cures rogo, et sicubi opus videbitur, Tuis adjuves.

Adjicio, quae in novissimis, quae ad me pervenere Lipsiensium, Actis ad rem nostram pertinent,*) quae ut remittas peto, mihique interpreteris ea, quae Dominus Frater Tuus circa Loxodromicam meis adjecit. Mihi enim, fateor, non licet ista rimari attentius, prout merentur.

Nunc quod prioribus addam non habeo, nisi ut valeas ex sententia, et in praeclaris meditationibus Tuis pergas.

Dabam Hanoverae 24 Martii 1699.

XCVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Dno. Voldero nondum respondi, Tuam nimirum responsionem expectans, quam simul mittam: fac igitur, eam ut accipiam brevi.

---

*) Animadversio ad Dav. Gregorii Schediasma de Catenaria etc. Act. Erudit. 1699.

Nec ego alienus sum a sententia communi, Deum posse omnia et velle optima. Dico autem, posse et velle in Deo esse unum et idem; potest enim non nisi quae bona sunt, mala non potest, quia non sunt realia: porro illa tantum vult, quae ab aeterno decrevit; quae non decrevit, illa nec vult nec potest.

Si vacua et atomi nil juvant et ipsis sublatis alia omnia fieri possunt, largior maculas esse inexcusabiles, sed hoc ipsum est quod quaeritur, an sc. sine vacuis et atomis reliqua tam decenter fieri possint, annon forte vacua eum habeant usum, quem foramina in cibro vel maeandri in spongia. Dices, rationem Tibi dictitare, sterilitatem locorum non convenire prudentiae Divinae: at ego, absit ut determinemus omnia, quae ei conveniant vel non conveniant, sola nostra ratione. Finge in Jove esse homines non peccatores, sed sanctitatis et vitae integros scelerisque puros, qui autem nec per revelationem nec per experientiam de creaturis peccatricibus quicquam cognitum habeant: finge, inquam, illos ratione sua inquirere velle, an Dei prudentiae conveniat nec ne, peccata permittere in mundo vel homines creare ad peccata proclives: annon probabile est, prudentiam Divinam sua propria prudentia metientes protinus pronunciaturos, Deum non posse tolerare peccata nec permittere, ut fiant. At, ais, mala inter bona usum habere, ut umbrae in picturis vel ut dissonantiae in harmoniis: ita ex post facto licet argumentari, postquam scilicet rei veritatem tristi experientia edocti sumus. Jam vero si in moralibus multa accidunt, quae prudentiae Divinae repugnare videntur, quidni et in physicis talia contingere possent? Non igitur libere adeo definirem, Prudentiae Divinae vacua et atomos non convenire, praesertim cum id forsan aliunde demonstrari possit: sufficit, dicamus, per plenitudinem et actualem divisionem materiae omnia aeque et melius explicari posse ac per suppositionem vacuorum et atomorum.

Cum Machina Naturae, quanquam infinita involvat organa, non possit tamen uni legi finitae summitti, nondum video, licet illa lex nobis sit ignota: ex. gr. corpus incurrens in alia corpora numero infinita et infinite exigua, omnia commovet, et tamen lex illius corporis motus est finita. Concedo, omnis curva Geometrica infinitos habens flexus, qui tamen omnes una lege finita exprimuntur: id vero de curvis mechanicis, quae scilicet libera manu ducuntur nulla certa lege observata, nego.

Omnes anni superioris Actorum menses nuper accepi. Perplacuit responsio Tua ad Sturmium. Siquidem desideres Varignonianorum communicationem, ecce mitto literas, quas nuper accepi, mihi si placet remittendas. Videbis ibi nomina omnium nostrorum Collegarum. Nescieram Newtonum nobiscum receptum esse, et credideram Romerum (quem penultimum locum occupare miror) semper mansisse membrum Academiae, ut et Dn. Tschirnhausium et Hartsoekerum.

Dominae de Scuderi exemplum rarum est inter sexum sequiorem, sed rarius psittaci ingenio pollentis et tantae parvitatis. Suntne impressa illa ejus, de quibus loqueris, carmina? Fuit, credo, Cartesii cognata.

Nova Literaria Maris Baltici nondum vidi, de illis autem jam inaudiveram: miror Groningium in Geometricis mediocriter admodum versatum moliri, quae vires suas superant; quid tamen ibi dederit, ut et Cluverius (cujus inventa hactenus visa pariter non magni momenti mihi videntur) curiositatis ergo videre cuperem. Editur ab aliquo tempore Ultrajecti menstruatim quoque Diarium sub ficto nomine Neocori; hoc Tibi visum non dubito, sed sterile nimis est. Vale etc.

Groningae d. 25 Martii 1699.

P. S. Ignosce literas pro fratre meo ad Te mittenti: haec via brevissima mihi visa est, cum alias eas per Cliviam mittere debuissem adeoque per ambages.

XCVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Si Deus potest omnia, sed non vult ex omnibus, nisi quaedam tantum, nempe optima, differre oportet etiam in ipso, posse et velle. Vacua non possunt usum habere, quem non et habeant fluida, quantum satis subtilia, eademque simul alium habent usum, quem vacua habere non possunt. Peccatorum permissionem esse contra sapientiam, nullo tali argumento ostendi potest.

Curvae, quae libera manu ducuntur, se habent ut machinae naturales, id est nulli possunt submitti legi finitae. Quoniam id

concedis de curvis istis liberis, videbis, re accuratius considerata, idem concedendum de naturalibus machinis.

Si quae Mentes, peccati notitiam nullam habentes, judicarent nullum esse peccatum in universo, probabiliter ratiocinarentur non demonstrative, ut nos de vacuo. Nam vacua perfecte cognosci possunt, cum nullas alias res notione sua involvant; quod de peccatis secus est, quae implicant seriem rerum. Sunt quidem et alia argumenta contra vacua et atomos, sed ea nunc prolixioris discussionis forent.

Versus in psittacum Dominae De Scudery nondum sunt editi; misit enim manuscriptos. Cartesio cognatam nesciebam. Alia est Parisiis docta et elegans foemina, Cartesii ex fratre neptis.

Gratias ago, quod communicasti, quae Dnus. Varignonius de Academia Scientiarum ad Te perscripsit. Nondum quicquam tam exactum habueram. Multi ex Academicis mihi ignoti sunt, non quod ipsi non sint celebres, sed quod ego a multo tempore res Gallicas parum norim, post tot annorum absentiam, et quod non fuit qui Literaria nuntiaret. Inter Honorarios ignorabam Dnum. Malesieux et Patrem Truchettum Carmelitam; ex Pensionariis Dnum. Fabrum Astronomum, Jaugeonium et Dalemium Machinistas, Bourdelinum et Boulducium Chemicos, Coupletum Thesaurarium; ex associatis Gallis, Maralduum, Chaselium, Taurinum, Bourelinum; succenturiatos (Gallis Elèves) pene universos. Fac igitur, quaeso, ut si qui ex his scriptis operibusve noti aut aliter memorabiles, id mihi quoque jam socio innotescat.

Ad dignitatem Corporis faciet, quod perinde atque in Academia, quam Gallicam vocant κατ' ἐξοχὴν, honoris ergo recepti homines muneribus genereve insignes. Valde etiam laudo, quod unicuique Collegarum succenturiatus assignatus est suus.

Perscriptum ad nos fuit, reditus annuos in Academiae sustentationem destinatos esse 30 millium librarum Turonensium, sed hoc de pensionibus interpretor. Nam in experimenta, machinas, observationes, itinera, aliaque id genus, puto sumtus faciendos non minores, si quid praestandum est dignum fundatore.

Gratulor Tibi, quod Epistola tua ad Academiam tanta omnium approbatione lecta est: et Dni. Abbatis Bignonii consilium mirifice probo, quod paci inter Te et Dnum. Fratrem Tuum studet. Scis, quantopere improbetur, qui lites inter Fratres serit: pari jure laudabitur, qui componit.

Explica quaeso, si commodum, quid sit illud, quod de differentiationibus et summis Dno. Varignonio communicasti, de quo ratiocinationem ejus non satis intelligo. Illud observavi, si termini y, (y) etc. sint progressionis Geometricae, etiam y, dy, ddy etc. progressionis Geometricae fore. Eoque argumento aliquando Dno. Marchioni Hospitalio probavi, $d^n y$ esse reale aliquid, etiam si n esset numerus fractus vel irrationalis.

Dno. Varignonio ut officiosissimam a me salutem reddas, valde rogo. R. P. Malebranchius scribit, Tractatum de motuum communicatione a se refingi, et se tandem agnoscere, non servari quantitatem motus; sed ignorat adhuc, servari quantitatem virium actionisque motricis, etsi animadverterit, servari quantitatem motus in eandem partem, seu ut ego voco, directionis. Scripsi ei hac de re, sed paucis obiterque. Aliquando poterimus communicare, quae cum Dno. Voldero acta. Ad hunc responsorias meas interim acceperis. Tuas ad Dn. fratrem Tuum Berolinum mitto. Non intellexi, an meas acceperit.

Literae hucusque scriptae jam ante septimanas aliquot una cum Tuis evanuerant ex oculis meis et se condiderant inter chartas, ubi non quaesissem. Interea iter faciendum fuit agendaque alia, quibus peractis, dum chartas ordino, rursus in Tuas et Varignonianas, et has ipsas meas incido, quas nunc absolvo.

Amicus ex Anglia veniens et hac transiens monstravit mihi quasdam Philosophicas Transactiones anni superioris: in illis mense Octobri Artic. 7 reperitur Quadratura Logarithmicae Dni. Craigii, cui non immoror, subjiciuntur deinde haec ejusdem verba: „Dum „Methodum meam ad hujusmodi figuras applicarem, inveni errorem „aliquo modo in Calculum Bernoullianum irrepsisse, dum figurae, „cujus aequatio $a^z = y^y$, quadraturam assignat $2yyla - yy, : la$ „in pereximio suo Tractatu de Principiis calculi exponentialis; est „enim istius figurae area $= 2yyly - yy, : 4la$, ubi y abscissam „et z ordinatam designat."

Suspicor haec de Tuo potius, quam Dni. Fratris scripto esse accipienda; subinde enim de talibus mecum communicasti. Duo interim nosse desidero: primum, ubi sit Tractatus ille Tuus, quem et ipse videre pervelim; deinde quid sentias de illa erroris calculi correctione: mihi enim nunc ista discutere non vacat.

Ex Novis Literariis Maris Baltici (quae nescio annon forte

interim jam nactus sis) mitto (in omnem eventum) Dni. Cluverii Schediasma adjunctae plagulae insertum, ubi multa mira, de quibus judicium Tuum (ubi remittes) mihi gratum erit. Addo delineationem Nummi Genethliaci, quem Coelum Caesaris vocant, qui non inelegans videtur. Videtur aliquid tribuere Astrologiae judiciariae, quod miror. Quod ait, hanc propositionem: Deus est, coincidere cum illa: Duo contradictoria non posse simul esse vera, paulo laxius dictum puto, ut solet fieri ab illis, qui amant *παραδοξολογεῖν*. Cum in literis ad me suis olim idem innueret, respondi esse sane cognatas et inter fundamentales. Nam Divina essentia est, ut sic dicam, regio aeternarum veritatum, ita ut per existentiam Dei veritates circa possibilia non-existentia realisentur, subjecto et sustentamento alias cariturae. An hoc ipsum velit Dnus. Cluverius nescio, literis enim illis meis non respondit. Quod ait, Atheum esse animal *ἀσυλλόγιστον*, quod sublata unitate numeros superesse posse inepte fingat, non quidem inepte dictum est, si per unitatem intelligat principium, et per numeros principiata. Nam alioqui non solus Deus est unitas, sed substantia omnis opposita substantiis seu aggregato, est Monas, itaque hoc torqueri posset non tam in eos, qui negant Deum, quam in illos, qui nullas substantias immateriales agnoscunt. Quae de structura mundi habet ex duodecim classibus intelligentiarum formatricium, concursuque et coalitione radiorum coelestium, Hypermetaphysica sunt, quae non capio. Oportet per radios coelestes ab ipso intelligi aliquid ideale, alioqui enim ipsum utique coelum cum suis luminaribus et radiis partem mundi ex radiis formandi facit. Verum haud dubie est, aeternis quibusdam rationibus idealibus omnia deberi: sed quis immensum intervallum ab uno ad infinitum saltu transmittat? Philosophiam Divinam ejus, cujus folia aliquot impressa hic refertur, non vidi. Quod pag. 121 dicitur, nullam esse quantitatem absolutam, suo quodam sensu admitti potest, quemadmodum et quod ait *περὶ τῆς δυνάμεως*. Et fieri potest, ut subsint aliqua a nostris non abhorrentia. Habet hoc Vir Optimus, quod res etiam mediocres miris titulis exornare potest, quae res usum interdum habet apud vulgus. Vellem daret vel saltem explicaret illam, quam memorat: Sterne Rolle, et ideam Pandectarum Astronomicorum, quos olim fuit molitus. Miror quod Ellipses Keplerianas vult abrogare, quae tamen tam pulchre satisfaciunt. Solem in uno esse focorum, tantum abest, ut sit contra mechani-

cen, ut potius ex legibus motus prona consequentia fluat. Mirum, si ostendet, solem semper eandem servare distantiam ad terram, obliquitatemque Eclipticae a priori patefaciet. Magis mirum, si quid dabit circa ordinem fixarum. Talia cum Cartesio aggredi frustraneum puto, nisi quis cum Gaffarello et similibus coelum esse putet pellem extensam, instar libri characteribus inscriptam, ubi fata omnium legi possint. Miror nondum illic chemicos quaesisse lapidem Philosophorum; quod si quid apte fingi posset, saltem prodesset ad stellas melius designandas et memorandas. Vereor, ut Machinae auctoris opticae consistant in ideis inexsequibilibus.

Non video, quomodo in Musica aliquid magno cum fructu circa Monochordi sectionem mutari possit: constat enim incidi in numeros irrationales, et eorum loco assumtos esse vicinos rationales. Unde octavae divisio in tonos, quae accurata esse non potest. Quicquid ejus sit, non dubito aliquid non contemnendum fore etiam in illis viri egregii meditationibus, quae non plane ferient scopum. Itaque si omnia prodeant (modo ne nimis αἰνιγματικῶς καὶ ὑπερβολικῶς) pergratum erit. Alias alia mittam ex iisdem Novis Balticis, quibus praestruere quaedam videntur ad suas series.

Nunc finiendum, nec unae literae nimis onerandae. Dum haec scribebam, tandem amicus mihi Berolino mittit literas Dn. fratris Tui, significatque utrasque Tuas, quas ad me miseras, ei redditas, de quo gaudeo, nam pene verebar, ne intercidissent priores, quod ipse liniolas aliquot addidissem ad Dn. fratrem Tuum et nihil tamen amplius intelligerem: ne nunc quidem scio aliquid de ejus rebus. In Groningianis nihil video, quod mitti e re sit, itaque his fasciculum inflare nolim. Curiositate non mediocri sententiam Dni. De Volder expecto. Videtur semi-conversus. Miror, quod non voluisti ut scirem, quid Tibi de novissimis ad eum meis sit visum, cum judicium de iis Tuum mihi futurum sit praejudicium aliquod alieni, et gratissima habeam monita Tua. Vale etc.

Dabam Hanoverae 16 Maji 1699.

XCIX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

A Dno. Voldero nihil hactenus responsi accepi ad Tuas per me ipsi missas, quocirca diutius cunctari non audeo. Remitto folium Actorum Lipsiens. Artificium fratris tabulas conficiendi pro invenienda longitudine puncti in Loxodromia facile detexi: posito enim elemento longit. ds, sinu latitudinis x, et radio a, habebis pro loxodromia 45°, ad quam reliquae calculantur $ds = \frac{aadx}{aa-xx}$; est autem (in quo fere totum mysterium latet) $\frac{aa\ dx}{aa-xx} = \frac{\frac{1}{2} a\ dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{2} a\ dx}{a-x}$, adeoque $\frac{1}{2}$ log. $\overline{a+x} - \frac{1}{2}$ log. $\overline{a-x}$ erit $= s$ seu longitud. quaesita. Reliqua facile percipies, si modo attendere velis. Miror fratrem dicentem, quod Geometrae assueti fuerint hoc problema solvere per approximationem, quasi per logarithmos id facere accuratum esset, cum tamen et ipsi logarithmi non nisi appropinquando calculentur. Nihil video novi a fratre praestitum, nisi quod modum ostendat tabulas loxodromicas condendi faciliori negotio per logarithmos, quam vero per summas secantium, id quod facile largiar: quid autem Nautarum interest, utrum tabulae suae operose vel facile factae sint; tabulae enim, quibus hucusque utuntur, non minus accuratae sunt, quam eae quae prodirent per modum a fratre ostensum. Quod vero attinet circinum proportionum nauticum, cujus fabricam exinde docet, parvae vel nullius utilitatis censeo; quid enim eo opus est, quando vel sola inspectione tabularum haberi potest, quod laboriosa circinatione crasso tantum modo obtinetur, errore sane duorum vel trinum graduum vixdum sensibili, nisi circinus fabricetur praegrandis et insolitae magnitudinis, loco quod tabulae habeantur ad totidem minuta supputatae.

Paulo ante acceptas Tuas Tibi miseram literas quasdam Varignonii, quas mihi remittes si placuerit. Inquiri curavi in Bernierii Dubia Amstelodami et Hagae, sed frustra. „Je n'ay pû avoir" rescribit Wetsteinius, „nouvelles des Doutes de Mr. Bernier que me demandez." Dn. Dierquens mihi respondit in hunc modum: „Je n'ay pû trouver aucun libraire qui connust les Doutes sur la philosophie de Mr. Bernier, mais ce Bernier a publié en quelques tomes un abregé de la philosophie de Mr. Gassendy. Si c'est cecy

que vous cherchez, on le trouve chez Mons. Moetiens." Hisce vale et fave etc.

Groningae d. 20 Maji 1699.

P. S. Mihi indicari rogo, an Tibi quis notus sit, qui aërem ponderare per condensationem instituerit: ego quidem nuper excogitavi et in praxin deduxi rationem (ut mihi videtur, novam) explorandi proportionem gravitatis aëris ad gravitatem aquae, quae vulgari longe expeditior, facilior et accuratior est. Quod enim alii per rarefactionem, ego per condensationem efficio et exiguo quodam vase magnam aëris condensati quantitatem simul ad lancem examino, adeo ut error unius grani, qui alias notabilis satis esset, nihil hic aut parum importet: praeterquam quod modus per rarefactionem requirat ultra 20 emboli suctiones, antequam maxima pars aëris ex recipiente sit extracta, loco quod hic 3 aut 4 pressionibus emboli sufficiens aëris copia in vas meum intrudatur.

C.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ecce Responsionem Dni. Volderi. Multa objicit acute et solide, sed severus nimis et scrupulosus videtur esse in exigendis probationibus eorum etiam, quae, meo judicio, accurate probari non possunt; qualia sunt quae ex lege ordinis petuntur; item principium illud Tuum activum substantiae; hinc non video, quomodo illum omnino lucraturus sis, nisi aliquid remittas, quod certum non est nec demonstrabile. Pleraque fere praevideram, quae Volderus objecturus esset. Quae vero ipsi scripseras, maximam partem probo, sed non putabam judicio de iis meo Tibi valde opus esse; alias incunctanter Tibi respondissem, licet ego a Te literas expectaverim. Fuerunt tamen, quae mihi adhuc injecerant scrupulum, quem vero ut moveam, non consultum duco; praestat id a Voldero fieri. Ita enim ab utraque parte proficio, absque ut id mihi magni constet. Delector valde, cum Tuas lego profundissimas meditationes, quae reconditissimam quandam Metaphysicam spirant, quod et ipsi Voldero dixeram, cum Tuas postremas ipsi misissem. Sed ex vice versa Volderi in objiciendo soliditas, et in exprimendo

felicitas me quoque non parva admiratione afficiunt. Jucundum mihi erit et fructuosum, inceptae vestrae velitationis exitum videre; sed jam ad nostra.

Deus ea tantum potest, quae decrevit, et vult omnia quae decrevit; ergo omnia vult quae potest; unde in ipso non differt velle et posse, quicquid jam sit de distinctione inter absolutam et hypotheticam necessitatem.

Vellem mihi geometrice demonstrares, fluida habere posse omnem usum quem vacua, sed vacua non omnem quam fluida.

Ergo concedis, ideas confusas non modo machinis naturalibus, sed etiam curvis libera manu ductis posse comparari. Illa alia argumenta, quae Tibi contra vacua et atomos superesse dicis, magna me voluptate afficerent, si ea mihi communicare digneris; fateor enim de eorum impossibili existentia me nondum demonstrative esse convictum.

Gratias ago pro communicatione elegantis Epigrammatis Tui in psittacum Scuderianum. Cum Te in omni scientiarum genere versatissimum sciam, non miror Te etiam esse Poëtam, et mihi interdum praeter spem vena luxuriat. Sed quod mihi ante annum excidit Epigramma, statim post litem illam cum Theologis quibusdam inceptam, eorum choleram in tantum excitavit, ut undique atrae nubes supra caput meum sese contrahentes, exitialem minarentur. procellam; sed ex ea evasi salvus, et ignis videtur omnino extinctus, postquam novissime disputationem in hanc rem cum Theologis istis habuissem sub incredibili confluxu auditorum, qui me philosophum theologice disputantem nunquam antea audiverant. Si disputationem, quam in eum finem composui, legere desiderares, possem data occasione exemplar ejus Tibi transmittere. Si scires, quantum hic passus fuerim ab ineptis hominibus et imperitis istis misomusis, non dubito quin mei misereris: sufficit, quod habeor pro novatore, pro introductore sapientiae theatralis (ita appellitant Philosophiam Experimentalem, quam heic primus doceo) ut suo odio me dignum putent. Tanta est apud homunciones istos bonorum studiorum nausea! Tantus contemptus! Ipsi quippe, cum nihil moliuntur quod laudabile est, aliis laudem invident.

Multi ex Academicis Parisiensibus non solum mihi sunt ignoti, sed etiam, cum Parisiis agerem, nondum erant recepti. Nondum accepi receptionis bullam, quam Varignonius jam diu scripsit mihi statim missum iri per Illustrem Bignonium. Quid causae sit, quod

nondum acceperim, divinare non possum: an Tuam acceperis, nosse pervelim. Trigiuta ista millia librarum, viginti tantum pensionariis Lutetiae habitantibus sunt destinata; an exteris quoque aliquid destinatum fuerit, valde dubito.

Quod de differentiationibus et summis Dno. Varignonio communicavi, est idem illud, quod jam olim inveneram pro methodo summandi ex observato Tuo consensu inter binomii potestates et rectanguli differentiales; de quibus suo tempore, si meministi, prolixe inter nos actum est.

P. Mallebrancius valde instabilis sit oportet, cum mentem suam de communicatione motuum toties mutet. Nisi minutim distincteque omnia ipsi explicaveris, non facile in castra Tua transibit: stat etiam pro perfecta corporum duritie.

Schediasma meum de principiis calculi exponentialis continetur in Actis 1697, mense Martio. Praeterea nihil edidi de hac materia. Quod autem Dno. Craigio libuerit hoc schediasma appellare Tractatum, quid in mente habuerit non capio. Verum est quod pag. 131. lin. ult. pro area figurae, cujus aequatio $x^x = a^y$, ponam $2xxlx - xx, : la$ loco quod ponendum esset $2xxla - xx, : 4la$. Sed quis est, qui non videat fuisse vel lapsum calami vel errorem typographicum. Unde tibi judicandum relinquo, an publice perstringi mereatur. Alius error ibidem subrepsit, nam linea tertia a fine habetur $ly\,dy$ loco $la\,dy$: miror quod Craigius hoc pariter non observaverit. Optarim videre, quid in Transactionibus Londin. De quadratura Logarithmicae ediderit: videtur agere etiam de exponentialibus, ubi dicit: Dum methodum meam ad hujusmodi figuras applicarem: sed quam facile ipsi fuit, ex jam inventis proficere.

Remitto his cum gratiarum actione Cluverii schediasma: sed, ut Tibi candide fatear, parum aut nihil ex illa intelligo: forsan nec ipse satis intelligit. Videtur affectare obscuritatem, ut res tenues quoque et leves magna pompa exaggerare possit. Memini alicujus viri apud nos, qui tantam laudem in non intelligibili loquendi modo quaesiverat, ut cum aliquando orationem habuisset, postea ipse gloriaretur, sublimi adeo stilo scriptam fuisse, ut nec a se, nec ab auditoribus potuerit intelligi. Non dubito, quin Cluverius idem de se gloriari queat: quod vel exinde patet, quod ipsi omnia sordent, quae recepta sunt, dum scilicet Ellipses Keplerianas vult abrogare; item Solis excentricitatem, aliaque quae pro

demonstratis habentur. Sed prae omnibus mihi displicet, quod jam olim et nunc iterum Parabolae quadraturam Archimedeam improbare et impugnare velit; sane, si eousque ineptiarum procedit, quid porro in Mathesi tutum, quid certum erit?

Pro curatione literarum mearum ad fratrem gratias Tibi ago. Fortuna ipsi non favit, ut literae Tuae commendatitiae, quamvis citissime scriptae mature satis advenirent; quam enim desiderabat stationem in pharmacopoea Electorali jam ante illarum adventum ab alio erat occupata. Nunc apud alium Pharmacopoeum inservit. Vale etc.

Groningae 3 Jun. 1699.

CI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Dno. Voldero disputans Tua ope indigeo tanto magis, quod difficilius est nova tueri; itaque quoties a mea stas parte, aequum est ut auxilio mihi sis, agasque confessorem et defensorem veritatis. Nam quod ais, spectando Te laboris compendium facere, id a me aetate tanto provectiore speciosius dici potuisset.

Objectiones mihi interim videntur fere a praejudiciis proficisci. Longe alia ipsi, quam mihi extensionis notio est. Idem est de substantia aliisque multis. Deinde aliud est objicere, aliud exigere probationes. Objectionibus respondere non defugio; probationes omnium dare, hujus loci temporisque non esset, etsi in promptu haberem.

Inprimis miror, quod negat plus esse idem promptius efficere. Quis hac scrupulositate ad demonstrandum invitetur, et quis satisfacere speret, ne illa quidem concedenti, quae totius naturae testimonio confirmantur? sed ista mihi interim in hypothesin apud aequos credo judices suffecerint, qualem ipsum Dnum. Volderum fore puto, ubi rem magis expenderit. Taliaque ipsi a Te commodius, quam a me dici poterant. Caeterum mihi non tam id quaeritur, ut aliis mea persuadeam, quam ut considerationibus mutuis proficiatur. Veritas serius aut citius semper vincet.

Quod dicis, Deum ea tantum posse quae vult, hoc non concedo, nisi in sensu composito loquaris, ut vocant. Verum est, ea tantum facere, sed si ea tantum posset, omnia faceret necessario, nec esset liberum agens: nam decreto aut electioni locus esse nequit, cum non nisi unum possibile est.

Asserendus esset usus vacuorum, quem fluida habere non possint. Caeterum unum adhuc argumentum habes in hac Epistola adjuncta ad Dnum. Volderum, nempe si darentur atomi, daretur et mutatio per saltum.

Facies pro prudentia Tua, ut Theologos non habeas inimicos, nam ubique terrarum magna est ipsorum auctoritas, idque postulat status rerum. Epigramma Tuum libenter videbo, nec per me ulterius ibit, quam voles. Disputatio etiam gratissima erit.

Literas receptionis Academicae nondum accepi. Haud dubium est, 30 millia librarum solis pensionariis esse destinata, qui omnes sunt regnicolae.

Mutationes repetitas R. P. Malebranchii non culpem, si modo expenderet potius, quam ederet in publicum. Itaque vereor, ne post tertiam editionem Regularum motus suarum indigeat quarta.

In Craigii schediasmate nihil erat, quod ad exponentialia pertineret, quam quod transscripsi. Omisi autem demonstrationem logarithmicae tanqum obviae. Nec illam (quam vocant) Transactionem nunc amplius habeo, visam tantum apud transeuntem.

Ecce alterum Dni. Cluverii schediasma, quo paulo proprius ad rem videtur accedere. Si Archimedis quadraturam Parabolae improbat, cur non respondet ejus demonstrationi rigorosae, ostenditque, ubi vitium haereat; neque enim Archimedes assumit infinite parva aut alia, quae Cluverianis objectionibus obnoxia videri possunt.

Quando Dnus. Cuneau Te vidit, jam erat unus ex Secretariis intimis serenissimi Electoris Brandeburgici, etsi apud Dnum. Dankelmannum plerumque ageret. Nunc patrono everso stationem invenit commodam, factus Consiliarius, ubi licet minus in iis possit, in quibus nobis utilis esse poterat, quietiorem tamen et jucundiorem vitam agit. Mathematica et aestimat et intelligit, Astronomica imprimis. Caeterum inde a Dankelmanni casu nulla mihi cum illis notitia intercedit, qui in Halensis Academiae rebus aliquid valent; quaeram tamen a Dno. Cunaeo, quo illae sint loco.

Certissimum est, librum Bernerii prodiise sub Titulo: Dou-

tes sur la Philosophie. Invenies eum in Actis Lipsiensibus jam ante multos annos recensitum, si modo indicem generalem consules; habetur et in Novellis Reipublicae Literariae, si bene mimini; ibi non pauca, quae olim stabiliverat in suo Compendio Philosophiae Gassendi et alibi, dubia nunc sibi videri profitetur, et difficultates producit. Gratias interim ago, quod inquisivisti.

Non memini legere, qui aërem compressum ponderaverit. Memini Boylium, in his credo, quae Franc. Lino reponit, aut adjectis, calculo experimentorum deprehendere sibi visum aëris vim elasticam fere reciproce proportionalem esse spatio. Idem in pondere examinandum: Boylius etiam notare sibi visus est, aërem rarefactam a calore accipere vim se dilatandi majorem, quam proportione raritatis expectarat. Id dignum excuti simulque observari, annon similiter aër compressus minorem dilatandi vim acquirat, quam pro ratione densitatis, quod ego aliquando observasse mihi visus sum, facto tumultuarie experimento. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 26 Junii 1699.

CII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Hac ipsa hora ex urbe abiturus ad commorandum per aliquot septimanas ruri, pauca haec ad postremas Tuas repono. Epistolam Tuam misi Voldero, quam quia obsignata fuit, inquirere non licuit, itaque frustra ad eam me ablegasti pro inveniendo argumento contra vacua et atomos. Non opus est, ut me horteris ad agendum confessorem et defensorem veritatis, quandoquidem id feci, et facio etiamnum. Quod dixi, me spectatorem agere posse compendio laboris et commodo meo, id intellectum volo circa dubia, in quibus vestram utrinque opinionem perpendens aliquid in meam utilitatem vertere possum. Perscripsi et ob oculos posui Voldero querimonias Tuas de nimia ipsius scrupulositate, hortatus ut aliquid de rigore remittat.

Mihi sufficit quod comedas, Deum ea tantum posse quae vult, in sensu composito: in Deo enim nullam distinctionem agnosco inter ejus attributa, nec differunt nisi ratione effectuum. Conce-

dam igitur libenter, Deum omnia facere necessario, ideo quia necessario sua decreta exequitur: hoc tamen non obstante, Deus est ens liberum agens, quippe qui a nulla re extrinseca ad agendum impellitur vel determinatur, in hoc enim, ut puto, suprema libertas consistit; alterum vero posse et non facere tantundem est ac posse quae non decrevit seu revocare posse sua decreta, id quod involvit imperfectionem in Deo, tantum abest mihi libertatem notare.

Cluveriana, quae mihi communicasti, legi quidem, sed parum intellexi. Praeter pauca quaedam theoremata circa triangula et trapezia, quae tantopere commendat, cum tamen a quovis algebrae tyrone facile deduci possint, nihil omnino invenio, nisi inanes jactantias, affectatas obscuritates et nonnullas locutiones, quae a delirante potius, quam a sanae mentis homine profectae videntur. Vellem autem videre illam universalem quadrandi methodum Auctoris, quae in sequentem mensem differri dicitur in fine Octobris; quid dignum tanto feret hic promissor hiatu? Si omnes hucusque methodi infinitorum receptae ipsi sunt erroneae, ita ut et ipsa theoremata Archimedea vitiis non careant, oportet sane ut aliquid habeat singulare, quod equidem divinare non possum. Vellem autem scire, quam ergo proportionem statuat inter parabolam et rectangulum circumscriptum, si subsesquialtera non est vera; item quamnam ponat inter sphaeram et cylindrum circumscriptum, si eadem non est exacta. Doleo, quod dentur homines ejusmodi, qui evidentissimas veritates conentur suspectas reddere; quid de hoc Geometriae imperiti cogitabunt? Numquid merito divinam hanc scientiam ablegabunt ad vanas et incertas visiones? quandoquidem ea quoque speciosis adeo verbis in dubium vocari videant et falsitatis omnino accusari, quae ab Archimedis tempore in hunc usque diem supremum certitudinis gradum obtinuere.

Etiam apud Galilaeum nuper legi aliqualem modum, aërem compressum ponderandi. Dubium non est, pondus aëris densitati ejusdem esse proportionale, quantitates enim aëris aequalium voluminum adeoque etiam pondera sunt ut densitates. Sed non capio, quod dicis, Boylium notasse, aërem rarefactum a calore accipere vim se dilatandi majorem, quam proportione raritatis; credo Te voluisse dicere proportione reciproca, nam crescente raritate vis dilatandi decrescit. Dicis porro dignum esse exquiri, annon similiter aër compressus minorem dilatandi vim acquirat,

quam pro ratione densitatis: sed puto Boylium jam observasse aërem compressum non minorem, sed paulo majorem acquirere vim, quam pro ratione densitatis: idque sine experimentis ex sola ratione clarum est, nam vis elastica augeri potest in infinitum, quando densitas non nisi ad gradum finitum pervenire potest, quod sic ostendo: Finge Tibi antliam pneumaticam verticaliter erectam aëre plenam, qui aër jam comprimatur ab embolo onerato pondere infinito, itaque embolus descendet non ad fundum usque, quia aër, cum corpus sit, annihilari non potest; ergo descendet aliquousque tantum, id est aër comprimetur ad densitatis tantum gradum finitum. Interim vis elastica fit infinita utpote aequalis ponderi incumbenti, adeoque vires crescunt in majori ratione quam densitates. Rationes autem crescentium virium et densitatum olim determinavi in meis Meditationibus de Motu Musculorum, vid. Act. Lips. 1694. p. 205.

Ecce adjicio literas Varignonianas proximo cursore acceptas, quas remittes. Multa continent, quae Te concernunt. Miror rusticitatem Fatii nos duos inhumaniter adeo tractantis, quem nec verbis nec calamo unquam laesimus. Verum sit oportet, quod de ipso audivi, hominem esse austerum et saturninum, qui omnem societatem fugiat tanquam misanthropus consummatissimus. Frater ipsius natu major favorabilius de me sentiet, quippe cui olim Genevae nostra communicaveram, quae scriptis mandavit. Quis scit, annon incivilis noster agressor ea viderit indeque profecerit. Ejus scriptum quod in nos edidit, nondum habeo; in illud inquiri curabo Amstelodami. Quicquid glorietur de suo Newtonique calculo, nostra extenuans, spero nobis superesse quaedam, in quae ille non tam facile penetrabit. Vale etc.

Groningae d. 18 Jul. 1699.

CIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Prorsus incogitante me factum est, quod literae Dno. Voldero per Te distinatae ad Te obsignatae pervenere; nam volebam ut legeres, et adhuc volo ut legas, imo peto, simulque ut expendas,

et cum remittes tua cogitata, addas. Accipies autem proximis; nunc enim satis oneratus est fasciculus. Tuas ad Dnum. Menckenium curabo statim. (Imo jam curavi).

Gratias ago, quod mecum communicasti literas Dni. Varignonii, quem rogo a me officiose salutes, et quam obligatus ei sim testeris, quod ad me quoque pertinentia significare voluit, quibus ita utar, ut decet, Auctoremque nuntii dissimulabo, ut par est. Ipsum Fatii libellum missu Dni. Marchionis Hospitalii accepi. Non miror, quod judicas oportere hominem rusticum esse; certe apparet parum socialem esse, qui ita debacchetur in eos, a quibus non est laesus. Sed bene est quod lectores facile intelligent, invidia stimulatum scripsisse. Responsionem quam Actis inserendam composui, ecce accipis; eam ut cum sententia Tua remittas, rogo. Malui leniter castigare hominem, quam dure accipere, ut merebatur, nam ridiculum esse spectaculum puto, si Viri Eruditi, qui prae caeteris cultum profitentur, dicteriis inter se certent instar muliercularum.

Optime interim fecimus, quod novam accessionem Calculi differentialis adhuc suppressimus; ita enim fortasse habebit, cui dentem infigens offendat solido.

Wallisius consensum meum petiit, ut Epistolae meae veteres ederentur; dedi non invitus, etsi nesciam, an omnia nunc satis essem probaturus. Quaesivit an aliquid mutare vellem, sed non vacavit quaerere in antiquis schedis, ubi nec invenirem omnes. Virum doctum et bonum animo sinistro egisse nolim suspicari: utcunque res cadat, nunquam verebor nudam veritatem. Accipis nunc partem libelli Fatiani, reliqua mox sequentur. Interea Cluveriana remittes.

Deum omnia facere necessario, quod Tibi excidit, nec verum nec tutum est. Jam aliquoties a Theologis et Philosophis damnata est illa sententia, in Almerico quodam scholastico philosopho, nuper in Hobbio et Spinosa. Cur vera non sit, explicabo aliquando distinctius, ubi radicem contingentiae exponam; nunc enim ea res prolixioris operae foret. Interea suadeo, ut si aliter sentis, saltem pro prudentia Tua voces istas caveas in publico, quae Theologis quibusdam jam tum irritatis arma in Te suppeditarent.

Haud dubie Dnus. Cluverius aliqua laborat ἀῤῥεστία (ut Josephus Scaliger olim, et Hobbius, insignes alias viri) quod certitudinem demonstrationum Archimedearum impugnat. Sed nociturum dignitati Geometriae non puto, eoque facilius ignosco, praeser-

tim cum non scribat more Fatiano. Aliquoties ad me scripsit hac de re, sed nunquam ad responsiones meas quicquam replicavit. Quaesivi, ān posset aliam accuratiorem dare rationem Paraboles ad quadratum circumscriptum, quam est Archimedea? Hinc si mente esset libera, agnoscere posset nodum se quaerere in scirpo.

Quoniam tantum Tibi cum Fratre Fatii, natu majore, fuit commercii, non abs re suspicaris inde aliqnid ad eum pervenire potuisse. Quod ait, se Calculum differentialem habuisse suo marte, in eo forte se ipsum fallit: habuisse ejus initia quaedam et ipsum et multos alios, quis neget? Sed si talem habuisset, qualem nos, mirum est nihil dudum protulisse, unde hoc appareret, cum nos nihil fere attingamus, quin aliqua nobis occurrant notatu digna.

Non est necesse, ut pondus aëris sit ejus condensationi proportionale, nisi aërem ponamus esse homogeneum compromibile. Quid enim, si constet duabus partibus, una comprimibili, altera aequaliter disseminata non comprimibili? uti certe tale aliquid ei inspersum non videtur negandum. Sit aëris pars comprimibilis b, incomprimibilis c, spatium quod b occupat sit l, quod c occupat sit m. Ponamus totum comprimi in spatium dimidium $l + m, : 2$; itaque cum spatium ipsius c maneat, nempe m, patet spatium novum ipsius b fore $l - m, : 2$, adeoque fore minus dimidio prioris: itaque cum gravitas specifica sit in ratione ponderis seu materiae directa et voluminis reciproca, patet eam non fore in ratione condensationis sive compressionis, nec in ratione virium comprimentium. Quin etsi omnes partes aëris (intelligo semper eas, quae pondus habent) essent comprimibiles, si tamen aliae plus minusve aliis tales essent, rursus aliqua esset diversitas. Hinc in Boylii defensione contra Linum ostendit Tabula experimentorum, paulo majore fuisse opus pondere mercurii, quam opus esse videbatur, quod ego admistae materiae incomprimibili imputo. Hinc densitas aëris (cui reciproca est raritas) duplici modo accipi potest, vel ex pondere ipsius et volumine, ita nihil aliud erit, quam ipsa aëris gravitas specifica; vel ex compressione sive vi elastica seu ex pondere, quod aër potest sustinere in vacuo, verb. gr. ex altitudine mercurii. Haec duo coinciderent inter se, si aëri nihil non comprimibile aut nihil inaequabiliter comprimibile esset immistum, sed si distinguamus b et c, utique divortium duae aestimationes patiuntur. Ut in casu jam dicto, gravitas specifica fiet dupla, sed compressio plus quam dupla. Et ideo aër in spatium dimidium

comprimendus erit pondere plus quam duplo ejus, quo in priore spatio coërcebatur. Et hinc, experimentis conferendo gravitatem specificam et vim elasticam aëris, definiri poterit aliquid circa aëris partes.

Jam pergamus ad ea, quae dixi de Calore. Hic verba mea secius accepisti. Dixi, aërem rarefactum videri a calore accipere vim se dilatandi majorem, quam proportione raritatis. Credis me voluisse dicere: proportione reciproca. Sed sensus hic est: Sint duo unius ejusdemque aëris volumina, unum v, alterum majus (v); ponamus aërem in volumine v positum per se sustinere pondus p. Calore autem dati gradus accedente, sustinere posse majus pondus π, seu a pondere π (non obstante calore) in suo volumine v coërceri. Ponamus eundem aërem in volumine (v) positum per se sustinere pondus (p), et accedente calore pondus majus (π). Jam cum calor in aërem magis rarum minus agat, ponamus aërem esse homogeneum perfecte elasticum, et eundem aërem, in quocunque sit statu, eodem calore aeque dilatari, vel ad dilatandum se disponi, verb. gr. calorem dati gradus supervenientem afficere, ut aër duplum occupet spatium ejus, quod habet, seu duplum prioris ponderis sustineat, seu ponamus calorem esse supplementum compressionis vel densitatis, ac tantum in aëre efficere, quantum si ipse aër esset densitatis duplae. His positis utique erit p ad π ut (p) ad (π); sed si (v) sit millecuplum ipsius v, utique (posito aërem esse homogeneum, seu gravitates specificas esse ut compressiones vel pondera coërcentia) etiam (p) erit submillecuplum ipius p. Et ideo licet ponamus calorem esse virtutis elasticae duplicativum, et π esse 2 p vel $(\pi) = 2\,(p)$, tamen (π) erit quantitas parum notabilis, quia et (p) est talis, et hinc fit, ut in Barometro parum noceat calor, ob aëris magnam raritatem. Boylius tamen notasse sibi visus est in aëre valde rarefacto adhuc aliquid notabile efficere calorem, et videtur velle plus eum facere, quam quis expectaret, seu plus quam pro ratione raritatis. Ita scilicet ait in Observatis circa durationem virtutis elasticae aëris rarefactione citra calorem: „Adhuc, inquit, alius superest modus a me excogitatus, quo aër in quodam „parvo instrumento portatili ad quingenties sexcentiesve, forte mil„lies amplius solito spatium expansus, non tantum longo tempo„ris spatio elasticitatem suam retinuit, sed et primario cuidam „quaesito meo satisfecit, utrum scilicet aër valde dilatatus citra

„calorem insigniter afficeretur calore externo. Eo quippe ipsum „affici in hoc instrumento palam est; ibi enim magna, quam jam „acquisivit quamque tueri velle videtur, raritate nequicquam ob- „stante, manui exteriori vasi admotae calor subitam manifestamque „admodum operationem edit, eaque remota, aër sensibilis derepente „ad priores suas dimensiones juxta ac temperiem revertitur.“

Haec Boylius, constructionem instrumenti non explicans, quae forte talis fuit. In (fig. 142) tubo A sit alius tubus B supra clausus, infra apertus, in quo suspensus mercurius. Ex tubo A extrahetur aër, et descendet mercurius in tubo B pene ad imum, et ex illo descensu aestimari poterit rarefactio, cum enim tantillum mercurii in tubo B remaneat, erit aëris dilatatio praesens ad priorem, ut altitudo mercurii residua ad priorem. Extracto aëre claudatur tubus A et ita servetur ad usum. Hic tubo A calefacto mercurium nonnihil exsurrexisse non dubito, cum enim aliqua vis elastica aëris superfuerit. non mirum si ea fuit calore aucta. Sed cum tamen Boylius nihil distincti afferat, nescio an hinc aliquid colligere novi potuerit. Nam si (ut solet) contentus fuit, rem quae per se intelligitur sensibilem reddere, non erat cur valde commendaret experimentum aut quaesito alicujus momenti satisfactum diceret. Sed si calor, qui mercurium aëri, parum rarefacto, incumbentem in vacuo in duplum attulit, illam exiguam mercurii quantitatem in hoc tubo B plus quam in duplum extulisset, experimentum fuisset alicujus momenti, et calor in aëre rarefacto plus egisset, quam proportione raritatis seu quam raritas ejus admittere debere videatur. Ex talibus experimentis haberi posset, utrum calor agat (ut sic dicam) per multiplicationem, an per additionem, id est, an tantum sic agat, quasi aëris densitas multiplicatur, uti paulo ante supposui, an vero sic agat, quasi novam aliquam vim de suo adjiciat constantem (ut sic dicam) non vero proportione aëris recipientis crescentem? An vero agat partim per multiplicationem, partim per additionem? Sane si additio admisceretur, calor magis aëris rarefacti elastrum augebit, quam pro ratione raritatis; et aëris compressi elastrum minus augebit, quam pro ratione densitatis. Et hoc est quaesitum magni momenti, quod merebatur utique definiri. Sed nescio an vim ejus perspexerit Boylius.

Hic autem abstraho animum ab eo defectu, de quo initio locutus sum, qui ab admixto incomprimibili oritur, et alium irregularitatis, si qua nova deprehenditur in caloris operationibus, fon-

tem quaero. Obiter addo, ex eo quod aër comprimendo annihilari nequit, sequi quidem, quod ad gradum tantum finitum densitatis pervenire valeat; sed tamen si fingeretur res homogenee et, ut sic dicam, metaphysice elastica, semper continuari posset compressio in infinitum, et pondere centies millies aucto in partem 100000mam comprimetur; nihil ergo prohibet, densitates esse viribus proportionales, modo aër sit homogenee elasticus, nec ullum hinc periculum annihilationis.

Peto ut mihi communices, quae a Te petit Dnus. Varignonius, nempe Analysin lineae brevissimi appulsus ad rectam, et Analysin Tui Theorematis de rectificatione curvarum, et postremo nosse opto, quid sit illud, cujus spem fecisti Academiae sub finem scripti Tui de quadratura segmentorum Cycloïdalium; nam et ego libenter Tuis frui velim. Vale etc.

Dabam Hanoverae 25 Jul. 1699.

CIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Mitto ecce partem reliquam Libelli Fatiani, quam promiseram; neque dubito quin priorem acceperis, una cum meae responsionis delineatione. Adjunge et copiam literarum ad Dnum. Volderum, petoque ut omnia per partes remittas. Nescio quid Dnus. Fatius potuerit adjungere ad Theoriam gravitatis Newtonianam, ut participem se honoris jactare possit, ut facit.

An unquam considerasti numerum discerptionum vel divulsionum numeri dati, quot scilicet modis possit divelli in partes duas, tres etc. Videtur mihi ejus determinatio non facilis, et tamen digna quae habeatur.

Prolixe nuper dixi de aëris gravitate specifica et vi elastica, et caloris frigorisque ut ipsis concurrente. Digna res, quae tum rationibus, tum experimentis stabiliatur.

An quisquam nunc in Batavis evigilat ad studium interioris Geometriae? Quid facit ille juvenis doctus Hagiensis?

De Nieuwentitio et altero illo, qui Problemata spernebat, Makreelio puto, nihilne amplius auditur? Credo, ubi haec sciverit

Nieuwentitius, cum Cluverio et Fatio triplum foedus contra nos esse initurum. Vale etc.

Dabam Hanoverae 28 Julii 1699.

P. S. Adjungo et schedam, quam fortasse meae ad Fatium responsioni annectam, ut appareat, quam infinities ampliora dare liceat iis, quae dedit Moivraeus.

CV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ecce Dn. Volderi responsionem. Communicavit mihi descriptionem Tuarum, quae ad me obsignatae pervenerant, ita ut non opus sit eas porro mittere. Ad Tuam querimoniam de ipsius nimio rigore reponit, se Tibi non contradicendi, sed unice veritatis amore objicere; se libenter agnoscere, aliud esse objicere, aliud exigere demonstrationes; sed ex altera parte non minus certum esse, aliud esse objectionibus respondere, aliud ostendere id quod asseritur: se tantopere non laborasse de mensura virium, quam ut, si fieri posset, ex Te hac occasione eliceret demonstrationem ejus, quod ais, substantiam omnem necessario actuosam esse: hanc enim frustra se quaesivisse saepius, quae tamen sibi videatur maximi momenti multis de causis. Sed eam spem jam evanuisse, nec se velle hanc urgere amplius, ne videatur uti eodem rigore. Queritur porro, quod forte existimes, se Cartesio ita esse addictum, ut ejus effatis absque examine calculum adjiciat: in multis eum errasse se non dubitare, nec tamen existimare omnia illi quae objiciuntur vere objici: dicet porro, se admodum mirari, quod ita conqueraris de hac sua negatione, quae ipsam rem, de qua agitur, continet; et tamen, quod ne verbulo quidem respondeas ad ea, quibus negationis suae causam dederit, sive quod ad ea non attenderis, sive quod tam frivola existimaveris aut responsione digna haud censueris, sive denique alia quaepiam, quam hariolando assequi non possit, intercesserit causa.

Ecce remitto schediasma responsorium, quod parasti contra scriptum Duillerii. Placet mihi valde, quod modeste, sed simul vivide respondeas; gratias ago, quod mei etiam quodammodo apo-

logiam scripseris. Quando Duillerius queritur, me, cum programmata distribuerem, ipsum non dignatum esse, ut ipsi exemplar unum misissem, ad hoc potuisses regerere, me non somniare, ubinam in Anglia degat, vel qua inscriptione literas meas ad illum mittere potuissem: ob hanc rationem me duo exemplaria misisse Dno. Newtono, ut et duo Dno. Wallisio, non ut hos Viros ad certamen provocarem, quemadmodum Stoïcus noster arbitratur; ad provocandum enim unum exemplar suffecisset: sed quia horum tantum sedem stationis sciam: his duobus me tantum misisse, ut ceteris Mathematicis communicarent, quibus ipsi voluissent. Quando porro arroganter adeo et rustice Tibi insultat, se a Te nihil didicisse, aliis discipulis Tibi gloriandum esse, responderem ego, omnino verum esse, nihil illum a Te didicisse, adeoque etiam non incultum et agrestem suum Viros honestos tractandi morem. Ante omnia paulo asperius excipere deberes fictam ipsius modestiam, sub cujus umbra suam infirmitatem tegere conatur, quando inepte admodum quiritatur se quoque, si qua invitatione dignus visus fuisset, literis suas dudum solutiones fuisse exhibiturum; quasi scilicet, si modo se applicare dignatus fuisset, primo statim applicationis momento totum mysterium detecturus fuisset. Interim nobis non dicit, quanto tempore frustra insudaverit, quam improbum laborem hanc in rem impenderit. Scire enim Te volo, hic aliquem esse exulem Gallicum, duorum Comitum Anglicorum Ephorum, qui antequam scirem Duillerium aliquid in hanc rem edidisse, mihi narravit, quod familiariter novit Dn. Moivraeum, pariter Gallum exulem, et Duillerium; quod jam ante duos circiter annos uterque, tam Duillerius quam Moivraeus, quotidie se invicem inviserint, et magna contentione sese huic problemati accinxerint (illud enim statim viderunt in Historia Erud. Basnagii, quicquid jam dissimulet Duillierius) et quasi certatim laborare voluissent, integras noctes consumpserint: quod Moivraeus primus destiterit re infecta, et tandem quod Duillerius, postquam diu satis frustra insudasset, abjecerit arma, ipsi Mannevillaeo (ita nomen narrantis est) candide fassus se omnino desperare; quod postea tamen sub ipsius (Mannevillaei) abitum ex Anglia, ante 18 fere menses, de novo Duillerius resumserit ad manus problema desperatum, eique acriter et tenaciter inhaeserit adhuc, cum ab ipso proficisceretur; quod autem plura nesciat, an ex eo tempore quaesitum invenerit, nec ne. Hisce itaque diebus cum ipsi mon-

strarem scriptum Duillerii haec omnia dissimulantis, mirari non satis potuit ejus tam parvum candorem et tam incomptum scribendi stylum. Interrogavi Dominum Mannevillaeum, annon aegre laturus sit, si talia responsioni publicae ad scriptum Duillierianum edendae admisceremus; ille quidem annuit, modo id fiat, suppresso suo nomine; imo, si necesse esset, quovis tempore veritati testimonium dare etiam nomine suo, se paratum semper esse. Quid jam factu opus sit, ipse judices. Quicquid sit, mihi videtur perabsurdam esse et inanem excusationem, d i c e r e, modestiam impedire, quominus quis sua inventa publici juris faciat; ita enim nemo unquam aliquid in publicam utilitatem edere poterit, nisi secundum Duillierium immodestus esse velit. Quod si vero nomen exprimere, jactantiae esse dicat, quidni et ipse suas problematum difficiliorum curvae Catenariae, Velariae, Isochronae etc. enodationes, methodosque quas jamdiu possidere dicit, bono publico promulgat, suppresso suo nomine: hoc utique, salva sua modestia, fieri posset.

Quantum tandem ad ipsas Fatii solutiones, quid de iis sentiendum nescio; scis ipse hujusmodi problemata, nostro more tractata, nullum aut perbrevem calculum requirere, quia plerumque ex sola contemplatione infinite parvorum, adhibita quadam dexteritate, quaesitum sponte fluit; hinc horribiles et perplexi calculi, quos instituit, mihi valde sunt suspecti; subvereor enim ne ipsi hic acciderit, quod nuper Gregorio paralogizanti in curva Catenaria, qui conclusioni solutionem accommodavit. A me sane impetrare non potui, ut prolixas adeo analyses Duillierii examinarem, partim quod tempus inutiliter terere, partim quod etiam minutissimis literulis inspiciendis oculis meis officere noluerim. Contremisco fere, si oculos conjicio in inextricabilem computationem pro curva solidi minimae resistentiae, quam quidem vocat m a g i s a r d u a e d i s q u i s i t i o n i s, et d i f f i c i l i o r e m, quam problema celerrimi descensus, sed Duillerio forsan soli, quia genuinam solvendi methodum nondum habet. Hoc enim problema solidi minimae resistentiae, tantae facilitatis deprehendo, ut ad ejus solutionem perveniendam nullo prorsus calculo fuerit mihi opus, quando quidem calamo et charta destitutus et in lecto decumbens, sola imaginationis vi plenarie id solvi. Solutionem hic adjiciam, quam, si placet, cum responsione Tua Actis inseri curabis, ut videat Duillierius, se mirum quantum adhuc abesse a vera et naturali via

et ipsummet pudeat horrendi sui labyrinthi, in quem per calculum suum incidit. Esto (Fig. 143) curva quaesita BFN, quae ex revolutione sua circa BM describat solidum, in quod minima fiat resistentia, si moveatur secundum plagam axis BM. Elementa applicatarum NM concipiantur divisa in partes aequales NR, RP: sint NL, LF duo elementa curvae respondentia elementis NR, RP: producatur RL ad O, ita ut LO infinite parvum sit respectu RL. Ductis NO, FO, erit ex natura minimi resistentia in zonam ex conversione elementi curvae NLF (quod ut duas lineolas rectas NL, LF considero) factam, aequalis resistentiae in zonam ex conversione lineolarum NO, OF, adeoque resistentia zonae NL — resist. zonae NO = resistentiae zonae FO — resist. zonae FL. Jam vero assumta hypothesi communi, qua et Newtonus utitur pag. 325 seqq. nimirum resistentiam obliquam in NL esse ad resistentiam directam in NR, ut NR^2 ad NL^2, exprimentur resistentiae elementorum curvae ex. gr. ipsius NL per $\frac{NR^3}{NL^2}$ adeoque resistentia zonae NL per $\frac{MN \times NR^3}{NL^2}$; hinc igitur $\frac{MN \times NR^3}{NL^2} - \frac{MN \times NR^3}{NO^2} = \frac{MR \times RP^3}{FO^2} - \frac{MR \times RP^3}{FL^2}$. Sunt autem OT, LS differentiae ipsarum NO, NL, et LF, OF, harum respectu incomparabiles, ideoque $\frac{MN \times NR^3}{NL^2} - \frac{MN \times NR^3}{NO^2}$ tantundem quod $\frac{2MN \times NR^3 \times TO}{NO^3}$, et $\frac{MR \times RP^3}{FO^2} - \frac{MR \times RP^3}{FL^2}$ tantundem quod $\frac{2MR \times RP^3 \times LS}{FO^3}$. Hoc igitur illi est aequale, et divisis per $2NR^3$ et $2RP^3$ (quae per hypothesin sunt aequalia) provenit $\frac{MN \times TO}{NO^3} = \frac{MR \times LS}{FO^3}$. Ut autem TO, LS incomparabiles cum reliquis eliminemus, observo quod propter triangula similia NO . RO :: LO . TO adeoque $TO = \frac{RO \times CO}{NO}$ et ob eandem rationem $LS = \frac{VF \times LO}{FO}$; substitutis itaque hisce valoribus loco TO et LS, et divisis per communem LO, habebimus aequationem elementis constantem $\frac{MN \times RO}{NO^4} = \frac{MR \times VF}{FO^4}$ affectam suis respec-

tive applicatis. Unde concludo, curvam quaesitam BFN ejus esse naturae, ut, suppositis elementis applicatarum aequalibus, applicata quaevis multiplicata per elementum respondentis abscissae, et divisa per biquadratum elementi respondentis curvae, producat quantitatem constanti aequalem; quae ergo constans, servata homogeneorum lege, sumatur ad lubitum. Hinc si BM vocetur x; MN, y; NR, RP etc. dy; RO, dx; NO, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ds; fiet $\frac{ydx}{ds^4}$ = huic assumtae quantitati constanti et homogenae $\frac{a}{dy^3}$; quae reducta dat hanc aequationem differentialem primi gradus $ydy^3dx = ads^4$, quae curvae quaesitae naturam exprimit; ubi notandum, proprietatem hujus curvae a Newtono sine analysi et demonstratione traditam pag. 327, si resolvantur in aequationem, eandem omnino dare, quam hic inveni. Miror profecto Duillierium suam simpliciorem, hanc vero perplexiorem dicentem, cum tamen haec illam exhibeat facile, non vero vice versa, nisi summa cum difficultate, quam sane Duillierius non facile superabit, id est, non facile a cognita proprietate radii circuli osculantis ad proprietatem tangentis ascendet; quemadmodum vicissim nullo labore ex proprietate tangentis proprietas radii osculantis innotescit, non secus quam ab integralibus ad differentialia descendere ludus jam est. Videtur Duillerius haec nondum satis ruminasse, nec sufficientem adhuc praxin in nostris habere, quod hospitis instar *ἀγεομετρητῶς* adeo loquatur. Non minus miror, quod Newtoni proprietatem vocet constructionem curvae. Indicium sane est, illum etiam parum nosse, quantopere desideretur modus construendi curvam ex proprietate tangentis data, quasi scilicet iterum non minus facile esset ex tangentibus curvam determinare, quam ex curva tangentes. Sane tantum abest Newtonum constructionem dedisse, ut potius judicem maximam adhuc superesse difficultatem, constructionem ex ejus proprietate seu ex aequatione jam inventa eliciendi, idque propter differentialium altam dimensionem, cujus radix quaerenda esset more algebraico, antequam relatio possit haberi inter dx et dy; quod cum prolixissimum calculum requireret, non abs re puto, si hic peculiarem modum ostendero, quo, missa investigatione radicis per algebram, statim ad curvae quaesitae constructionem, haud sane inconcinnam pervenio. Modus autem hic talis est: Aequatio inventa erat $ydy^3dx = ads^4$ seu substituto ipso valore ds, $ydy^3dx + adx^4 + 2aadx^2dy^2 + ady^4$: ponatur jam

$dx = \frac{m\,dy}{a}$; hocque surrogetur in aequatione, et tunc divisa per dy^4, prodibit haec aequatio algebraica $aamy = m^4 + 2aamm + a^4$; adeoque $y = \frac{m^3}{aa} + am + \frac{aa}{m}$, et $dy = \frac{3mmdm}{aa} + 2dm - \frac{aadm}{mm}$, hinc $\frac{mdy}{a}$ seu $dx = \frac{3m^3dm}{a^3} + \frac{2mdm}{a} - \frac{adm}{m}$. Sumtis igitur horum integrabilibus, erit $x = \frac{3m^4}{4a^3} + \frac{mm}{a} - lm$ (per lm intelligo logarithmum ipsius m, qui per ea, quae explicui de principiis calculi exponentialium in Act. Erud. 1697, Mense Martio, est aequalis $\int \frac{adm}{m}$). Inveni itaque valores coordinatarum x et y, expressos per quantitates duas, tertiam communem indeterminatam m involventes, id quod hanc elegantissimam suppediat constructionem: Ad axim (fig. 144) CE describantur duae curvae, una algebraica DAH, altera transcendens IK, hac lege, ut posita abscissa $CE = m$, applicata illius EH sit $= \frac{m^3}{aa} + 2m + \frac{aa}{m}$; applicata vero hujus EK sit $= \frac{3m^4}{4a^3} + \frac{mm}{a} - lm$; erunt itaque KE, HE coordinatae curvae quaesitae. Ad quam igitur construendam nihil aliud opus est, quam ut ad cM, applicatis parallelam, tanquam ad axem ducatur et producatur perpendicularis KM in N, ita ut MN sit $=$ EH: puncta enim N erunt in curva quaesita BN, quae nempe circa CM conversa producit solidum, in quod, si moveatur secundum plagam axis CM, fluidum faciat resistentiam minimam. Q. E. F. Notandum quod curva IK sit ex earum numero, quas voco percurrentes, quarum scilicet aequatio naturam exprimens consistit terminis finitis seu algebraicis, sed ad indeterminatam dimensionem ascendentibus. Positis enim ut ante CE, m, et EK, x, et assumta constanti $c^4 = 4a^3\,la$, erit aequatio naturam curvae IK determinans haec $m^{c^4} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3x}$ id est, indeterminata m, elevata ad potentiam determinatam c^4, est aequalis determinatae a, elevatae ad potentiam indeterminatam $3m^4 + 4aamm - 4a^3x$, adeoque haec curva ipsius Logarithmicae naturam quodammodo habet. Etenim et Logarithmica hujusmodi aequatione gaudet, cujus nempe quantitas determinata ad

potentiam indeterminatam, quantitas vero indeterminata ad potentiam determinatam elevatur.

Haec omnia, si digna deprehenderis quae Actis inserantur, per me licebit; Tuae interim censurae et emendationi subjecta volo. Ad reliqua contenta literarum respondere, haec festinantissime scribenti mihi jam non vacat. Ea in proximam occasionem reservabo, ne schediasmata tua retardem.

Ecce dum posteriores has lineas scribo, Tuas secundas literas cum adjunctis schedis accipio. Percurrens obiter ultimam plagulam scripti Duillierii, reperio constructionem, quae cum mea nonnihil affinitatis habere videtur, sed eam examinare jam non licet. Certus tamen sum, quod eam non invenisset ex sua solutione, nisi Newtoniana proprietate adjutus. Optandum esset, ut methodum quam secutus est, adjecisset, partim ut id verum esse patuisset, partim etiam ut videre potuissemus, annon eadem perplexitate laboret, quam ipsa ejus solutionis via: tantam saltem simplicitatem, qua ego usus sum, ipsum in constructionis suae investigatione adhibuisse vix crediderim. Caeterum vides, quam brevi tempore, quam prompte haec omnia expediverim. Triduum enim tantum est, quod Tuas priores cum chartis Fatianis, quae hisce meis ansam dedere, acceperim. Miror vero operam ingentem, quam Fatius huic Newtoniano problemati impenderit, describendo curvam laboriose in ampliori, ut dicit, charta et calculando integram tabulam, cui forte non unam alteramve tantum horam destinaverat. Jam vide, annon meliori jure sua propria verba ipse in sinum retundere possim, dicendo: „Quasi vero manus darent, quicunque „in arenam e vestigio descendere nolentes, intra praestitutum tem„pus problema non solvissent. Problema, inquam, cui solvendo „auctor opportunum otium nactus fuerit, cui tractando forsan mul„tos annos insudaverit; quod elegerit ipse, quod amaverit, ac ar„dentiori studio prosecutus fuerit etc. quod mihi hactenus ignotum „in Newtoni libro delituit.“ Id me interim paratum corripuit, quamvis ideo propria studia non deseruerim. Sunt enim et mihi multa agenda, et forte non minoris momenti, quam negotia Duillierii, qui sui juris paratus esse semper deberet ad problemata solvenda, si tanta, ut jactat, dexteritate pollet. Vale, Vir Amplissime, et fave etc.

Groningae 7. Aug. 1699.

P. S. Misi tibi nuper per aliquem Saxonem studiosum Medicum Disputationem meam de Nutritione; scire velim an acceperis. Quis quaeso iste Dom. S. cui, ut videtur, Duillierius dentes etiam monstrat, mox invasurus, nisi alter destiterit. Legi Tua de progressionibus, mihi nimis abstracta et abstrusa videntur. Habui etiam consimiles speculationes aliquando.

Nostine illum Civem vel potius Thrasonem Atlanticum, qui nuper in Actis comparuit, quadraturas et rectificationes circuli sectionumque conicarum promittens ex invento Heuratiano?

CVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Dominus De Volder questus fuerit, objectiones quasdam suas a me praeteritas fuisse, ideo respondeo ample satis, et ni fallor omnem speciem difficultatis circa Actionis aestimationem tollo, ac rationem explico, cur in actionibus liberis seu potentiam suam mere exercentibus actio et vis agendi non tantum ab effectu, sed etiam ab effectus promptitudine debeant aestimari; sed in actionibus violentiam facientibus et potentiam suam agendo destruentibus, non promptitudinis, sed simpliciter effectus realis quantitas sit aestimanda, et ita quae nunc dico, cum iis quae dixi olim, non concilientur tantum, sed et pulcberrime conspirent, ut in effectu reali nulla, in effectu formali omnimodo temporis ratio habeatur.

Quod si Dnus. Volderus ea aequitate uti pergit, quam initio ostendere visus est, non dubito, quin sibi in hoc argumento satisfactum profiteatur.

Doctrinam de substantiarum activitate, magis adhuc a materia sensibusque abstractam, nunc agitare inutile putavi, donec de re faciliore conveniamus. Dicat ille, an non dicat, se de sententiae circa substantiam meae demonstratione jam desperare, non refert; neque ideo aequum est ut statim, omissis aliis factu necessariis, in haec ab usu remotiora incumbam, et nondum satis digesta immature effundam, ideo tantum ut ridicula vanitate apud ipsum jactare me demonstratorem possim. Et qua id, quaeso, spe aggrederer, si in rebus mathematicis et meo judicio liquidissimis sibi

satisfieri non pateretur? Ad convincendos homines in metaphysicis alio scribendi genere esset opus, cujus formam concepi magis animo, quam expressam habeo.

Caeterum nolim, ut meo nomine de rigore ejus apud ipsum queraris; quid enim ille rigor, vel si mavis, obstinatio, si pergeret, mihi nocet? Aut quid aliud facit, quam ut ipse sibi aditum aperiri vetet? Difficultates objicientium libenter admitto, atque etiam solvo, ac dum id facio, non parum lucis spargo. Aliud, fateor, est difficultatibus respondere, aliud quaesita demonstrare. Sed qui partem contemneret muneris, an Tu illi totum obtrudendum putares? Adde rem esse maximam satisfacere difficultatibus, ausimque dicere, a nemine hactenus praestitam in Philosophia. Facile crediderim pluris ipsi videri, intimam aperiri naturam substantiae, quam aestimari corporum vires. Sed haec ipsa virium aestimatio mentem praeparat, ut facilius sustineat majorem illam lucem, qua perstringuntur nimis velut offusa caligine, qui vulgi et Cartesianorum etiam notionibus circa naturam materiae, motus et virium sunt assueti; itaque per hanc portam a Mathesi ad Metaphysicam transeundum censeo. Non igitur tam nostrum est queri, quam aliis viam rectam monstrare, et ad ejus studium hortari si negligant, nec ipsorum est de nobis, nec nostrum de ipsis, sed ipsorum de se ipsis queri.

Expecto ut Fatianum Libellum mihi per partes remittas; nam Dnus. Menckenius prius relationem de eo petit Actis inseri, quam refutetur. Eam curabo ut habeat a partium studio alienam; jungam deinde responsionem meam, et excerpta ex Tuis, tum quibus problema figurae minimum in fluido resistentis melius ipse solvis, tum etiam alia praesertim pertinentia ad narrationem Dni. Mannevillaei, sed dissimulato penitus nomine viri optimi. Addam etiam, quam prompte rem expediveris. Credibile est, tum demum resumsisse problema Brachystochronae Fatium, quando Acta Eruditorum cum Methodis in Angliam pervenere. Quis vero his ita positis, quae ex narratione Dni. Mannevillaei verissima esse non dubito, non statim judicet falsum esse, quod ait perspectum sibi fuisse consensum inter Brachystochronam et lineam opticam undarum. Ille S. quem invadit, est Dominus Sault, qui Gregoriano credo more, speciem quandam solutionis vel demonstrationis affectavit, cui parem non fuisse facile credo. Sed aequum erat, ut Dnus. Fatius a se inciperet, antequam alios reprehendere auderet:

ab omni vitio immunis esse debet, qui in alium paratus est dicere. Itaque non dubito, Saultium, ubi omnia intellexerit, par pari redditurum. Si nonnihil lapsus est, certe modestiae leges non violavit, nec malis artibus famam quaesivit, quod nostrum fuisse jam apparet. Certissimum est, nunquam Duillierium ad solutionem Newtoniani problematis fuisse perventurum, nisi Newtonianam proprietatem ante oculos habuisset; nam quam ipse per labyrinthum suum assecutus est, exitum ex labyrintho nullum dedisset.

Mea de progressionibus vel potius de expressionibus obiter Tibi inspecta puto, alioqui vidisses nihil esse facilius, nihil naturae consentaneum magis, patereque etiam Tironi jam sum expertus. Civem Atlanticum, id est, ut suspicor, Tuum, qui mihi se non ignotum dicit, necesse est magis detrahere sibi larvam, ut a me agnoscatur. Vale etc.

Dabam Hanoverae $\frac{1}{11}$ Septembr. 1699.

P. S. Doleo, tuam De Nutritione dissertationem ad me non pervenisse.

CVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Remitto tandem ecce Libellum Fatianum, quod citius fecissem, nisi inauguratio Recturae Academicae, quae pro hoc. anno a Proceribus mihi delata fuit, scribendi otium praeripuisset. Forsan et eadem in causa erit, si ea durante ad Tuas posthac segnius et negligentius, quam pro more solitus sum, respondero, cujus veniam a Te facile mihi promitto, ubi negotiorum Rectori incumbentium multitudinem perpenderis. Tuae ad Volderum exaratae impense placuerunt, commovebunt ipsum haud dubie, si non prorsus permovebunt: perelegans imprimis est distinctio inter effectum formalem et realem, ut et inter actiones liberas et violentiam facientes, ubi nimirum ostendis in prioribus rationem habendam promptitudinis, sed non in posterioribus. Ita quidem aestimationem faciendam esse semper putavi; hinc est, quod corporum ascendentium vires ex altitudinibus tantum sint metiendae, non considerando quanto tempore percurrantur: cum enim corpus ascendendo suam potentiam uniformiter destruat, patet utique parum referre, sive

promptius sive segnius peragatur, quod peragendum est. Vana adeoque est objectio dicentium, corpus quod plus temporis insumat ad eandem altitudinem ascendendo, plus etiam resistentiae a gravitate recipere, quoniam major tunc numerus sit ictuum, quibus grave repellitur.

Alius Gallus nuper mihi retulit, inter Newtonum et Fatium litem gravem subortam fuisse, qua vero de causa, illum latebat: hoc tantum pro certo addidit, quod Newtonus Fatium plagii insimulaverit, graviterque exprobraverit ipsi, quod alienis inventis superbiat. Displicet fortasse Newtono, quod videat invitus arma sua contra nos dirigi.

Ut paucis etiam ad Tuas priores, ad quas nondum respondi, nunc respondeam, non puto me absolute adeo dixisse, Deum omnia facere necessario, prout talis sententia a Theologis et Philosophis damnata est in Hobbio et Spinosa aliisque, quasi nimirum Deus coacte ageret. Minime, sed ego ita interpretor: Deus agit ex decretis suis aeternis, immutabilibus et irrevocabilibus, adeoque a parte post necessariis, quorum utique respectu Deus necessario agit; agit tamen etiam liberrime, vel sponte vel volenter, utpote qui a nulla re extrinseca ad agendum determinatur: ipse praeterea Auctor existit liberrimus et independens aeternorum suorum decretorum, adeo ut hoc sensu sine contradictione dici possit, et libere et necessario agere.

Ut evitemus logomachiam circa pondus aëris et ejus condensationem, ego condensationis quantitatem seu gradum aestimo ex reciproca ratione voluminum et directa materiae aëreae, quae pondus habet; sive jam habeat partem incomprimibilem, sive non, erit utique pondus aëris condensationi ejus proportionale. Finge aërem, volumine a contentum, uniformiter extendi, ut occupet volumen 2a; numquid manente hoc modo pondere condensatio prioris voluminis a duplo major est condensatione posterioris voluminis 2a, adeoque numquid etiam gravitas specifica illius duplo major est gravitate specifica hujus? Finge jam aërem voluminis a extendi in volumen 3a, id est, secundum definitionem condensationis recipere triplo minorem condensationem, recipiet sic etiam triplo minorem gravitatem specificam, siquidem tertia pars aëris in 3a contenti, etiam tertiam partem ponderat ejus, quod ponderat totus. Et sic porro, adeo ut semper pondus aëris aequalium voluminum ejus condensationi sit proportionale. Quando praeterea dicis, credibile esse aëri

aequaliter interspersam esse partem incomprimibilem, hoc quidem facile largiar, si id intelligas de particulis aëris seorsum sumtis, quae utique solidae sunt et compressioni non obnoxiae, et sic non aliqua pars tantum, sed omnis aër erit incomprimibilis. Sed si, prout videtur, certae parti ipsius massae tribuis incomprimibilitatem, qualis vulgo aquae tribuitur, tunc non capio, quo pacto talis materia in aëre comprimibili aequaliter disseminata intelligi possit; nam si disseminata est, ita ut particulae ejus se mutuo non tangant, ut insulae in oceano, quid impedit, quo minus propius sibi mutuo accedant, et sic comprimibiles sint, contra hypothesin, eodem nempe modo, quo aqua alias incomprimibilis, sed in vapores resoluta, una cum aëre cui admixta est, comprimitur. Quod si vero materiam illam incomprimibilem alio sensu in aëre disseminatam dicas, ut nempe ejus particulae immediato contactu altera alteram excipiant, tunc rectius diceres, partem aëris comprimibilem disseminatam esse in incomprimibili, quam vero hanc in illa; et sic tota massa aërea foret incomprimibilis instar aquae; immediatus quippe contactus particularum vi compressionem tentanti resisteret, nisi quis dixerit, has particulas tam subtiles esse, ut per poros antliae pneumaticae expelli possint; hoc vero Tu non supponis. Optarem itaque mentem Tuam hac super re clarius percipere; hactenus enim intelligere non possum, quomodo aëri interspersa esse possit materia incomprimibilis, quae poros corporum non transeat, et tamen compressionem aëris non impediat. Rectissime notas, densitatem aëris duplici modo accipi posse, vel ex pondere ipsius et volumine, quae revera nihil aliud est, quam ipsa aëris gravitas specifica: et quidem haec aestimatio densitatis, qua supra usus, mihi vera et genuina videtur; vel ex compressione sive vi elastica, seu ex pondere, quod aër potest sustinere in vacuo, verbi gratia, ex altitudine mercurii; haec aestimatio non nisi impropria est, quia elasticitas non est de essentia compressionis, sicuti ex. gr. farina in modio ad dimidium fere comprimitur spatium sine renisu. Interim spero me, suo tempore, experimenta facturum ad indagandum, quantum incrementa gravitatis specificae abludant a proportione incrementorum vis elasticae.

Intelligo jam quomodo accipiendum, quando dixisti, a ë r e m r a r e f a c t u m v i d e r i a c c i p e r e v i m s e d i l a t a n d i m a j o r e m, q u a m p r o p o r t i o n e r a r i t a t i s: nimirum pondus, quod aër rarior, certo caloris gradu calefactus, sustentare potest, majorem

habere rationem ad pondus, quod idem aër non calefactus sustentat, quam habet pondus, quod aër densior eodem caloris gradu calefactus sustentare valet, ad pondus, quod sustentat non calefactus. Ejus quidem rei experientia mihi nondum constat. Experimentum, quod in eum finem proponis, ope tuborum duorum factu facile videtur: potest tamen, ut puto, adhuc facilius institui per duo barometra communia, quae in superiori parte ampulla grandiuscula instructa essent. Ea ad usum ita pararentur: implerentur primo more solito mercurio, sed ita tamen, ut pauxillum aëris in utroque remaneret, et quidem in data ratione ex. gr. duplo plus in uno, quam in altero; id quod facile agnosci potest, si tubi sunt aequalis crassitiei; postea, imposito digito orificio, inverterentur et mercurio stagnanti in vasculo immergerentur; digito subducto descenderet et mercurius paulo infra solitam altitudinem ob illud exiguum aëris, quod in tubis relictum est; qui vero aër mirum in modum rarefiet, utpote qui occupabit totum ampullae spatium et bonam tubi partem: nihilominus tamen si duo isti tubi, una cum ampullis suis, per totum sibi mutuo sint similes et aequales, erit aër in uno adhuc duplo rarior, quam in altero, sine sensibili discrimine. Jam ad experimentum faciendum, illa duo barometra ex eodem loco frigido, in quo sunt, subito transferrentur in eundem locum calidum (ex. gr. ut effectus perceptibilior fieret, in sudatorium valde calefactum) manifestum est, ob aërem in ampullis inclusum et incalescentem, mercurium fore descensurum, et quidem in eo magis, in quo aër minus est rarus. Id igitur tantum observandum esset, an in illo etiam duplo plus descensurus esset; nam si minus quam duplo plus descenderet, tunc conjectura Boylii vera foret. Etenim aër rarior a calore tunc accepisset vim se dilatandi majorem, quam proportione raritatis. Nota, quod in fabrica horum barometrorum in id incumbendum esset, ut mercurius probe solliciteque purgetur ab aëris bullulis in interstitiis mercurii latentibus, ne aër ex mercurio ascendens et aëri, qui dedita opera in tubis relictus est, sese adjungens, rationem relicti aëris in utroque tubo turbaret, et sic experimentum suspectum redderet.

Caeterum probe notas, in barometro ordinario calorem parum nocere, ob aëris (scilicet ejus, qui tractu temporis ex mercurio exhalat superioremque tubi partem occupat) magnam raritatem. Imo nihil omnino noceret, si perfecte adeo purgatus esset mercurius, ut ex eo nihil aëris ascendere posset. Sed id inquirendum

esset, annon pressio aëris externi per calorem mutari posset, ita ut ascensus vel descensus mercurii non semper esset effectus mutati ponderis aëris atmosphaerae, sed etiam interdum solius mutati caloris, quo respectu non barometrum, sed thermometrum foret. Quamvis ea de re nullum experimentum habeam, videtur tamen calor solus pressionem aëris atmosphaerici augere non posse; ut enim calor elaterium aëris augeat, oportet aërem inclusum esse et coërcitum; aër vero atmosphaericus, superveniente calore, libere rarefieri, et sursum versus extendi potest; unde cum nullus sit renisus et interim idem pondus atmosphaerae conservetur, sequitur subjectum mercurium eadem semper vi premi, quantuscunque calor ingruat.

Si aër metaphysice fingeretur elasticus, id est, si ad infinite exiguum spatium condensari posset, tunc utique esset, quod dicis, densitates esse viribus proportionales. Id non nego: sed fingi non debet quod non est, ut exinde aliquid probes absolute: aër enim cum annihilari nequeat, neque adeo in infinitum comprimi, habebit vires in majore proportione, quam densitates. Vale etc.

Groningae d. 26 Septembr. 1699.

CVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Tibi nomen Magnifici Rectoris dignitasque sit collata (de quo honore gratulor ex animo) non poteris tam crebro vacare literis; scilicet suum quaeque res tempus habet.

Etiam Spinosa vult, Deum non coacte, sed sponte agere. At in eo peccat inter alia, quod Deo adimit electionem, quasi nihil aliud possibile fuerit, quam quod fecit. Videris nunc non dissentire a distinctione Theologorum inter diversos necessitatis modos.

Quod aërem attinet, poterimus discriminis gratia condensationem aestimare ex pondere, quod est in volumine, compressionem vero (nisi meliorem vocem suppeditare potes) ex vi elastica. Hinc si particulae incomprimibiles per aërem sint disseminatae, compressio nihil ad illas pertinebit, et nulla in hac re est difficultas; concipiendae sunt dispersae per modum natantium insularum,

et initio non impedient aëris compressionem, sed impedient, ut sit condensationi proportionalis, etiamsi talis futura poneretur, si aër esset sincerus Si vero tanta fieret compressio, ut tandem particulae incomprimibiles omnes se quam arctissime tangerent, tunc etiam compressio ulterior cessaret. Interim revera nihil est prorsus imprimibile, sed tale intelligitur comparative, sufficitque ad divortium condensationis vel compressionis, partes esse comprimibiles inaequaliter. Sincerus aër posset habere condensationes compressionibus proportionales, scilicet ad sensum et aliquousque. Revera enim talia in Natura nunquam procedunt, ut in pura Mathesi, et perinde est ac cum in descensu gravium ponimus velocitatem aequaliter crescere, nempe ad sensum et aliquousque; alioqui nec id rigorose verum est, et quidem si satis longa essent descensuum spatia, etiam sensu notari posset, quantum regula illa fallat. Absolute utique fieri non potest, ut corpus sit pure seu metaphysice elasticum, et ut ita dicam, *πρῶτον ἐλαστικόν*, quia elastica vis non est aliquid primitivum et mathematicum, etsi pro tali utrumque assumatur, ut locus sit aestimationi; et perinde est condensationes ponere compressionibus proportionales, ac ponere extensiones viribus tendentibus seu elastri proportionales, quod solemus facere, assumentes aliquid certum et rotundum pro incerto. Caeterum, quod ais, methaphysice elasticum debere posse comprimi in nihilum seu spatium infinite parvum, id non obesset, quia ad id etiam opus est et vi infinita. Interim revera omnis compressio est subtilioris materiae expressio; unde fieri utique nequit, ut aliquid sit pure elasticum et ut pro aucta vi augeri semper compressio possit.

Perutile erit experimenta aliquando institui, tum de divortio condensationis et compressionis, tum de effectu caloris et frigoris, proportione densitatis aut compressionis in aëre se exercente. Experimenta mallem in aëre condensato, quam in rarefacto, quia possent esse sensibiliora.

Newtono credo displicuisse in Fatii scripto, primum quod videtur id agere Fatius, ut eum nobiscum committat; deinde quod solutionem ipsius (falso quidem) contendit perplexiorem sua; tertio, quod nescio quid sibi vindicat in Theoria gravitatis Newtoniana promota: quibus suspicor accedere alia graviora nobis adhuc ignota. Interim videtur Fatius exageratis illis (quanquam pro magna parte non immeritis) laudibus adulari voluisse Newtono, ut

hic illius jactationes (an plagia?) facilius ferret. Meas ad Dnum. Volderum novissimas Tibi placuisse libenter intelligo. Hinc jam experimentum de ejus vel judicio vel potius candore capiemus, de quibus non parvam hactenus opinionem habui.

Accepi tandem Tomum tertium Operum Wallisii, missu Auctoris; in eo recuduntur Musici veteres ab ipso jam editi, et Arenarius Archimedis cum Comm. Eutocii, et fragmentum libri secundi collectionis Pappi hactenus ineditum, ubi de calculo numerico veterum. Adjectae sunt Epistolae quaedam Mathematicae, ex quibus maximam partem constituunt meae olim ad Oldenburgium scriptae, et nuper (occasione recensionis harum) ad ipsum Wallisium. Quaesivit Cl. Wallisius, an aliquid vellem mutatum, sed cum nec autographa invenirem apud me, nec inde ex Anglia ad me apographa accersere tanti putarem, rem totam ipsius judicio commisi, nec poenitet: satis enim apparebit inde, quid mihi, quid aliis debeam.

Wallisius misit mihi epistolam secretarii Societatis Regiae, ex qua patet, Fatium per subreptionem impetrasse approbationem libelli, nec in me tam inficete dicta probari. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{19}{29}$ Octobr. 1699.

CIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quod de Rectoris nominis honore mihi gratulari dignatus fueris, ago gratias. Etiam Spinosa, dicis, vult Deum non coacte, sed sponte agere? Quid tum? Certe in hoc non peccavit, adeoque nec ego, qui idem dixi. At in eo, dicis, peccavit inter alia, quod Deo adimit electionem, quasi nihil aliud possibile fuerit, quam quod fecit. Concedam in eo peccasse. Ego vero, qui id non statui, in eo etiam non peccavi. Dixi, et etiamnum dico, nihil aliud possibile esse (non fuisse) quam quod Deus fecit et faciet (non fecit tantum): praeterea Deo non ademi electionem jam factam, secundum quam omnia decrevit, sed ipsi adimo electionem adhuc faciendam, tanquam absurdum quid et perfectioni ejus repugnans; nihil enim amplius eligere potest, quod non ab aeterno

jam fuerit electum. Mallem igitur, ut ulteriori disceptatione abstineamus, quam ut pergas parallelismum instituere me inter et exosum Spinosam. Quod si enim Tuae literae in aliorum inciderent manus, perpende quaeso, qualem effectum facerent, apud illos praesertim, qui haereticorum classi me voluerunt adscribere.

Placet, quod discriminis gratia aëris condensationem aestimes ex pondere, quod est in volumine, compressionem vero ex vi elastica, quamvis condensatio et compressio idem fere significent, nempe condensare et comprimere est in minus spatium compellere, sive sint elastica, sive non sint elastica: quemadmodum farina, aliaque id genus etiam comprimuntur. Cum igitur, loco compressionis, significantiorem vocem expetas, putem ego eo modo commode adhiberi posse vocem coactionis; coactio enim supponit resistentiam, seu illa tantum coguntur, quae resistunt et renituntur, ut elastica faciunt. Verissimum est quod dicis, compressionem seu coactionem non pertinere ad particulas incomprimibiles per aërem disseminatas, sed eas seorsum considerando; nam si junctim sumamus, tota moles aërea consistit ex particulis incomprimibilibus. Aërem enim concipio, vel ut cumulum lanae, cujus filamenta utique constant ex particulis solidis, vel ut globulos, insularum instar natantes in materia subtili, per interstitia illorum intercurrente, et patentiorem viam affectante, in quo elasticitatem proprie consistere puto; vel etiam concipi potest aër ut compositum quid ex minutissimis vorticulis, majus spatium circa centra sua continuo affectantibus, eum in modum fere, quo Cartesius suos Vortices coelestes imaginatus est; vel aliis multis modis aëris natura effingi potest. Quocunque vero modo concipiatur compositus, tamen semper erit ex particulis solidis, eo sensu, quo Tu illas incomprimibiles vocas; nam et ego sentio Tecum nihil perfecte solidum vel prorsus incomprimibile esse. Quando dixi, metaphysice elasticum debere posse comprimi in nihilum, utique non negavi, ad id etiam opus esse vi infinita: sed hoc ipso ostendere volui, nihil posse esse metaphysice elasticum, quia nulla materia, etiamsi vi infinita adhibita, ad nihilum seu ad spatium infinite parvum redigi potest.

De Newtono et Fatio hactenus nihil amplius inaudivi. Videre valde optarem Epistolam illam Secretarii Societatis Regiae Anglicanae, ex qua patere dicis, Fatium per subreptionem impetrasse

approbationem libelli. Quid interim de Tua apologia factum est? Comparuitne in Actis Lips.?

Wallisii operum Tomum tertium nondum vidi. Rumor Auctorem jam ante annum mortuum dicebat, sed video revixisse. Forte aegre feret, quod ipsum nominaverim strenuum gloriae Anglicanae vindicem. Audiveram, jam ante Tuas acceptas, a cognato quodam Cassini ex Anglia veniente et hac transeunte, se Wallisium adiisse eumque adeo adhuc in vivis esse; tum autem schediasma meum jam fuerat Lipsiam missum et forte jam impressum, neque adeo in potestate mea verba illa delendi. Quamvis non sint injuria, possunt tamen Wallisium, non nihil biliosum, exacerbare. Modo me mitius tractet, quam omnium postremo Prestetum; id quod a senectutis ejus phlegmate, si quod habet, spero.

Ex adjectis Volderi literis videbis, Tuas postremas ad ipsum datas ipsi etiam non parum placuisse; movet interim etiamnum suas instantias; insistit praesertim demonstrationi a Te dandae pro activitate substantiae, ex qua mirum quantum inde elici posse sibi persuadet. Nec immerito; omnium difficultatum, quas objicit, momentosissima mihi videtur, quam petit ex ipso Tuo modo explicandi commercium animae et corporis, quas duas substantias in se mutuo nihil posse ipse statuis, quamvis interim earum mutationes ex suis utriusque propriis principiis simul fiant. Sic enim sequi putat Volderus etiam Entelechias (genere scilicet ab animalibus non differentes) nihil in materiam, neque materiam in Entelechias quicquam posse. Memini hanc eandem objectionem jam semel a Voldero Tibi factam fuisse; miror quod tum non responderis; mihi quidem nonnulla responsione digna videtur. Caeterum, si Tecum Volderus, ita et mecum, serram adhucdum reciprocat, hactenus eum nondum convincere potui, ut agnosceret aequipollentiam inter ascensus continuos et interruptos; plus enim virium requiri arbitratur ad hos, quam ad illos; spes tamen superest ad convictionem. Jubet me (scilicet ut putat in majori gratia apud Te existentem) a Te petere demonstrationem activitatis substantiarum sibi denegatam; addit (credo per jocum) cum ego in conclusione Tecum faciam, Te certe habere locum, quo mecum, qui mentem jam purgatam habeam, hanc demonstrationem communices; nequaquam enim se credere me hujus rei cognoscendae se minus avidum. Fateor quidem me hujus rei avidum esse; sed nollem Te urgere, si viderem id Tibi incommodum fore.

Nescio qui fiat, quod nihil literarum longo tempore ex Gallia acceperim. Habesne Tuum diploma receptionis in Academiam? meum saltem mihi nondum est missum. Quid haec cunctatio sibi velit, hariolari non possum. Commendo has adjunctas ad Fratrem meum. Vale etc.

Groningae 21 Octobr. 1699.

CX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ecce tandem responsum meum D. Voldero datum, quod prout Tibi satisfaciet, de successu apud ipsum augurabor. Spero nunc agniturum, quantum inter diversa genera praestantiam actionis aestimandi intersit. Quis alius scrupulus ei superesse possit, praevidere non queo; nec quicquam unquam puto a ratione alienius defendi posse, quam duas actiones, idem praestantes diversa promptitudine, aequales tamen esse inter se; cui rei non mentis tantum nostrae actiones, sed et experimenta omnia repugnant.

Miror quid Tibi velis, cum ais, me Tibi de nomine gratulatum. Ego Tibi gratulatus sum et de nomine et de re, id est, de dignitate. Spinosamne ego Tibi comparem? qui ideo suasi, ut quaedam vites, ne hominibus, ut apparet, Tibi infestis occasionem aliquando nocendi comparandique praebeas. Bono animo quae dicta noris, in contrarium non recte vertas. Etiam quae nunquam fient, possibilia dicimus, eo scilicet, quo futura necessaria esse negamus. De aëre condensato, rarefacto, calefacto aut frigore contracto experimenta tantum facienda supersunt.

Quoties aliquid dico metaphysice vel si mavis Mathematice Elasticum, abstrahitur animus ab eo, quod materia patitur, ut cum fingimus gravitatem in mathematico rigore, quem non capit. Interim talis aestimatio utiliter suo loco adhibetur, itaque eo modo metaphysice grave oriretur a nihilo, centro scilicit attrahente.

Quod Wallisium vocasti strenuum gloriae Anglicanae vindicem, ille laudi sibi, non injuriae ducet. Ego interdum nostris exprobro, quod parum strenui sint gloriae Germanicae vindices. Aemulatio nationum, etsi eo non debeat porrigi ut aliis maledica-

mus, huc tamen utiliter valebit, ut aequare alios vel superare contendamus; unde fructus pervenit ad omnes, laus ad merentes.

Difficultas de commercio animae et corporis mihi videtur in responsione ad Dn. Volderum dissoluta. Notatam jam antea a me in ejus literis non memini: si inest, imprudens praeterii, nam dissimulare mos non est meus.

Semper nobis cum Dno. Menkenio disputandum est, quoties nos tuemur et nostra. Ita nunc quoque accidit. Vix tandem obtinui, ut Tua in Fatium notata ederentur, sed temperata nonnihil, cum enim problema solidi minimum in liquido resistentis praeclare illustrent, profecto illis publicum fraudari non debebat. Sed olim Dni. Tschirnhausii in Craigium dicta sane acerba non recusarunt, Craigii responsionibus deinde silentio suppressis.

Dn. Volderus postulat demonstrationem activitatis substantiarum. Jam vides, quam difficile sit demonstrare res Mathematico-Physicas, quales mechanicae sunt, quid de Metaphysicis futurum putas? Demonstratio est ratiocinatio, cujus vis sit evidens, et a qua indubitatam Tibi adversariorum convictionem promittas; talem etiam cum omnia animo jam comprehensa habemus, exprimere verbis difficile est, quanto magis cum nondum ipsi satis ordinavimus cogitationes nostras? Itaque, qui non dat quod non habet, denegasse dicendum non est. Interea aliquod probationis rudimentum adjeci, potius ne defuisse ejus voluntati videar, quam quod satisfacere sperem.

Miror, qui putet ascensus continuos minus virium requirere, quam interruptos? An putat, non esse idem, quatuor libras descendere uno pede, et unam libram quatuor pedibus? cum utrobique quater contingat unam libram descendere uno pede, solo hoc discrimine, quod in uno casu successivus est descensus, in altero simultaneus. Sed successivus simultaneum efficere potest, et simultaneus successivum, neuterque ultra quicquam. Semper autem aequivalent, quae se producere mutuo possunt.

Adjicio copiam epistolae, quam Secretarius Regiae Societatis ad Dn. Wallisium scripsit egoque a manu Wallisii descripsi, quoniam videre postulabas. Non poterat quicquam dici humanius. Vale.

Dabam Hanoverae 12 Januarii 1700.

P. S. His scriptis ad manus meas pervenit liber Patris Hoste Jesuitae de Structura Navium, sed nondum absolutus, simulque

alter ejusdem de Evolutionibus Classium *). Atque hic quidem versatur in diligendis commodissimis ad scopam navium motibus, pro mutatione venti et circumstantiarum, ubi tanquam in re nondum mathematice tractata, operae pretium fecisse videtur; sed doctrinae de structura navium hactenus remota tantum principia exhibet, pro bona parte jam constituta, ubi nescio an omnia recte habeat. Agit Lib. I cap. 1. de resistentia medii; cap. 2. de navis facultate perferendi vim venti in vela, ne nimis scilicet ab iis inclinetur, ubi de Centro gravitatis; cap. 3. de resistentia navis contra inclinationem, quam illi dant fluctus; cap. 4. vacuum est, soloque titulo constat: De derivatione (de la derive) quam ait ex cap. 1. haberi; cap. 5. de gubernaculo et structura navis, ut gubernaculo suo melius obediat. Lib. II. cap. 1. de resistentia solidorum fere ad Galilaei formam. Cap. 3. de restistentia partium navis contra aquae comprimentis pondus. Lib. III. de figuris navium, ubi de sectionibus Conicis; nostras enim figuras ignoravit; interim passim loquitur de infinito parvis, et subinde utitur Calculo algebraico. Dignus esset liber examine ob argumenti pretium.

P. P. S. S. Ex Dno. Menkenio intellexi, Dn. fratrem Tuum editionem solutionis Tuae desiderare eorum, de quibus vobis concertatio fuit. Ego putaram interventu amicorum ex Academia Regia omnia fuisse composita.

Diploma Academiae nec accepi, nec expectavi, nam hactenus non memini tale aliquid factum. A multis annis sum in Societate Regia Anglicana, et nunquam tale Diploma vidi.

CXI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Misi Dn. Voldero epistolam Tuam, sed ad quam nondum accepi responsionem. Probe quidem et ut fere praevidebam ad ejus objectiones respondisti: an vero in omnibus sibi satisfactum fatebitur, dubito. Demonstrationis, ut vocas, tentamentum pro

*) Theorie de la Construction des vaisseaux par le P. Paul Hoste. Lyon 1697 fol. — L'art des Armées Navales ou Traité des Evolutions navales etc. Lyon 1697 fol.

activitate substantiae vereor ne nimis succinctum et imperfectum sit conquesturus, quandoquidem non sequi videatur: non datur influxus substantiae in substantiam, ergo omnis substantia per se est activa, nisi forsan conclusionem intelligas limitatam per partem praedicati, nempe subintelligendo: ergo omnis substantia quae est activa, per se est activa. Sed tunc recurreret vetus quaestio: an ideo omnis substantia sit activa. Difficultatem de commercio animae et corporis pro dissoluta habere poterit Volderus, modo velit agnoscere distinctionem, quam facis inter corpus et materiam. Sed quid, si dicat: si omnis entelechia agit in materiam, anima vero nostra in corpus nostrum non agit, quaenam ergo est materia illa, in quam anima nostra agat?

Rogo persuadeas Tibi, quod nihil sinistri in meute habuerim, cum Tibi pro gratulatione Tua gratias agerem. Si ea quoque possibilia dicis, quae nunquam fient, quocunque sensu velis, largior facile quaecunque hactenus ex eo deduxisti: at parum abesse puto quin sit contradictio in adjecto: possibilia quae nunquam fieri possunt, nam quae nunquam fient, illa etiam fieri non possunt.

Certe Wallisius a me strenuus gloriae Anglicanae vindex vocatus mihi succensere non poterit, si bile non abundat, sed cum blandissimo palpo facile irritetur (nam vestigia me terrent) vereor ne sinistre interpretetur, quod a me bono animo dictum est.

Mea in Fatum notata in Actis nondum vidi. Quod cum Dno. Menckenio disputandum fuerit, ut insereret, novum non est: nec miror quod suo Tschirnhausio, albae Gallinae filio, plus indulgeat quam mihi, etsi non probem, quod inseruerit ejus in Craigium acerbe dicta, suppressis tamen postea Craigii responsionibus. Excuset se Dn. Menckenius eo, quod Craigius sit peregrinus et sibi ignotus, at quo pacto excusare poterit artificiola, quibus contra me, quem pro amico habet, usus est ad declinandam primo publicationem inventi mei pro sectione arcuum parabolicorum, ut postea Tschirnhausii scriptum alteri meo schediasmati praetruderet? Certe non egit prout decuit.

Dno. Voldero cum Tuam ipsi epistolam mitterem, aliam novam exhibui demonstrationem pro asserenda aequipollentia ascensuum continuorum et interruptorum; spero tandem convictum iri. Epistolam Secretarii Societ. Angl. quae Anglice scripta est, non

satis intelligo, quocirca illam mihi verti curabo. Hic Tibi Varignonii literas ad me datas mitto, quod ibi quaedam sint Te spectantia; lectas, rogo, remitte. Ecce etiam nummum argenteum Tibi destinatum. Si diploma Academiae Paris. nondum accepisti, forsan propediem accipies, ceu Tibi patebit ex Varignonianis.

Librum Patris Hôte jam ante sesquiannum vidi, cum Hagae essem, sed eum non nisi perfunctorie inspexeram, prout mihi tum videbatur, materiam satis elegantem non admodum eleganter tractat nec pro dignitate sua, forsan quod sit extra ejus sphaeram activitatis.

Dicis, ex Dn. Menckenio Te intellexisse, fratrem meum editionem solutionis meae desiderare suorum problematum. Miror, quod id non legeris in mense Septembr. Actorum, ubi videbis, quod invidiae suae virus contra me de novo eructat, dum omni conatu meam quadraturam segmentorum cycloidalium extenuare voluit, tanquam rem facilem et cuivis obviam, quasi nimirum ob facilitatem amitteret suam elegantiam et utilitatem. Quod autem absolute adeo desideret solutiones meas suorum problematum, absque ut verbulo mentionem faciat eorum omnium, quae in Ephemeridibus Gallicis peracta sunt, profecto indicium est diabolicae malignitatis. Hac enim arte Lectori, qui illas Ephemerides non legit, persuadere conatur, me hactenus nihil omnino pro solutione dedisse adeoque me suis problematis solvendis imparem fuisse. Vides, quid a tanta nequitia expectandum sit pro litis compositione. Miror, si livor edax illum non brevi consumserit. Vale etc.

Groningae d. 10 Febr. 1700.

CXII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Epistolam Domini Varignonii remitto cum multa actione gratiarum, et obnixe peto, ut data occasione significes insigni viro, quantum me perculerit nuntius de morbo ejus periculoso, et quantum nobis gaudeam, ipsique gratuler redditam sanitatem, quod bonum et ipsi et nobis et solidioribus literis diuturnum precor. Gratias etiam ingentes ago, quod caeteris benevolentiae erga me suae significationibus addidit documentum, quod spectari oculis

corporeis manuque tangi potest, nummum scilicet perelegantem in fundationem Academiae Regiae, quae omnia velim demereri posse.

Si cum omni Schola pro substantia habeamus, quod agere aut pati potest, nihil autem patiatur, quin et agat, consequens est omnem substantiam agere posse. Quod si jam constet omnem substantiam, quae potest agere, esse per se activam, consequens est omnem substantiam talem esse. Quod si quis substantiam introducat, quae nec agere nec pati posset, ab eo exspectanda nova nominis definitio est, ac tum videbimus, quid ex ea consequatur.

Non possunt dici possibilia, quae nunquam fieri possunt (quod utique contradictio esset) sed tamen contingit, ut possibilia non fiant. Nam quod ais, quae nunquam fient, ea etiam fieri non posse, id vero non concedo; nam a posse ad esse non valet consequentia.

De Wallisio securus esse potes; mihi certe nunc visus est humanissimus, nec dubito quin Te magni faciat.

Plane agnosco, in negotio sectionis curvae parabolicae aliter Tecum agendum fuisse; et nihil ego magis probo, quam ut suum cuique decus constet. Libenter videre velim, quam Domino Voldero misisti demonstrationem ascensuum continuorum et interruptorum.

Volui ut Epistolam Societatis Regiae videres, qualis scripta est, ne de versione dubitari possit.

Cum sis incola Belgii foederati, cujus opes potissimae in re nautica sitae sunt, profecto Te dignum et iis, apud quos agis, pergratum fore putem, si ad rei navalis scientiam mathematicam subinde cogitationes conferas. Porro Hostius hactenus mihi potissimum ea in parte operae pretium fecisse videtur, quae agit de Evolutionibus Classium. Argumentum non est difficile, sed magnae tamen utilitatis: nec dubito, quin si animum adjiceres, multa sis detecturus Autori illi non perspecta. Vellem autem tractari stylo Geometrarum scientifico, hoc est, vocabulis non plebejis seu nauticis, ut ab illo factum, quae pro nationibus variant, sed universalibus, hoc est Geometricis, adjectis tamen verbis phrasibusque maritimis, non Gallicis tantum, sed et Batavis, et si liceret, etiam Anglicis. Et cum caeterae partes scientiae nauticae sint Architectorum et Praefectorum minorum: haec quam dixi nobilior et Ducum propria est.

Mihi videtur ea, de quibus cum Fratre Tuo lis est, non esse tanti, ut simultatem inter vos alere debeant. Itaque plane Dni. Varignonii consilium probo, optemque amicitiam inter nos redintegrari, certe supprimi quicquid utrinque offendere possit. Vale etc.

Dabam Hanoverae 8 Martii 1700.

CXIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Mitto epistolam Domini Volderi, ante octiduum acceptam: videtur de tenacitate aliquid remittere. Laudo Viri ingenuitatem, non vincere, sed vinci cupientis. Si quid Tibi superest pro evincenda substantiae activitatae, quod demonstrationis instar sit, quaeso ne celes ipsum tam enixe efflagitantem. In Tuis ad me datis addis quidem: Si cum omni schola pro substantia habeamus quod agere aut pati potest, nihil autem patiatur, quin et agat, consequens esse omnem substantiam agere posse. Consequentiam verissimam esse, inficiari non poterit; sed vereor ne gratis a Te assumi dicat, nihil pati, quin et agat, cum forsan sibi persuadeat, cum multis aliis, dari substantias mere passivas. Caeterum demonstratio mea ascensuum continuorum et interruptorum Volderum tandem plenarie convicit de vera activitate virium, ut ex ejus literis colliges; eleganter enim ipse ex ea demonstravit falsitatem hypothesis communis, quae quantitate motus nititur. Olim fere eandem demonstrationem apud Te feceram, desumtam nimirum ex incursu obliquo corporis in corpus; quam autem Volderus postea non nisi pro corporibus elasticis admittebat, sed pro perfecte duris nondum sufficere contendens. Haec vero, ut nunc est, procedit in perfecte duris (si talia vel esse vel concipi possent) non minus quam in elasticis, adeo ut jam valeat contra quoscunque adversarios. Est enim pura et abstracta. Eam, prout Voldero communicavi, iisdem verbis infra transcribam*), quoniam id petis, quamvis alias ex Volderi literis satis intelligere poteris. Quemadmodum itaque absurdum sequitur, si statuantur duo corpora aequalia et non elastica, alterum motum, alterum

*) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

quiescens, in se impingentia, ambo post ictum versus easdem partes corporis moti progressura, dimidia velocitate ejus, quod habebat ante ictum corpus motum; ostendit enim Volderus ex meo ratiocinio, corpus illud posse dare quatuor corporibus sibi aequalibus quartam partem celeritatis (id quod jam faceret quantitatem motus) et tamen dimidiam suam celeritatem retinere, id quod ergo pristinam quantitatem motus augeret, et sic aestimatio virium exinde petita nequidem sibi ipsi constaret, nedum veritati consentiat: ita e contrario si statuantur (ut nos facimus) duo corpora non elastica impingentia, unum motum, alterum quiescens, ambo post ictum progressura non dimidia velocitate, sed velocitate, quae sit ad primum, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad 1, quo nimirum, secundum nos, eadem quantitas virium servetur; tunc ex meo ratiocinio sequetur, corpus posse movere septem corpora sibi aequalia, illisque singulis dare celeritatem, quae se habeat ad primam celeritatem, ut $\sqrt{\frac{1}{8}}$ ad 2, et praeterea, post septem impulsiones et ipsum retinere eandem illam celeritatem, quam aliis corporibus dedit, id quod pulchre consentit cum vera aestimatione virium; id enim evenire debuit; et sic Regula nostra generalis est et mirifice sibi constat in omnibus casibus specialibus.

Redis ad veterem quaestionem, quando dicis, contingere ut possibilia non fiant: ad id vero jam respondi, id nimirum verum non esse a parte Dei; nam ejus respectu nulla sunt contingentia, seu talia quae extra decretorum ordinem fiant; nec aliter admitto vulgatissimum illud, a posse ad esse non valet consequentia, quamvis ego potius argumentatus fuerim a non esse ad non posse. Ut verbo dicam quod sentio, Deus omnia, quae decrevit ab aeterno, liberrime elegit, sed post electionem factam omnia illa sunt necessaria.

Ad rem nauticam excolendam fateor hic in Belgio egregiam esse occasionem, sed magis adhuc in Hollandia, quam in hac Provincia. Verum ad praestandum aliquid in hoc argumento, quod Eruditis placere possit, requireretur homo, qui non modo fundamentis theoreticis, sed ipsa etiam praxi variisque mechanicis artibus, Architectura praesertim, esset instructissimus, qualis ego non sum: quanquam spes superest, modo tempus et subsidia non defuerint, in talibus me exercendi, quod ubi contigerit, de consilio Tuo cogitabo serio.

Vidi tandem in Actis excerpta literarum mearum ad Te da-

tarum *). Sperabam nudam tantum solutionem meam excerptam fore, sed attonitus reliquis circumstantiis et in Fatium acerbe dictis comitatam reperi, quas Tibi suggesseram Tuae responsioni (nunc vero, quod valdopere miror, omnino suppressae) inserendas: ita sane jam solus expositus irae Fatianae, quam a Te scite removisti, nisi (quod spero et rogo) Tuam responsionem, quam mecum communicabas, pariter edideris.

Ex literis Domini Varignonii, heri acceptis, intelligo Tuam epistolam ad Academiam missam, perlectam fuisse omnium cum applausu et admiratione ob styli elegantiam et stupendam linguae Gallicae facilitatem. Dicit quoque, Te in illa exhortatum esse Academiam ad construendum novas Ephemerides, Argoli jam cessantibus: quem in finem Te ad Academiam misisse alicujus Astronomi (Lipsiensis, ut credit) suscepti operis ideam, consilium petentis: Te porro de Calendario Gregoriano monuisse quasdam difficultates, quibus sublatis, nos paratos esse ad amplectendum illud. Haec omnia mihi fusius a Te exponi optarem, praesertim quaenam sint illae difficultates, et quo pacto accuratissimum Calendarium obtineri posse putes, cum anni longitudine, existente haud dubie incommensurabili, accuratius et facilius vix quicquam sperari possit, quam Gregorii quatuor seculorum cyclus. Sub finem superioris anni mihi in manus incidit Samuelis Reyheri, in Academia Christian-Albertina Math. P. P., Novum horologium, ubi proponit formam novi Calendarii ope Cycli compositi ex aliquot Cyclis Zarlinianis et Kirchianis; diem autem naturalem dividit in varias partes, quas vocat horas, scilicet breves, si in **29**; breviores, si in **33**; brevissimas, si in **37**; longas, si ut vulgo in **24**; longissimas, si in **16** dividatur partes; contenditque anni longitudinem esse, accuratissime loquendo, **365** dierum et **7** horarum brevium; quo posito, ostendit post **17** cyclos Zarlinianos, quos ordinarios vocat, et tres Kirchianos, ipsi correctorios dictos (constat autem cyclus Zarlinianus **29** annis, in quibus sunt septem intercalares; Kirchianus vero constat **33** annis, in quibus sunt **8** intercalares) tempora exactissime restitui. Equidem scire percuperem, quid Tu de his sentias: me quod attinet, quod Auctor plenariam *ἀκρίβειαν* jactet, res mihi valde est suspecta; cui proin haud multo majorem fidem adjicio, quam ei, qui communem men-

*) Bernoulli's Schreiben an Leibniz 9. Aug. 1699.

suram inter diagonalem quadrati et ejus latus se reperisse mihi diceret.

Initio putabam mihi sat spatii superfuturum, quod caperet excerpta literarum mearum ad Volderum datarum; at cum haecce praeter spem excreverint, ecce separatam adjungo schedam. Vale etc.

Groningae 6 Aprilis 1700.

P. S. Hac ipsa hora ex Hollandia ad me venit tomus tertius operum Wallisii; evolvens fasciculum Epistolarum, quarum Tuae maximam fere partem componunt, Tui quidem in suis honorificam et crebram mentionem factam reperio: sed caeterum more suo, Anglorum suorum inventa mirum quantum extollit, exterorum vero vel reticet vel extenuat.

Beilage.

Excerpta ex literis Bernoul. ad Cl. Volderum.

Demonstrabo vires, per quas corpus ascendit ad certam altitudinem uno saltu, esse aequales viribus ejusdem corporis 4 impulsionibus iterum descendentis omnemque vim suam, quam singulis impulsionibus acquisivit, impendentis in tensionem elastri, id est, aequales esse viribus 4 elastrorum hoc modo tensorum. Ponamus corpus, cum ascendere incipit, habere duos gradus velocitatis, quandoquidem itaque velocitates sunt in subduplicata ratione altitudinum, de quo mecum convenis, et cum ex hypothesi elastra illa quatuor quarta parte altitudinis totius inter se disteut, palam est corpus ad singula elastra appellere uno celeritatis gradu, eaque tendere hoc toto celeritatis gradu consumto. Id igitur solum jam probandum incumbit mihi, ut ostendam (nulla nunc attentione facta ad gravitatem) corpus illud (quod ut perfecte durum concipio, ne in elasticis tantum id valere putes) 2 gradibus velocitatis motum tendere posse praecise quatuor talia elastra, ad quae singula seorsum tendenda unus velocitatis gradus in corpore illo requiritur. Nam finge corpus C (fig. 145) incurrere oblique in elastrum L velocitate CL ut 2, angulo inclinationis CLP existente 30 grad. cujus nempe sinus CP est semissis radii CL. Jam quid fiet post incursum corporis C in elastrum L? sane quoniam motus per CL componitur ex duobus collateralibus per CP et PL, et cum CP, secundum quam corpus directe impingit in elastrum L,

exprimat dimidiam celeritatem corporis per CL, consumetur hic motus per CP tenso elastro (perinde enim esset ac si corpus C celeritate CP perpendiculariter incurreret in elastrum, quod per hypothesin eam destruere potest) remanente corporis celeritate et directione PL. Producta igitur PL in M, ita ut LM sit $= PL = \sqrt{3}$ (ponitur enim $CL = 2$) et applicato in M alio simili elastro faciente cum LM angulum LMQ, cujus sinus LQ sit $= CP = 1$, per eandem rationem manifestum est, corpus C post tensionem elastri L tendere elastrum M amisso motu per LQ, et servato motu per QM. Prolongata itaque QM ad N, ut fiat $MN = QM = \sqrt{2}$, ibique substituto elastro constituente cum MN angulum MNR semirectum, quo scilicet MR iterum sit $= CP = 1$, patet similiter motum per MR totum impendi in tensionem elastri N, corpore interim moveri pergente directione et celeritate $RN = 1$; denique si hac celeritate residua impingat perpendiculariter in elastrum O, huic flectendo totam suam vim reliquam dabit. Hisce ita praemissis argumentor hunc in modum: Potentia corporis C tanta est, ut per se solum nullo auxilio nec gravitatis nec alterius rei adjutum tendere possit praecise quatuor elastra talia, ad quae singula seorsum tendenda requiritur, ut corpus decidat ex quarta parte altitudinis ejus, ad quam corpus sua celeritate initiali assurgere potest; atqui eadem illa potentia tanta est, ut corpus assurgat uno saltu ad totam altitudinem. Ergo ad ascendendum uno saltu tanta potentia seu tantae vires impenduntur, quantae in tensionem 4 elastrorum in descensu corporis. Q. E. D.

CXIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum in procinctu sim ad iter, breviter tantum et in antecessum respondeo, ut Tibi scrupulum eximam, quasi exponere Te incommodo voluerim egerimque in re Tua aliter, quam Tibi placere judicarim. Ego vero conscientiam meam testari possum, indicabuntque literae Tuae meaeque, ita rem me accepisse, ac si edi velis, quae Dno. Menkenio edenda submisi. Et id ipsum inter nos placuerat, edi posse narrationem amici, modo nomen ejus supprimeretur. Nec vero quicquam est in Epistola Tua injurium

in hominem aut mordacius, nisi quatenus narratio veri nobis expressa mordere potest.

Caeterum cur mea responsio dilata fuerit, causa fuit, quod videbaris non magnopere curare, quae de nova designatione attuleram; at Dominus Menkeuius simplicem Apologiam, cui nihil profecturum aspergeretur, minus probabat. Ea res mihi distracto differendi causa fuerat. Nunc vero ne Tibi videar me subducere velle, Apologiam Dno. Menkenio mittere non distuli; quae autem ad Moivraei Theorema dicere volebam, ita reformavi, ut tantum breviter exhiberem Theorema infinities generalius, cujus casus tantum specialis est Moivraeanum.

Quod ad Calendarii Reformationem attinet, puto non esse necessarium, ut Cyclos novos moliamur aut a Gregoriano computo prorsus discedamus, cum ea quae placuit Ratisbonae collectis Evangelicorum imperii statuum legatis raro a Gregoriana ratione sit abitura, sed huc tantum tendebam in literis ad Academiam Regiam meis: si Consiliis Dni. Cassini aliorumque insignium Academiae Astronomorum obtineatur, ut Pontifex Romanus in computo jam recepto quaedam explicet in melius, Bulla quadam declaratoria fortasse edenda, eaque de re mature cum nostris communicetur, posse fortasse plenum utriusque partis consensum obtineri. Et sane (ut hoc Tibi ejusdem Academiae mecum membro in aurem dicam) jam Dnus. Cassinus consultationem quandam huc facientem Romam misit. Itaque rogo, ut (dissimulata tamen hac notitia) Dno. Varignonio scribas, intellexisse Te a me, posse ope Academiae plurimum conferri ad perficiendam utriusque Calendarii harmoniam, si suasu ejus ab Aula Romana Bulla declaratoria obtineri possit, imprimis si de re prius cum Mathematicis quibusdam protestantibus per Mathematicos Academiae communicetur. Rogabisque simul Dnum. Varignonium meo nomine, ut caveatur ne id consilium emanet intempestive, et ab eo quaeres, nomine Tuo, quidnam putet ea in re commode fieri posse, aut quanam in re Gregorianos computos temperari posse arbitretur. Quod ab eo intelliges, mihi ut mature significes peto.

Ordinum Imperii Evangelicorum nomine scriptum est Ratisbona etiam ad Foederati Belgii Ordines Generales, petitumque, ut velint communia consilia sequi. Nempe Ratisbonae placuit, ut omnia ad veritatem Astronomicam et Nicaenos Canones constituantur: ita raro a Gregorianis dissentietur. Suspicor Te a Tuis Gronin-

gensibus et Volderum nostrum ab Hollandis suis consultum iri; quid respondendum vos videritis, gratum tamen erit mihi mature intelligere sententiam vestram. Quae Tibi scribo de hoc negotio, omnia cum Domino Voldero communicare potes, excepto quod de consultatione jam a Dno. Cassino Romam missa dixi, sed admonendo, ut sibi servet. Nolim enim consilium ulterioris conciliationis (quod multis morosioribus apud nos displicere posset) re nondum matura vulgari. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 25 Aprilis 1700.

P. S. Dominum a Volder interim a me saluta; nunc enim rescribere non licet, interim gratulor nobis de consensu.

CXV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum multa scribendi occasio haud se offerat, responsionem ad postremas Tuas aliquantulum differendam censui. A Voldero nostro accepi literas, sed de disputatione vestra nihil agentes. Tuum haud dubie expectat responsum, quod ad ultimas suas ipsi debes. Gratum fuit intelligere, quod Apologiam Tuam contra Fatium ad Acta miseris; mirabar tantum non jamdiu comparuisse. Sed caeterum alienas cogitationes non habui, quanquam non diffitear me nescio quid timuisse, si Te silente, quem tamen res primario spectat, ego mansissem solus qui res alienas curare visus fuissem. Quod autem dicis, me Tibi visum fuisse non magnopere curare, quae de nova designatione attuleras, hariolari non possum, unde hanc suspicionem hauseris, cum aequiis multo sentire solitus sim de omnibus quae a Te proficiscuntur, idque Tibi ignotum esse haud possit. Ut dicam quod res est, scriptum quod mihi transmiseras, legeram quidem, sed cum pervenissem ad Mathematica, quae profundam attentionem requirere videbantur, id ipsum fecit ut tum temporis non nisi perfunctorie examinarem, spe fretus ea, meliori cum otio, postquam impressa essent, me relecturum. Vides, quo jure me ea sprevisse putes.

Neque ego puto necessarium esse, ut ad Calendarii reformationem Cyclos novos moliamur. Haud enim facile aliquid excogitari poterit, quod ad rei veritatem proprius accedat, quam computus

Gregorianus, quodque commodius sit. Sed ideo etiam vellem, ut mihi distinctius exponeres difficultates, quibus eum premi dicis; an eae spectent Computum Astronomicum, an vero Ecclesiasticum, an utrumque. Si primum vel tertium, sane et ego maxime censerem, de emendatione ejus serio cogitandum esse; si vero secundum, credo rem non tanti esse, saltem nobis Protestantibus, ut multum solliciti simus, ut omnia ad mentem Nicaeni Concilii constituantur. Quid enim ad nos, qui in nonnullis locis Festa nulla celebramus, utrum mobilia rite sequantur Nicaenos Canones, an autem ab iis aberrent. An Volderus ab Hollandis hac in re consultus fuerit, mihi id nondum scripsit. Interim diu est, quod Hollandi utantur Calendario Gregoriano. Nostrae Provinciae Ordines me nondum consuluerunt, expectaturi quid prius responderint vicini Frisii, quidque fecerint Angli. Caeterum, meo judicio, consultius esset, si quid in Calendario Gregoriano emendandum, ut id fieret auctoritate Caesaris potius, quam Pontificis Romani, ne alioquin hujusmodi mutatio Religioni praejudicare plebejis videatur.

Scripsi ad Varignonium prout desiderasti; statim ubi responsum accepero, Tecum communicare non intermittam. Jam diu est, quod nihil ex Gallia literarum ad me pervenerit. Marchio Hospitalius me negligit omniuo; per sesquiannum expecto ab illo responsionem. Posses, si velles, hujus silentii rationem ex ipso quaerere, quam rogo ut mihi rescribas. Quaecunque illa sit, parum generositatem sapit; saltem multum abest quin imitetur Alexandrum M. suum praeceptorem Aristotelem animo gratiori diligentem.

Cuperem scire, per quem Academia Regia Tibi miserit Tuum diploma. Dnus. Varignonius mihi scripserat, Dnum. Hospitalium id negotii in se suscepisse, sed tum temporis cum meum mihi mitteretur, ille non erat Parisiis. Vale etc.

Groningae 8 Junii 1700.

Quomodo quaeso Frater meus Tecum agit? Vestrumne commercium etiamnum durat? Audivi nuper ab Academia sua eum pro hoc anno Rectorem esse constitutum.

CXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ecce me tandem ad amicos pristinos et literaria officia reversum. Impedimenta, quibus districtus fueram, ample exposui in literis ad Dnum. Volderum meis, quas hic apertas, ut ante, accipis, rogoque ut omnia Tibi dicta putes et excusationem etiam apud Te valere patiaris, qua vix alia potest esse justior. Quin potius spero causam morae vobis gratam fore, cum inde fructus non contemnendi expectari possint. Scientiarum enim Societatem erectam esse a magno Principe, per quam praeclari Viri juvari animarique possint, res non parva est. Itaque, rogo, Tu quoque cogitationes conferas, ut pulchra occasione animoque Principis egregio recte utamur. Ideo suadeo etiam, ut Te quoque in Societatem recipi libenter velle ostendas. Quodsi in literis ad me Tuis expresseris verbis honorificis, quae ego Berolinensibus communicare possim, et in quibus nulla fit mentio suggestionis meae, faxo ut Tibi mittantur literae receptionis. Vides autem ex illis, quae ad Volderum scripsi, nullum in ea re negotium Te/Tibi accessere, cum quater in anno scribere, et ex penu divite Tua, aut etiam communicationibus amicorum aliquid suggerere Tibi sit in expedito. Conabor rem eo deducere, ut Miscellanea quaedam subinde edantur, exemplo Naturae Curiosorum, et quidem fortasse trimestria; ita enim nos in publicandis nostris non semper ab alieno arbitrio pendebimus.

Tecum sentio, si qua Gregoriani Calendarii emendatio impetrari possit, eam Caesaris autoritate procurandam esse, neque aliam in Imperio agnoscunt Protestantes. Sed quia Romana pars rem semper ad Pontificem rejicit, nihil commune, nisi aliquo Pontificis apud suos interventu, confici potest. Computo Gregoriano circa Festa immobilia et intercalationes stari utique licebit. Sed in Paschalis constitutione atque in dependentibus Festis mobilibus, interdum abit a Regulis magnae synodi Nicaenae, quas tamen tueri placuit Ecclesiae, ipsique Pontifices hoc a se quaesitum sunt professi. Eademque mens est Protestantibus plerisque Festa mobilia retinentibus per Germaniam, Angliam, Septentrionemque, cui etiam inhaesit decretum Corporis Evangilici Ratisbonense.

Nosse velim an aliquid ex Gallia circa interrogata mea intellexeris.

Diu a Dno. Marchione Hospitalio, sed multo diutius a Domino Fratre Tuo nihil ad me est datum. Dnum. Marchionem lentiusculum in scribendo dudum sum expertus. Literas vel diploma receptionis in Academiam non ille ad me misit, sed Secretarius Societatis, Dominus Fontenellius, cujus literis Dominus Abbas Bignonius suas adjecit.

Non male facies, quod Te facturum polliceris, si paulatim ad rem nauticam discutiendam animum adjicias. Et video eam partem, quam tractavit Hostius Jesuita Libro de Evolutionibus navalibus, esse a rebus mechanicis et architectonicis fere independentem, pauculis tantum assumtis positionibus circa venti actionem in vela, et id quod vocant derivationem, experientia nautarum comprobatis.

Etiam a parte Dei fit, ut possibilia (ipsi) non fiant, si scilicet ea non velit. Et hoc sensu ante omnia decreta res sunt contingentis, adeoque, ut rectissime ais, Deus liberrime elegit. Decreta autem porro, divinaque vel praescientia, vel praeordinatio contingentiam non tollunt, eo sensu quo a Philosophis accipi solet, nempe ut opponatur necessitati absolutae, non hypotheticae. Quod igitur ais, post decreta Divina omnia esse necessaria, id nostrae contingentiae non repugnat; hoc ipsum enim est, quod hypotheticam necessitatem appellant. Itaque nullus hoc modo erit in re dissensus, unde praestat nec verbis pugnari.

Haec addidi, ne quid in literis Tuis penultimis intactum praeterirem. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Guelfebyti 6 Septembris 1700.

CXVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Novissimas Tuas, diuturni silentii causam exponentes, avide et accepi et perlegi; inclusas ad Dnum. Volderum postridie dimisi. Jam antea quidem intellexeram aliquid de nova Scientarum Societate erigenda, qua de causa Te iter Berolinum suscepisse rumor ferebat: nunc vero rem totam ex Tuis plenius intelligo. Gratulor Tibi honorem, quod Te potentissimus Elector laudabili huic negotio perficiendo praeesse voluerit; sed et inprimis gratulor Rei-

publicae literariae et bonisque artibus et scientiis omnibus, quae non possunt non acquirere incrementa et perfectiones optatas, sub auspiciis tanti Principis Musas jam pridem sibi soli, ut videtur, devotas habentis; quod grato, opinor, animo agnoscit Academia Halensis, medios inter belli strepitus ab ipso fundata, nunc prae aliis longe florentissima. Itaque rectissime dicis rem non esse parvam, a Magno Principe erectam esse Scientiarum Societatem, per quam praeclari Viri juvari animarique possint: qui adeo non male egerint, si egregia occasione recte utantur, junctisque viribus eo annittantur, ut generoso Principis consilio satisfiat, publicae utilitatis promovendae elegantiorumque studiorum amplificandorum causa, quod sane in Serenissimi Fundatoris non tantum, sed et in totius Germaniae, communis nostrae patriae, immortalem tendet gloriam, quando praesertim recens haec fundata Societas inter vicinas, ut spero, Italicam, Gallicam, Anglicam, sese extollet, quantum Cupressus inter viburna. Ad tenuia mea quod attinet studia, si visa fuerint conferre posse aliquid pondusculi ad societatis vigorem et incrementum, me certe non alienum adeo praeberem, si id honeste et decenter a me peteretur. Tuo autem prudenti relinquo consilio, num quid Berolinensibus hac de re communicare volueris. Non dubito, quin, juxta alia, etiam physica et experimentalia inprimis excolenda fuerint. Optarem hic mihi subsidia subministrarentur ad procuranda plura instrumenta, suppellectilem, materiam, aliaque ad id operis necessaria: pollicerer sane mihi non inutilem successum. Ordines quidem nostri ante aliquot annos in usum nostrae juventutis studiosae, meo consilio inducti, aliquam summulam suppeditarunt, quae autem vixdum principalioribus instrumentis coëmendis sufficiebat. Destitutus itaque annuo subsidio, sumptibus quotidianis impedendo (quod ab illis flagitaveram, sed frustra) non ea, quae vellem strenuitate naturae arcana rimari licet; tametsi, ne sic quidem tempus teram, quin tentaminibus minus pretiosis, ex meo institutis, interdum aliquid novi detegam. Ita nuper inveni modum parandi novum genus Phosphori valde lucidi et facile parabilis, ex argento vivo in vacuo posito. Hic phosphorus omnibus aliis palmam praeripere debet; primo, quod eum, non casu fortuito, cui reliqui omnes ortum suum debent, sed de industria, a priori et principiis meis ratiocinando invenerim; secundo, et pridem praecipue, quod meus Phosphorus sit perpetuus, loco quod omnes alii sese consumant vel saltem

suam virtutem tractu temporis amittunt. Unde jam innotesceret, quomodo tales lampades sepulchrales in perpetuum durantes parari possent, quae fulgerent tantum, non arderent. Incidi in hoc inventum hac occasione: Cum ante aliquot menses in libro aliquo legissem, Picardum Societatis Gallicae, in suo barometro, cum forte per tenebras illud transportaret, in parte tubi vacua, observasse aliquem fulgorem ex improviso apparentem, et mox iterum disparentem, postea redeuntem toties quoties argentum vivum per motum reciprocationis in tubo descendebat. Cum vero reliqui ejusdem Societatis Viri, quibus ille inexpectatum phaenomenum monstraverat, singuli idem in suis barometris tentare vellent, nemini res successisse dicitur, donec postea ex multis barometris, quae tentata fuerant, unicum fuit repertum, quod etiam aliquod lumen, sed longe debilius quam Picardianum vibrabat. Hisce lectis meum barometrum, quod usui ordinario inserviebat, confestim arripio mecumque porto in tenebras, tentaturus num quam lucem in illo observaturus essem: sed prima agitatione frustra, dein violentissime agitatum, in quolibet descensu mercurii, jamjam iterum ascensuri, luculam aliquam, sed perquam obscuram emisit. Hac super re meditari incepi, et tandem mihi videbatur, secundum ratiocinium meum, lucem illam in omnibus barometris apparere debere, si conficiendo barometro tubus alio quam ordinario modo impleretur, quo nimirum impediatur, ne suprema superficies mercurii in tubo cooperiatur pellicula quadam, qua omnis mercurius a contactu aëris superinducitur, ad instar alicujus pultis et omnium fere liquorum, qui aëri expositi talem pelliculam in summitate sua contrahunt; hanc enim pelliculam esse existimavi, quae materiam lucificam, ex mercurio singulis descensibus egredi volentem, ad occupandum tubi spatium a mercurio descendente relictum, coërceat et impediat quominus erumpere possit. Excogitavi itaque duos modos implendi tubum barometri citra contactum aëris, ita ut columna mercurii nuda esset et immunis ab illa pellicula; et reapse modis illis in effectum deductis et variis barometris ita paratis, feci periculum in tenebris, non sine magna voluptate et delectamento, videns exitum meo ratiocinio etiam ultra quam sperabam respondisse. Omnes enim isti tubi, levissima agitatione, tam vividam lucem de se spargebant, ut etiam literas majusculas discernere potuissem, cum tamen antea tubus more ordinario impletus, eodem quidem argento vivo, nihil omnino vel parum violentissimis

successibus luxerit. Laetabar equidem invenisse modum generalem omnia barometra reddendi lucifera, meamque proin inventionem cum Academia Parisina communicavi, rogavique ut idem tentarent Curiosi: sed nuperrime rescripsit Varignonius, nonnullos experimenta mea tentasse quidem, sed optatum successum non obtinuisse; hinc meam inventionem neglectam deseruisse, et susque deque habitam, tribuentes successum barometrorum meorum propriae alicui qualitati mercurii, qua omnes mercurii non gaudent, sed paucissimi tantum. Ego vero minime deterritus hac responsione, conscius quippe duos tubos, eodem mercurio repletos, sed unum modo ordinario et alterum novo a me excogitato, diversos adeo effectus prodidisse, rejicio infelicem successum sociorum Parisinorum in ipsorum incuriam, qua quae praescripseram non caute satis observabant. Resumsi itaque omnia, et denuo tentavi, et ecce cum pristino felici successu, et quod plus est, ne quid peculiari mei argenti vivi proprietati tribui possit, comparavi mihi aliud argentum vivum, cum quo aeque feliciter omnia praestiti, quod abunde confirmat, id non deberi rarae alicui proprietati argenti vivi, quae non omni competat, nisi quis hic velit dicere me, forte fortuna, incidisse in duos successive mercurios hanc rarissimam virtutem habentes, quod meo judicio moraliter impossibile est. Sed hactenus dicta non sunt, in quibus phosphorus meus consistat. Eum hac occasione ante paucas hebdomadas excogitavi, quo spero omnes objectiones submotum iri: nam non dubito quin facile, ope cujuscunque argenti vivi, parari possit. Sumo phialam vitream, robustam et recentem, quae nulli usui adhuc inservierit: nam vel minima humiditas vel oleositas intus lateribus adhaerens apparationem luminis valde imminueret, si non omnino tolleret. Huic phialae, si capax sit $\frac{1}{8}$ mensurae vulgaris, lente infundo 4 aut 5 uncias mercurii bene purgati, cavendo ne phiala multum agitetur; statim enim mercurius contraheret dictam pelliculam lumini tam noxiam: postea, ope antliae pneumaticae, extraho aërem ex phiala quantum possum accuratissime; quo facto, phialae orificium claudendum est, ope epistomii ei adaptati, vel alio modo cera vel caemento obduro exactissime, ne post exhaustionem aëris vel minimum reingredi possit. Omnia si bene sint observata et peracta, removeo phialam ab antlia, eaque mihi praebet Phosphorum portatilem perpetuum, nam in densissimis tenebris, si phiala valde sursum deorsum agitetur, tota phiala splendidissima luce subito

adimpletur, nec illa cessat, nisi cessante agitatione. Diceres Te videre aquam ignitam, totam phialae capacitatem perfundentem: lumen ejus, si rite praeparetur phiala, non minus vividum est, quam Phosphori Anglici seu potius Kunckeliani. Praeterea non ut in barometro alternatim apparet, et disparet, sed quamdiu inclusus mercurius agitatur, tamdiu sine ulla interruptione splendet, et tanto vividius quidem, quanto vehementius succutitur.

Hunc mirabilem effectum ex meis principiis praevideram: cogitabam enim pelliculam illam, si qua generetur (quae tam difficulter in barometris praecaveri potest, quaeque adeo materiam luminificam vel omnino suffocat, vel valde debilitat, ideo quod illa mercurium descendentem tenaciter comitetur, nec ob aequabilem et uniformem motum facile lacerari possit) heic e contrario in phiala, cum mercurius vehementer in omnes partes motu inordinato moveatur, non posse non plurimis in locis lacerari et ita exitum concedere materiae isti tenuissimae, cujus motu lumen excitatur, quaeque ex poris angustissimis argenti vivi prodibit, dum alia de novo succedens poros ab opposita parte subit, adeoque semper nova materia luminifica praesto est. Hoc moneo, ne quis putet illam temporis tractu consumi et exhauriri posse. Quomodo autem omnia procedant, cur vacuum requiratur, cur item mercurius ad hoc aptus sit, non alii liquores, de iis ample cogitata mea Academiae aperueram, sed hanc novam effectionem Phosphori portatilis et perpetui nondum communicavi. Feci experimentum coram Viris curiosis aliquibus hujus urbis (habeo enim in parato tales phialas diverso mercurio donatas et rite aëre exhaustas, quae aequalem effectum praestant) confessi sunt omnes se nihil unquam curiosius vidisse. Ecce totum hujus phosphori mysterium, quod Tecum primo communicare volui; si illud dignum reputes, quod ad novam Societatem mittas, ego non repugno. Vale etc.

Groningae 5 Octobris 1700.

P. S. Non video, quod Computus Gregorianus in Paschatis constitutione atque inde pendentibus Festis mobilibus abeat a regulis magnae Synodi Nicaenae. Varignonius in novissimis suis literis ad interrogata Tua, quod miror, nihil respondit: refricabo ipsi memoriam, quam primum ipsi rescribam. Interim ecce ex

ejus literis, *) quae ad Te primario spectant. Rogo ut remittas. Videbis ibi novum differentio-mastigem in imperito Rollio. Vidi hunc hominem aliquoties, cum Parisiis essem, apud Marchionem Hospitalium: sed memini me jam tum ad Hospitalium dixisse, quantum ex hominis conversatione capere potuerim, ab eo nihil nec boni nec docti exspectandum esse, utpote cujus tota scientia consistat in resolvendis aliquot quaestiunculis algebraicis, ut mirer Academiam imperitum hominem et simul incomptum et agrestem (ita enim mihi contra Gallorum morem apparuerat) in numerum sociorum cooptare voluerit propter modicum aliquem vulgatissimae algebrae habitum.

Caeterum notum Tibi fuerit, non dubito, quod frater meus litem quam exoletam credideram, resuscitaverit per epistolam valde longam et mihi inscriptam, quam typis evulgavit. Hospitalius eam mihi transmisit. Tota fere conflata est ex calumniis, mendaciis et falsis pro more suo suspicionibus; nonnullis in locis me laudare videtur, sed aspero veneno latente acerrimo. Antiquum obtinet, pergit enim tribuere casui fortuito solutiones meas, quas cum suis convenire fatetur, et quod magis mirere, correctionem erroris illius, quem praecipitanter admiseram, quam correctionem etiam bonam esse jam agnoscit, iterum non industriae, sed fortunae ascribere non veretur, dicitque me eam conjecturando divinasse: item me non bona fide egisse, me enim falso jactasse, quod in manus Tuas deposuerim methodum aliquam directam, me Tuo nomine ubique abusum esse sive temere sive Te conscio: Te, ad quem toties provocaverim, mentem tamen Tuam nunquam aperire aut pro me sententiam dicere voluisse, et nescio quot alias ineptias. Unum est quod miror prae ceteris, quod eo usque impudentiae processerit, ut Te et Varignonium iniquae collusionis suspectos sibi esse apud nonnullos, quod aliunde constat, serio conquestus fuerit. Vides, quanta vis fiat veritati, certe nisi insolentiae obex opponatur, nihil non molietur tandem. Equidem quid Tu hac de re sentias, libenter intelligerem Tuumque consilium audirem; fessus sum, fateor, scribendo contra obstinatum fratrem. Negat me unquam habuisse methodum sive directam sive indire-

*) Im Interesse der Geschichte der höheren Analysis folgt ein Auszug aus diesem Schreiben Varignon's an Joh. Bernoulli in der Beilage.

etam praeter sophisticam illam, quam mihi affinxit; at Tu, cui submisi directam et indirectam aliquam, quid moraris veritati testimonium dare? fac quaeso, ut innocentia mea patescat, utque vindicer ab iniquis istis imputationibus. Nolim tamen ut statim methodos meas edas, antequam frater suas vel ediderit vel (quod aequitas saltem postulat) in Tuas manus etiam deposuerit, simul cum meis edendas, ut Lector de iis inter se collatis facilius judicare queat. Sed id saltem a Te enixe petierim, ut Orbi literato paucissimis licet verbis indicare velis, quantum Tibi (non de solutionibus, de his enim quaestio amplius non est, sed) de methodis ipsis meis constet, an et quando eas a me acceperis, hoc unicum peto: quin imo nec dum judicium Tuum de iis exigo, ne quid scrupuli Tibi faciam: sint sive bonae sive malae (licet illas in Tuis ad me literis jam approbaveris) hoc nondum controvertitur, sed tum demum disputabitur, ubi Fratris meaeque comparuerint; nunc num meas acceperis et quando. Tuis obsecro verbis convincatur Frater, siquidem meis fidem non habet. Vale iterum et fave.

Beilage.

Varignon an Joh. Bernoulli.

J'oubliois de vous dire que malgré l'extreme aversion, que j'ay pour tout ce qui s'appelle dispute, m'y voila cependant profondement engagé depuis deux mois que le nommé Mr. Rolle s'avisa de lire dans l'Academie un Ecrit contre le Calcul differentiel. Mr. le Marquis de l'Hospital n'y étoit pas, et comme tout ce que j'y donne, est presque de ce calcul, la voix publique fut, que c'étoit à moy d'y repondre, et il falut y consentir. Pour cela je demanday qu'auparavant il rendist ses difficultés publiques, afin d'avoir aussi le public pour juge: on ne voulut pas non plus me l'accorder (Mr. l'Abbé Bignon n'y étoit pas); on me dist même qu'on ne trouveroit pas bon qu'il s'en repandist rien dans les journaux: ainsy je vous prie que ceci soit dit entre vous, Mr. Leibniz et moy. Vers le commencement du mois d'Aoust je lus ma réponse à l'Academie, dans laquelle quelques ménagemens, que j'eusse pour Mr. Rolle; il se trouva cependant un peu maltraité par la necessité, ou je fus de faire voir, qu'il n'entendoit point du tout le calcul, qu'il attaquoit. Son écrit consistoit 1°. en forcées déclamations sans aucune preuve contre les infiniment

grands et les infiniment petits de differens genres; 2° il prenoit les differentielles tantost pour des parties finies et déterminées et tantost pour des zeros absolus; 3° il soutenoit que c'étoit faire le tout égal à sa partie que de prendre une grandeur; 4° il disoit que dans ce calcul on fait revivre et mourir les differentielles à son gré, ne consultant en cela que les besoins qu'on en a pour la solution des problemes; et mille autres pauvretés pareilles. Je luy ay démontré à la maniere des anciens tout ce qu'il trouvoit à redire dans le premier et troisieme article, et je luy ay fait voir qu'il n'entendoit ny le second, ny le troisieme etc. Il s'est retranché à dire qu'il fera voir des paralogismes resultans de ce calcul: nous verrons, et ma seconde réponse faite, je demanderay à l'Academie de vouloir bien permettre que nos ecrits soint publies de part et d'autre, auxquels j'enjoindray encore un qui est deja tout prest et dans lequel (pour tirer quelque utilité de nostre dispute) seront en ordre et par propositions suivies, les principes du calcul differentiel demontrés à la maniere des anciens: Euclide seul me donne les differentielles de tous les genres à l'infini, et ainsi de reste.

CXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postremas meas nuperrime ad Te datas acceperis, ut spero, rectissime. Nunc ecce mitto responsionem Cl. Volderi, quam per ultimum tabellarium huc allatam accepi nudius tertius. Si et ille in novam Societatem Brandeburgicam invitaretur, credo non recusaturum, in suis enim ad me peculiare testatur gaudium, quod Tu Societati sis praefuturus, unde spem optimam optimi successus habet. An autem e re sit ut magnam rationem habeas D. Fatio, ut quidem Volderus jocatur, ipse dispicies. Virium et actionum aestimandarum legibus jam magis delectari videtur Volderus; non enim iis accedit tantum, sed et earum demonstrationem ex Tuis principiis conficit. At vereor ne in substantiae conceptu et definitione toto coelo inter vos discrepetis, memini enim Tibi extensum non esse substantiam, sed substantias. Misera est Bredenburgii demonstratio, qua vult omnia necessario existere, quod si

vel maxime verum esset, id non tamen vi argumenti ipsius sequeretur, alioquin mundus ab aeterno existeret. Caeterum ad novissimas meas me refero. Circa phosphorum meum plura faciam experimenta; spero eum ad usum aliquem trahi posse, ut ita utile cum curioso conjunctum sit. Vale etc.

Groningae d. 15 Octobr. 1700. st. v.

CXIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quanti et Te faciam et inventa Tua, vel inde aestimare potes, quod heri, id est penultima seculi die ex longo itinere domum redux Tibi scribo inter primos. Literas domi inveni infinitas, quarum partem necdum legi: Tuas non distuli aperire, et magna cum voluptate pulcherrimum inventum Tuum vidi, quo lucis impedimentum a mercurio in vacuo tollis. Hoc Tuo nomine communicabo Societati Scientiarum Brandeburgicae, cui erit gratissimum, simulque indicabo rem convenientissimam et Tibi non ingratam facturos, si ad Te diploma receptionis mittant. Neque enim alia ceremonia opus puto, idemque sic erga alios factum. Interim rogo ut inventum sic communicatum mittas, quemadmodum descriptum voles, rationibus etiam adjectis ad causas illustrandas Quaerere libet, an deprehenderis, exiguam quantitatem mercurii divisam in partes multarum superficierum praestare, quod magna quantitas parum habens superficiei, seu an lux magis superficiei, quam corporis quantitatem sequatur.

Phosphorus ignifer (sic eum appello, quia ex motu ignem erumpit) neque Anglicanus est neque Kunkelianus, sed Brandianus; nam a Brandio apud Hamburgenses, vero inventore, Kraftius et Kunkelius compositionem obtinuere, quam Kraftius (Autorem candide professus) tulit ad Anglos, Kunkelius pro sua publicavit. Scis marinos fluctus lucem phosphoro Tuo similem etiam agitatione producere, ut cognata admodum res videatur. Et scimus alias, multa esse in mercurio non abhorrentia ab effectibus salis, quo mare impraegnatur. Nec absimilis lux editur Sacchari ictu. Illud imprimis considerandum, an hinc adjuvari possit cognitio lucis.

Dn. Fratrem Tuum typis aliquid contra Te edidisse post dissuasiones communium amicorum, sane miror. Ego paratissimus sum testimonio veritati perhibendo, profiteborque semper et ubique, Te mature, ut affirmasti, ad me misisse, quibus fraternis postulatis satisfaceres. Judicandum itaque Tibi relinquo, an velis mihi communicare epistolam fraternam, additis observationibus Tuis, quo re melius cognita, dicam quae serviant, ut Tibi et mihi et cuique alii tribuatur suum.

Dnus. Menkenius scribit, Dnum. Fatium ad Tua responsum transmisisse, ita tamen ut potestatem fecerit delendi quae velles; Te nondum respondisse. Meo judicio optime faceret Dnus. Menkenius, si Fatium ad Anglicana Diaria remitteret. Cur enim nostra, id est, Germanorum Diaria alienis in nos ipsos publicandis inservirent, cum exteri similia officia nobis non praestent. Olim dicebamus: Bon jour et bon an; nunc Tibi opto: Bon siècle et bon an. Vale etc.

Dabam Hanoverae 31 Decembris 1700.

P. S. Hortare, quaeso, Dnum. Volderum (cui adjunctas mitti peto) sed velut ex Te, ut doctrina de vera virium et actionum motricium aestimatione docendo propaget, sive viva voce sive thesibus disputationibusque. Nec inutiliter Dno. Marchioni Hospitalio significabitur, proselytum nos tam insignem habere. Pene oblitus eram Rollii; ejus nihil hactenus vidi, nisi titulos et aenigmatica quaedam schediasmata inserta Diario Eruditorum. Hujusmodi adversarii, quales Nieuwentiit et Rollius et Cluverius (alias caeteris longe praeferendus) nostra non evertent, sed magis novis palmis decorabunt. Interim perutile est, os illi occludi per reductionem ad demonstrationes veterum more formatas, et egregiam ea in re operam navaturam puto Dnum. Varignonium. Non potui melius ad silentium redigere Dnum. Cluverium, quam quaerendo, possitne error Archimedis aliqua constructione assignari; quod si non potest, veram ejus parabolae quadraturam esse oportet. Neque enim de aliis quam assignabilibus quantitatibus agitur in propositionibus geometricis. Idem de caeteris dicendum. Rogo ut Dnum. Varignonium officiosissime a me salutes, eique gratias pro communicatis notitiis meo quoque nomine agas.

CXX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quas mihi scripsisti literas pridie novi seculi et anni Gregoriani, ego quoque pridie ejusdem anni, sed Juliani accepi, qui dies notabilis fuit, quippe quem excepit longa nox undecim dierum; ea enim finita nobis ecce! jam duodecimus Januarii illuxit; idem quoque apud Frisios occidentales factum est. Quod ex itinere redux mihi inter primos respondere dignatus fueris, est utique singularis Tuae erga me benevolentiae signum, quod gratus agnosco, conaborque eam quavis occasione demereri. Gaudeo quod inventum meum novi phosphori Tibi placeat; placet etiam pluribus Academiae Regiae Scientiarum. Dnus. Varignonius mihi scripsit, Dnum. Hombergium mea experimenta de novo facturum, quamprimum otium nactus fuerit; Praesidem vero Academiae, Dnum. Bignonium, tanto hujus phosphori desiderio teneri, ut, si Hombergio res non bene successura esset, me roget ut phosphorum a me paratum per cursorem publicum ad Academiam mittere velim. Avide interim expecto Hombergii successum, antequam inventum publico communicem. Imo maxime mercurius secundum superficiei, non molis, quantitatem lucet; nam in barometro in summitate tantum columnae mercurialis lux observatur, in lagenula vero vitrea quantitas mercurii licet exigua, tota tamen ignita apparet, quoniam vehementi agitatione in plures multarum superficierum partes dispergitur, ita ut quaelibet guttula suum peculiare lumen praebeat. Unde etiam mihi in mentem venit, posse praeter curiositatem, aliquam utilitatem ex hoc invento capi; nimirum cogitavi, si haberentur duo vasa vitrea uniformia et robusta, eoque conpingerentur ad vertices, relicto foraminulo communicationis ex uno in alterum, in modum horologii arenarii, sed loco arenae immittendus foret mercurius, et postea aër ex vasis combinatis extrahendus, quod quomodo commode fieri possit jam perspicio; cogitavi, inquam, tale horologium, etiam noctu, in tenebris inservire posse, etenim radius mercurii per foramen defluentis foret lucidus, quae lux non ante cessaret, quam omnis mercurius ex superiori vase in inferius delapsus esset. Loco vasculorum possent adhiberi tubi longi, ut ita ex longitudine radii lucidi paulatim descendentis etiam ipsa minuta metiri liceret. Hujusmodi horologiis uti possent speculatores

noctambuli, excubitores nocturni, aliique in occasionibus, ubi sonus campanarum vel audiri non potest vel non debet.

Non puto, lucem marinorum fluctuum cognatam esse luci mercurii in vacuo: ex meo enim explicandi principio non ipsae mercurii particulae producunt lucem, sed potius materia subtilissima, quae in angustissimis mercurii porulis hospitatur, si excutitur agitatione, mox libera cum sit a claustrorum impedimentis, celerrimum motum acquirit, et ita lucem causatur; atque adeo si alium haberemus liquorem valde ponderosum, cujus nempe pori essent valde exiles, nullus dubito, quin idem effectus in eo, qui in mercurio observaretur; aurum ex. gr. si fluidum reddi posset, servata specifica gravitate, omnium, credo, foret commodissimum ad hoc negotium, et phosphorum redderet longe clariorem, quam mercurius. Jam vero fluctus marini poros habent nimis amplos, quam ut solam materiam subtilissimam et luminificam in se contineant; ergo ipsae salis particulae, quae a fluctibus separatae et in aërem vibratae, celerrime gyrando, cum sint rigidae, circumstantes aëris aliasque crassiores particulas repellunt, spatiumque hoc modo faciunt materiae luminificae undique affluenti. Magna igitur hic est differentia, quod ex eo porro confirmatur, quod mercurius in vacuo tantum luceat, aqua vero marina nonnisi in aëre: nam urina, quam quia ex ea phosphorus (ut vocas) Brandianus conficitur, ex omnibus liquoribus salinis aptissimam putabam, inclusa tamen in vacuo, eaque valde agitata, ne minimam quidem scintillulam emittebat.

Ecce hic mitto Tibi, ut petis, epistolam fratris mei; rogo ut remittas. Ex notulis meis margini aspersis videbis satis quid respondendum esset, quamvis adhuc multa intacta praeterierim: spero, ut promisisti, Te veritati testimonium perhibiturum, ut cuique suum tribuatur.

Verum est, quod Dnus. Menkenius Tibi scripsit, Dnum. Fatium ad mea responsum transmisisse, quod Menkenius mecum communicavit; id autem remisi, absque ut in eo quicquam deleverim, et dixi Dno. Menkenio me postea responsurum, quando Fatianum comparuerit. Id autem nihil continebat, nisi quod dicat, historiam a me perlatam o t i o s i s s i m a m (ut vocat) esse fictam: se diu possidere methodum nostra problemata solvendi; utque id probet, affert solutionem problematis curvae isochronae, in qua mobile ab horizonte aequaliter descendit, jam ante multos annos a

Te propositi et soluti. Sed si tam dexter est, cur non etiam isochronam paracentricam solvit? Deinde ostendit, quod ex modo meo, quo Brachystochronam per Doctrinam Fermatianam refractionum, ita etiam solidum minimae resistentiae determinare possit. Praeterea nihil habet. Audio etiam Tibi respondisse, at nihil inesse, praeter inutilem velitationem verborum; quare dubius haereat Dnus. Menkenius utrum imprimat, necne. Scire tamen ex Te vellem, quid Fatius Tibi regesserit. Videris sine dubio in novissimo Actorum Julio, Davidis Gregorii responsionem ad animadversiones Tuas. Miror profecto Virum bonum, ne nunc quidem suos paralogismos videre posse vel velle, sed novas potius cum prioribus (in quibus perseverat) consuere, dum lemma mechanicum, per se quidem elegantissimum, tam male applicat, caeteraque omnia misere incrustat frivolis distinctiunculis inter causam gravitatis et gravitatis effectum. Annon judicas e re esse, ut primas Tuas animadversiones vindices secundis, et Orbi Literato monstres, quantum adhuc caecutiat responsionis auctor.

Eodem die, quo Tuas, accepi etiam literas a Varignonio et Hospitalio; Varignonianas, quae plura continent de Rollio aliisque, Tibi misissem cum hisce, nisi fasciculum tumidum nimis fecissent. Ecce interim quae habent ad Te spectantia: „Vous demandez ce „que Monsieur Leibnitz souhait par rapport au Calendrier: nous „ne le savons point encore. On n'a pas crû y devoir toucher, „sans une permission de Rome, que la mort du dernier pape a „retardée.“ Alio in loco loquens de Domino Carré, suo amanuensi (Elève) dicit: „Il vient de nous donner de petits Elemens de cal- „cul integral *) concernant la mesure des surfaces, la di- „mension des solides, des Centres de pesanteur, des „Centres de percussions etc. dans des questions à peu-près „semblables à celles d'Archimède, et seulement dans ce qu'elles „ont d'absolument integrable, afin (dit-il) de faire comprendre à „ceux qui commencent, avec quelle facilité ce calcul résout les „plus difficiles questions des Anciens.“

Tuas postremas ad Dominum Volderum scriptas ipsi jam misi, hortatu simul (quod petis) ut nunc perceptam veram aestimationem virium motricium in Scholis suis docendo propaget ve-

*) Methode pour la mesure des surfaces etc. par Carré. Paris 1700. 4.

teremque errorem de quantitate motus conservanda explodat: quod pro candore suo eum facturum spero.

Ecce heic literas a Clar. Braunio, Collega meo, qui audivit Te autorem esse Menstrui excerpti (Monatlicher Auszug —) quod Hanoverae editur; in quo autem recensendo ejus Selecta sacra, alia opuscula quaedam, ab ipso non profecta, ipsi adscribis haud dubie quod similitudo nominis Tibi imposuerit. Eo itaque fine credo suas ad Te misit, ut Te roget, velis errorem in personam commissum in eodem excerpto proximi mensis indicare. Quod si Dno. Braunio respondere digneris, possunt literae ad me mitti, eas ipsi mox traditurum. Vale et novum hunc annum novique seculi plures sequentes feliciter transige.

Gropingae 25 Januar. 1701.

CXXI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Miror Dn. Abbatem Bignonium et Dn. Marchionem Hospitalium non potuisse impetrare, ut lis conquiesceret, quam publice agitari parum esse ex decoro semper putavi. Epistolam Dni. Fratris Tui perlegi et video ita scriptam, ut acerbitatem redintegrare irritando possit. Sunt quaedam, unde colligo, nec mihi valde aequum esse, sed haec facile condono, hortorque ut pari animi moderatione morosiorem nonnihil, bene tamen .... et quod caput est, fratrem feras.

Dn. Sam. Battierium aliquando si bene memini laudabas, cum Basilea abires: nunc videris aliter de viro sentire.

Dominum M. Jacobum Hermannum esse eum puto, cujus Libellus pro sententia mea contra Cogitationes Nieuwentitii posteriores mihi missus est, nescio an Tibi visus. Non licuit examinare, videtur tamen non mala respondere Nieuwentitio, etsi responsione amplius opus esse non putarim.

Ego quoque Fatianam schedam remisi Domino Menkenio, cum responsione aliqua mea in id scripta, ut eam remittat ipsi. Nam ut talia, in quibus rerum nihil, Actis inserantur, nec Dn.

Menkenius consultum ducit. Inania erant quae dicebat, mista ex querelis, palpo, aculeis.

Non vidi quae Dnus. Gregorius nuper dixerit, indica quaeso mensem. Non est quod ipsi amplius respondeatur; suffecerit forte dici, petitum fuisse ut obtineret approbationem Newtoni, sed eam fortasse non potuit impetrare.

Remitto Tibi schedam impressam Dni. Fratris Tui, fortasse aliquando et pro me habebitur exemplar.

Ecce responsum celeberrimo Dno. Braunio; eum facile docebis, me saepe absentem et aliis distractissimum non posse conficere tales libellos menstruos. Juvenis eruditus est apud me, qui talia parat, et qui ex meis commerciis literariis quaedam adhibet in rem suam.

Ipse suspicatus eram, noluisse Academicos Regios tangere rem Calendariam, ne Romam offenderent; expectemus ergo permissionem.

Gaudeo suspicionem meam de luce mercurii proportionali non corpori, sed superficiei, experientiae Tuae consentire; inde etiam spem majoris usus conceperam. Interea Societati Brandeburgicae inventum Tuum communicavi. Mittam et aethiologiam, ubi communicaveris.

Ego ingeniosas de causis phaenomenorum conjecturas, etsi non absolutas, tamen laudo et perutiles judico; ita enim collatis experimentis paulatim ad certitudinem majorem accedi potest. Experimenta essent optanda in metallis fusis, et simul in vacuo agitatis; sed foret in illis sumendis non parum difficultatis. Oleum vitrioli est inter liquores ponderosiores, quod si in eo aliquod esset lucis vestigium, adjuvaretur conjectura Tua. Consideratu etiam digna est ignitio, quam ferrum acquirit a motu, tum quid aqua marina et alia ab ictu lucentia praestarent in vacuo. Cum aqua marina agitata lucet, non putem salis partes a fluctibus separari, sed ipsam aquam sale praegnantem incalescere. Cum in urinae magna copia pauxillum lateat Autophosphori, frustra ab eo lucem in ipsa per motum expectes. Addo quod Autophosphorus non salinae est, sed sulphureae naturae, et luce sua absumatur. Secus judicandum de illis, quibus motus sufficit ad perenniter lucendum, quibus non partes ipsorum privatae crassiusculae accenduntur, sed publicae permeantes tantum congregantur. Est quidam Thermophosphorus, qui lucem solo calore concipit, in illo

pariter ac in Litheosphori (sive Bononiensi sive Balduiniano qui lucis quasi Echo est quaedam) multa adhuc essent tentanda.

Grata erant, quae Hospitaliana et Varignoniana communicare noles. Vale etc.

Dabam Hanoverae 28 Januarii 1701.

P. S. In literis ad Dnum. Braunium oblitus sum dicere Auctorem Excerptorum Menstruorum, ut mihi dixit, ex Baylii Dictionario, voce Stouppe sumsisse, quae de Neomagensi Professione dixerat: is enim talia ad marginem notaverat, loquens de refutatione libri, qnem Helvetius ille scripserat in Religionem Batavorum.

CXXII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quod epistola Fratris mei in me scripta Tibi displicuerit, non miror, neque etiam quod ex illa collegeris quaedam nec Tibi valde aequa; non enim oportet esse valde emunctae naris ad id colligendum, modo quis noverit quae inter nos peracta sunt. Sed miror, quod dicas me debere ferre fratrem morosiorem nonnihil, quasi nescias morosos tanto insolentiores fieri, quanto tractentur mitius. Laudabam Tibi aliquando Samuelem Battierium, verum est, ut Virum non indoctum et ut meum amicum integerrimum (sic enim putabam) multis nominibus mihi devinctissimum, quippe cui praeter alia officia quotidiana et hoc singulare praestiteram, ut quicquid in scriptis haberem, quondam Marchioni Hospitalio aliisque Exteris privatim communicatum, et ipsi describendum commodaverim addita mea explicatione viva, si quid obscurius occurrebat. At quid ille pro hoc? animum fateor gratissimum, si is ex fronte legendus, sed fallit vitium specie virtutis et umbra. Vix enim Basilea abiveram et vix Groningae receptus, cum nefandum facinus a fratre praemeditatum juncta opera executioni darent, quod in meam tendisset perniciem, nisi Deus innocentiam meam respexisset; scilicet literas (proh scelus!) supposuerunt quasi a me scriptas ad certam aliquam personam, cui eos tradi curabant per ignotum aliquem puerum tanquam a tabellario publico allatas, postea ejus personae responsum ad literas hasce supposititias eadem arte in-

terceperunt, interceptum aperuerunt, spe freti se mira secreta detecturos, quae scelestissimo suo proposito conducerent ad famae meae interitum procurandum. At vero spe turpiter excidentes cum nihil in responso reperirent, quod non aeque et honori et famae meae faveret, omnia silentio suppresserunt. Ego interim omnium horum gestorum ignarus non desinebam per aliquot annos literas commutare Battierio mihi, ut putabam, semper amicissimo: ille vicissim honestissimis et blandissimis verbis suam amicitiam (o quam fucatam!) adhuc Parisiis cum esset, saepius testabatur, dissimulato scelere scitissime dum personatus proditor oscula figit, donec tandem mirabili quodam fato ad aures meas pervenisset me scripsisse literas ad personam illam innominatam et me vicissim ab ea responsum accepisse, quod tamen neutrum esse verum apud me conscius eram; hinc fraudem statim subolere, postea inquirere, et tandem quod mireris non minori arte detegere mihi contigit, idque dexteritate mei Soceri et fratris mei junioris, qui ambos nequitiae consortes eo adegerunt, ut intra privatos parietes coram Antistite seu Pastore primario convicti culpam et confiterentur et deprecarentur. Et certe si Battierius solus auctor fuisset sceleris, publicam daturus fuisset poenam, at cum fratri parcere voluerim, ambos privata censura abire sivi. Haec Tibi in aures dicta sunto. Tuum jam est judicare de tanta nequitia, ut et de impudentia fratris, quando in sua epistola audet Battierium vocare V i r u m e t t e s t e m p e r s p e c t a e p r o b i t a t i s e t m i h i f a m i l i a r i s s i m u m, quem tamen in conscientia sua novit, esse hominem criminis falsi convictum et ingratissimum pectus erga me habentem, animal omnium bipedum pessimum. Porro si Tibi dico, quod frater prae furore et taedio fere rumpitur, ex quo fossam ipse replevit, quam mihi paraverat, et in suum recidit caput in me vibratum fulmen, considerandum Tibi do, qualis reconciliatio cum illo sit speranda.

Mitto hic, quia petis, literas Varignonii ante aliquod tempus acceptas, velis eas mihi remittere. Secutus sum consilium quod mihi inibi cum Hospitalio dedit, misi namque meas methodos isoperimetrorum obsignatas, deponendas in manus Secretarii Academiae, et postquam frater suam publicaverit, reserandas et ab Academia examinandas, et quidem ipsissimas schedas misi quas deperditas crediderās, postea vero cum aliam descriptionem Tibi misissem, interim iterum repertas mihi remiseras. Quapropter Tuum

testimonium, quod offers, non recuso, ne mihi frater de tempore lites movere possit. Testaberis igitur in Actis Erudit. si placet, id omne quod Tibi constat de hac re, quod scilicet solutiones ipsas problematum fraternorum a me statim ab initio acceperis, una cum analysi posterioris quidem tantum, quoniam ut scis ego tum putaverim provocationem fratris in hoc posteriori tantum, utpote cui praemium adjunxerit, constitisse, postea vero cum audivissem ex Diario Paris. an. 1698 mens. Febr. pag. 78. solutionem meam posterioris fratri probari quidem, sed non item ex toto solutionem prioris, quam veritati non omni ex parte conformem dicebat, simulque tum prius problema, non posterius (ut nimirum meum jus, quod in praemium jam acquisivi, eluderet) principale esse causabatur. Quod ego non distulerim, errorem sive calculi sive applicationis qui revera irrepserat, emendatum dare in Diario ejusdem anni mens. Aprili; Tibi vero etiam quod ipsam methodum duplicem directam et indirectam (ut videres errorem non methodi esse, sed aut calculi aut applicationis) transmiserim sine interposita mora (accepisti enim illam eodem anno 1698 mense Junio aut Julio) jam tum temporis Te rogans, ut velles transmissum schediasma asseverare, ut suo tempore pro veritate testari posses. Quod si ergo id nunc, quo id temporis ratio postulat, facere velis, facies rem Tibi honestam et mihi gratam, dulce enim et decorum est veritatem oppressam salvare.

Verum est, quod Tschirnhausius nuspiam sibi tribuat solutionem Brachystochronae, in eodem tamen mense Actorum, in quo nostrae solutiones comparuerunt, dicit curvam celerrimi descensus cycloidi quadrare; sine ulla demonstratione asserit id fluere ex inventis Hugenii circa cycloidem suam, sed facile suspicor, vidisse eum apud Dn. Menckenium nostra schediasmata, antequam essent impressa. In Diario Paris. 1698 mens. Aug. pag. 364 Tuo judicio se staturum dicit frater, sed ita ut facile pateat, eum Te valde suspectum habere, eoque magis quod noluerit acceptare binas conditiones, quas ipsi proposui eod. an. mens. Decembr. p. 485, quas acceptando si Tuo soli voluisset se submittere judicio, ille nihil, ego omnia periclitaturus fuissem, nam ipsi concessi liberum jus appellandi ad judicium Hospitalii et Newtoni, quos Tibi adjungere volebat, me vero ad sententiam Tuam absolute obligavi, praeciso mihi omni jure appellandi; sed nihil respondit ad binos hos articulos quantumvis sibi favorabiles. Ego non minus quam Tu cu-

riosus essem cognoscendi, quo fundamento utatur frater pro solvendis problematis curvarum dissimilium. Quando suam methodum tam planam dicit, eo ipso valde suspectam reddit: nullum interim ab eo vidi specimen, nisi putes duo illa anagrammata in Diario Paris. 1698 p. 364 exhibita, quibus solutiones tegi dicit, sed de quibus, antequam clavem aperiat, judicare non possumus.

Credebam me jam indicasse mensem, in quo Gregorii responsio continetur. Ille est Julius anni elapsi Actorum Erudit.

Quod inventum meum de mercurio lucifero Societati Brandeburgicae communicaveris, ago gratias; gratum erit intelligere ejus judicium de eo. Mittam aethiologiam, postquam accepero Parisiis successum experimentorum, quibus ratiocinia mea confirmatum iri spero. Gaudeo interim Tibi probari opinionem meam summatim Tibi perscriptam, dum lucem mercurii non ex partibus ipsis mercurii privatis deduco, sed eam tribuo materiae publicae tenuissimae poros mercurii exilissimos permeanti et per concussionem foras prorumpenti et in cumulum coëunti. Si metalla haberi possent alio modo, quam igne fusa (servata tamen specifica gravitate) nullus dubito quin in vacuo lucerent, aeque ac mercurius; si autem per ignem sunt fusa, quid opus est experimentis, cum jam per se in aëre luceant? An Oleum vitrioli ad hoc negotium sit idoneum, valde dubito, utut enim paulo ponderosius sit, quam caeteri liquores, multum tamen deest, quin ad ponderositatem metallorum accedat. Adde quod nunquam sit sine aquositate, quam valde imbibit, ita ut pro hygrometro possit inservire: jam vero omnis materia heterogenea apparitioni hujus lucis valde est noxia; faciam tamen periculum cum eo, si per otium licuerit. Cum urina non luxerit in vacuo, veresimile est, aquam marinam, quae similis est naturae, non meliorem effectum editurum. Thermophosphorus de quo loqueris paratur, ni fallor, ex calce, nitro, aqua forti seu regia etc. Vale et fave etc.

Groningae 26 Februar. 1701.

P. S. Ecce heic literas a Domino Voldero. Instat, ut vides, et urget ut Tuam quoque substantiae notionem velis sibi aperire. Jac. Hermanni libellum, pro sententia Tua contra Nieuwentüit, non modo non vidi, sed etiam talem Te esse nactum novum vindicem neqnidem audivi; ideoque gratum esset, libellum istum videre, si commode transmitti possit.

CXXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

. . . .

Domini Hermanni Libellum ad Te quoque mittam; est enim requirendus inter alios libros nondum compactos.

Societas Brandeburgica nondum solemnes conventus habuit, unde descriptio Phosphori Tui eximii nondum producta est; sed reditus Aulae Regiae et ipsam animabit. Si simile vasculum, quale Dnus. Abbas Bignonius desiderabat, ego quoque a Te impetrare possem, multum adderes caeteris Tuae in me benevolentiae notis; nam mihi conficere non vacat, nec libenter cuivis committo rem meo judicio pulcherrimam et dignam quae non praestituatur.

Remitto Varignonianas Literas cum multa gratiarum actione.

. . . .

Dno. Voldero mox scribam, nunc enim non licet Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 11 Martii 1701,

CXXIV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Audivi Parisiis fratrem meum sese accingere ad iter in Galliam, ut ipse suam sui problematis analysin praesentet Academiae et simul adsit reserationi et examini mei scripti, quod sigillo obsignatum Secretario transmiseram, tum demum aperiendum cum frater suum exhibuisset. Interim de hoc itinere nihil prorsus mihi scribitur ex patria. Rescripsi tamen Parisios, ut mihi meum scriptum remittatur manu et sigillo Secretarii munitum, quod statim ac frater meus suum exhibuerit rursusque ex Gallia abierit, pro secunda vice missurus sim; non enim aequum esse causabar, ut me absente pars adversa sola audiatur, ideoque examen scriptorum nostrorum instituendum esse aut utroque aut neutro praesente. Vides quanto molimine haec omnia peragenda sint. Gratum est, quod offers testimonium Tuum et tanto gratius quidem, quanto maturius prodierit.

Audio Hermannum, Auctorem illius libelli, meditari iter ad Batavos, quo me conveniendi copiam habebit; forsitan inter revertendum etiam Te adibit. Quod frater meus et Battierius culpam fuerint deprecati, facile Tibi persuadebis, quod id non fecerint poenitentes, sed metu majoris poenae, quod vel exinde conjicere potes, quod ex eo tempore frater nullam non occasionem mihi nocendi captaverit.

Quam primum antliam meam pneumaticam (quae per totam hyemem ab usu quievit) iterum accommodavero, etiam pro Te praeparabo vasculum cum phosphoro. Interim indica mihi quaeso viam mittendi.

Gratias ago pro exemplis parodiae illius Leodio missae; remitto ecce aliquot exemplaria ejusdem parodiae cum adjuncta retorsione, quam post primam parodiae lectionem ex tempore adjeci. Eam cum nonnulli ex amicis, quibus ostenderam, lepidam satis putassent, suasu eorum typis mandavi; quocirca rogamus Te, ut suppresso Auctoris nomine unum alterumque exemplar ad eundem illum amicum, qui priora miserat, mittere velis, ut redeat ad Leodiensem Auctorem hicque videat, se non solum esse qui nugari possit, si nugandum est. Sunt qui putent eum esse vel pessimum Jesuitam, qui ex furore in nostros id scripserit, vel optimum Reformatum, qui stertentes nostros, ut ais, expergefacere voluerit. Quisquis sit, tempus docebit, annon ego verior sim vates. Accepimus heri secretiora quaedam Hagae peracta inter Comitem Avausium et nostros, quae non ad votum Galli procedent, nobis vero omnem securitatem promittunt. Nostri enim in pignus securitatis decem fortissimas postulant partim urbes partim arces Belgii Hispanici, in quas sua sola collocent praesidia; pro Anglis petunt Neoportum et Ostendam, et tandem pro Caesare aequam satisfactionem (in qua autem illa consistat, non dicitur) in quod nisi Galli et Hispani mox consenserint, se armorum vi quod justum est, quaesituros minitantes. Unde vides, in nostris regionibus adeo non esse illum terrorem panicum, quem parodiae auctor sibi imaginatur, ut Gallus potius ab istis sibi leges praescribi videat. Vale etc.

Groningae d. 26 Martii 1701.

CXXV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Dici non potest, quam Tua Antiparodia sim delectatus, quod omnia tam facile lepideque fluant atque etiam sint profutura. Remittam illuc, unde Parodia ipsa ad me venit. Interim multas Tibi gratias ago.

Epistola Dn. Fratris Tui edita ipsius missu per Dn. Menkenium tandem ad me venit, apud quem cum literis Tschirnhusianis oblivione quadam neglecta diu latuerat.

Dominus Tschirnhusius mihi scribit, esse sibi inventum, quod, meo judicio, foret perpulchrum: Data subtensa alicujus arcus curvae (excepto Circulo) dare subtensam alicujus arcus ejusdem curvae, ut differentia arcuum sit absolute (ut ipse loquitur) quadrabilis, hoc est, in rectam extendibilis, de quo specimen in Ellipsi sit daturus. Addit, se hoc posse nullo ad quadraturas respectu. Vereor ne aliqua verisimilitudine sit deceptus. Interim spero aliquid saltem utile pro eximio ingenio suo esse eruturum. Addit se etiam, hac sua ejusdem curvae arcus comparandi methodo invenire posse, quando possibile sit invenire arcus in data ratione.

Occasionem Dni. Fratris Tui Epistola mihi dabit aliquid mittendi ad Acta Eruditorum, quo tester Te solutiones mature ad me misisse. Cum non habeam aut certe non facile inveniam nonnullarum literarum mearum huc pertinentium copias, neque enim omnia, sed quaedam, quae ad materiae alicujus aut quaestionis tractationem pertinent, servo, ideo rogo, ut literarum mearum illo ipso tempore datarum, quibus Tuas solutiones acceperam, excerpta ad rem pertinentia (futura paucula) atque data ad me mittas, ut in re paulo emotiore melius memoriae consulam nec in circumstantiis aberrem.

Poteras, ni fallor, scriptum Tuum in manu Secretarii Regiae Academiae relinquere, neque enim communicaturi erant Te invito aut inconsulto. Dn. Fratrem Tuum suspicor aliud agere itinere suo; forte enim aliqua inventa proferet, quibus aliquod commodum sibi paret. Quicquid demum moliatur ille, non video quid possit incommodare Tibi, qui mature adeo promissis stetisti. Meum fateor testimonium est exigui ponderis, erit tamen promtum paratumque, ut par est. Etsi enim unius hominis non nisi semiplenam

probationem faciat attestatio apud judicem, paulo pluris tamen haberi potest inter amicos.

Nondum licuit epistolas meas anteriores expedire, unde celeberrimo Dno. Voldero adhuc responsum debeo; sed dici non potest, quam fuerim distractus his diebus per alia negotia, praesertim quum fuerint quae me cogerent crebrius solito ire in Aulam, et abstractae illae a materia meditationes animum in se collectum postulant. Spero tamen, me quam primum esse satisfacturum meo officio. An ipsi viro insigni sim satisfacturus, asseverare non ausim, saltem non statim id mihi promitto.

A multis annis cogitationem habui singularem de novo genere Arithmeticae, ubi omnia exprimantur per 0 et 1, adhibita scilicet progressione dyadica pro decadica. Hinc quum tam parum characteribus onerati sint numeri, omnia procedunt pulcherrimis progressionibus. In naturalibus prima columna habet periodicum 01, secunda 00 11, tertia 00 00 11 11, quarta 0000 0000 1111 1111 etc. Sed idem evenit in omnibus multiplis naturalium, ut tales oriantur periodi, imo in omnibus potentiis, quadratis, cubis etc. et harum potentiarum summis. Ubi illud est mirum et pulchrum, quod periodi in potentiis utcunque altis aut summis non sunt longiores, quam in ipsis numeris naturalibus. Hic jam id agitur ut quaerantur periodorum leges. In multiplis jam habeo; sed quaerendae adhuc sunt in potentiis et summis earum. Latet in hoc calculo ultimum Calculi refugium pro transcendentibus determinatis, quando aliter exprimi non possunt. Misi Parisios ad Dominum Secretarium Academiae, non ut edatur, sed ut aliquis, cui plus otii, excitetur ad hoc argumentum excolendum.

Si quando pulchrum munus Phosphori Tui pro favore Tuo singulari ad me destinabis, poterit occasione aliqua oblata (neque enim in mora nimis periculum est) mitti Bremam ad Dominum Doctorem Meierum, Pastorem et Theologum insignem Bremae. Quod superest, vale et fave etc.

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16

Dabam Hanoverae 5 Aprilis 1701.

CXXVI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Accipio hac ipsa hora literas Tuas cum chartis amici Tui uni fasciculo inclusas. Antequam hoc scriptum typis mandetur, necesse est ut prius totum perlegam: scire autem Te velim, finem deesse sive quod illum non miseris et forsan per proximum cursorem sis misurus, ne fasciculus unus nimis gravaretur, sive quod in itinere aliquid fuerit detractum; quo casu vel fato nescio; animadvertere enim potui involucrum fuisse reseratum et cerae gutta adjecta iterum conglutinatum. Quatuor accepi plagulas et dimidiam sibi mutuo succedentes, continentes scilicet typographi monitum et 26 articulos scripti ipsius et partem 27^{mi} usque ad haec verba: „Mais il est surprenant que vous ne vous étes point apperçû que ces craintes."

Heic vicissim Tibi mitto quod nuperrime ex Gallia accepi, excerptum Litis inter Varignonium et Rollium; rogo ut mihi remittas. Rescripsi Varignonio et suggessi quasdam meas animadversiones, quibus Rollium facilius convictum iri spero.

Quod Dn. Tschirnhausius jactat (jactantiam enim esse pro more suo, non dubito) se invenisse modum universalem assignandi in data curva ad datum arcum alium arcum, ita ut eorum differentia sit absolute rectificabilis, id ego in speciali casu hyperbolae communis (ut nosti) ut et postea in parabola cubicali prima $aax = y^3$ jam praestiti, quemadmodum in Actis extat. Dn. Tschirnhausius forsan iterum mea vitula arare voluit, sed verosimilitudine decipi et nubem pro Junone captare ipsi admodum est solemne; nihil omnium eorum quae hactenus promisit, praestare potuit, aut si quid dedit, non valde arduum erat nec alicujus momenti.

Gaudeo quod fratris mei epistolam typis editam ipse quoque acceperis, ut eam bono cum otio examinare queas. Si quid ad Acta ea de re concinnare voles, obstringes me valde, sed cito quaeso (sicuti et me Tibi promtum invenis) nec opus est ut circumstantiis parum ad rem facientibus, quae neque mihi omnes occurrunt, immoveris; id unicum peto, ut pro conscientia quod notum est secteris: ideoque nolim Tibi suggerere, ne gravis Tibi sim. Meministi utique quando acceperis meas methodos, nimirum

quam proxime ante tres annos, meministi quod illas examinaveris, meministi quod illas bonas deprehenderis: haec principaliora sunt, de quibus testimonium Tuum peterem. Si quae alia adjungere voles, pro prudentia Tua id facies; modo meas literas requirere et relegere lubeat, invenies materiam responsionis sufficientem, earum autem omnium descriptionem non habeo.

Quae de novo genere arithmeticae habes, nondum attente consideravi; huic non absimile olim Weigelius excogitavit, cujus meminit Sturmius in sua Mathesi enucleata, hoc tantum discrimine, quod loco progressionis Tuae dyadicae ille assumat tetradicam. Verum quidem est, quod hoc modo numeri onerati sint paucis characteribus, sed vice versa etiam multo frequentius repetitis. Cogitabo de hac re; interim non bene intelligo quid intelligas per periodos 01, 0011, 00001111, 0000000011111111 etc. columnae primae, secundae, tertiae, quartae etc. et quomodo hunc calculum transcendentibus applices.

Curabo ut quam primum antlia mea reparata fuerit, etiam pro Te phosphorus paretur; hactenus hisce rebus vacare non licuit.

Frater meus Parisios non ibit; fuit stratagema quo mihi terrorem incutere voluit, visurus num quid ego acturus essem, quo me proderem. Hermannus ille qui cum ipso iter iturus erat, in itinere est versus Belgium, etiam hac transiturus. Forsan secum afferet Responsionem suam ad Objectiones Nieuwentiitii. Vale etc.

Groningae d. 11 Aprilis 1701.

CXXVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si repetitis literis et Tibi importunus sum, Tua est culpa, id enim non sine aliquo taedio facio. Heri accepi simul postremas duas literulas, unas 8 Aprilis datas, alteras sine die et consule, quae continebant plagulam defectus illius libelli, quem nunc modo typographo tradidi, quamvis nondum omnia miseris. Accusas aliquam Tuam negligentiam, quod non statim totum transmiseris, interim nescio quid cogitare debeam, cum ne nunc quidem sit completum; deest enim finis Pacti matrimonialis, quod rogo ut

citissime suppleas, ne typothetae moram injicias ipse. Et mitte quaeso omnia quae mittenda habes, ut sumtibus superfluis et Tibi et mihi faciendis parcas. Multa sunt indicia, quae de hujus scripti vero Auctore suspicionem mihi movent, et facile auguror hanc partitam transmissionem studio fieri, ne forte integrum in alienas manus in itinere incideret. Sed gratum esset, si haec me non celares. Quamvis me hujusmodi rebus non libenter misceam, nihil tamen est quod non promte exequar etiam incommodo meo, si de desiderio Tuo explendo agitur. Nihil ego peto vicissim, quam ut Testimonium Tuum tam diu jam mihi promissum diutius differre ne velis, vides fratrem meum de innocentia mea triumphabundum suis libellis, quos contra me in lucem protrudit. Prout scribis, suae Epistolae alium titulum praefixit. Analysis problematis sub forma Disputationis Academicae (ut mihi Basilea scriptum est) edidit et contra aliquos studiosos matheseos ignaros publice defendit; ita facile ipsi fuit victoriam reportare, me per centum milliaria absente. Annon jam sub alio titulo illam protruserit, nondum mihi constat, nam nondum vidi. Audio quod eam Tibi juxta et Hospitalio, Newtono et Fatio quos vos omnes incomparabiles et mathematicorum Principes salutat, dedicaverit. Spero autem palpum hoc nihil Tuae aequitati derogaturum et nihil impediturum, quin ex animi sententia testimonium proferas, id quod impatienter expecto. Vale etc.

Groningae d. 19 Aprilis 1701.

P. S. Mitte quaeso citissime supplementum, nam urget typotheta, et verendum ne mutetur rerum status, quo casu publico non valde acceptus foret libellus.

CXXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nisi praejudicium a comparatione Tetractyos (cujus Auctor scopum diversum a meo diversissimasque hic cogitationes habebat) fecisset, ut dyadicam progressionem tantum obiter considerares, mirarer Te, tam acri ingenio Virum, non statim animadvertisse, quid mihi vellem periodis 01, 0011, 00001111 etc. quas

reperies convenire respective columnis primae, secundae, tertiae e c. numerorum naturali ordine dispositorum et dyadice expressorum. Sed illud palmarium est, quod periodi summarum et summi-summarum (in infinitum) a naturalibus vel aliis arithmeticis, et potentiarum quarumcunque altarum, et summarum vel summi-summarum utcunque altarum a quavis potentia, itidem habent periodos tales, et quidem non longiores, quam ipsi naturales. Exempli gratia, pro cubis prima columna etiam periodus non est nisi 2 notarum, in secunda nonnisi 4 notarum, in tertia nonnisi 8 notarum, et ita porro, ita ut reperta lege periodi tam facile sit Tabulam numerorum altissimae potentiae, vel summa altissimae ab altissima potentia condere, quam Tabulam numerorum naturalium. Unde vides, quanta consequantur. Sunt periodi tales etiam in aliis progressionibus, sed in decadica ob multitudinem notarum sunt intractabiles; in tetractica essent quidem tractabiliores, sed praeterquam quod Auctor Tetractyos de his non cogitavit, nec huc tetendit, incomparabiliter certe facilior est Calculus dyadicus, qui et alios miros dabit usus pro transcendentibus definitis, si quantitates hujusmodi dyadicae exprimantur. Molitus hoc sum ante multos annos, etiam antequam quicquam constaret de Tetracty illa nuper ressuscitata, sed semper otium speravi pro dignitate tractandi: nunc veritus ne haec cogitatio, ut multa alia, intercidat, misi eam Parisios ad Dominum Secretarium Regiae Academiae, quia ille mihi aliquando scripserat, si qua proponere vellem, quae utilia viderentur, cogitaturam Academiam de juvanda executione. Serenissimo Duci Rudolpho Augusto ante aliquot annos quum monstrarem, adeo placuerat haec, ut ipsi videbatur imago creationis seu originis omnium rerum ex nihilo per Deum, ut numerorum ex 1 et 0, ut etiam gemmae cuidam insculpi curaret 0 et 1, qua sigillatas literas mihi mittere solet. Periodorum leges hactenus non habeo, nisi pro numeris Arithmeticae progressionis velut naturalibus et eorum multiplis, sed vellem detegi eos etiam pro potentiis et summis earum. Videbimus an aliquis Parisiis qui hic sit praestiturus aliquid. Certe haec est numerorum optima Analysis, quippe in simplicissima Elementa 0 et 1; unde omnes magnitudines numeris exprimendae optime hac ratione exprimentur.

00000	0
00001	1
00010	2
00011	3
00100	4
00101	5
00110	6
00111	7
01000	8
01001	9
01010	10
01011	11
01100	12
01101	13
01110	14
01111	15
10000	16

Remitto quae scripsit Tibi Dnus. Varignonius, qui mihi perpulchre respondere videtur Dno. Rollio; quoniam tamen mihi ejus discussione accuratissime adjuto facile fuit in objectiones penetrare, venere quaedam in mentem ad rem illustrandam, quae Tibi mitto, ipsi (sed si probas ea) communicanda, cum multa a me salute*).

. . . .

Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 29 Aprilis 1701.

Beilage.

M. Rolle avoit fait des objections contre le calcul des differences, M. Varignon m'a fait communiquer ses responses, ou j'ay annoté ce qui suit Avril 1701.

Voyant que les objections qu'on a faites à M. de Varignon, ne demandent pas une grande attention apres la peine que M. de Varignon a prise de les si bien resoudre, je me suis laissé aller à les considerer et à adjouter quelques petites remarques.

Il est étonnant qu'une personne qui paroist versée dans la Geometrie et dans l'Analyse, reprend une methode, qu'elle n'a pas assez penetrée, comme il est aisé de voir par les objections mêmes. Car quant à t'objection premiere prise de l'equation $a \boxed{3} (y-b) = \boxed{2} (xx - 2ax + aa - bb)$ pour trouver la plus grande (ou la plus petite) ordonnée, on objecte que le calcul des differences qui fait $dy = 4dx(x-a) : 3\sqrt{}(a \boxed{2} (x-a) - bb)$ mettant $dy = 0$, ne donne qu'une seule valeur de la grandeur x qui convient à y qu'on cherche, sçavoir $x = a$, au lieu que le calcul de M. Hudde donne $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 - bbx + abb = 0$, dont les racines sont $x - a$, $x - a + b$ et $x - a - b$. Ainsi il croit que chacune donne un cas de la plus grande x. Mais cela ne suit point de cette equation, qui est resolue lorsqu'une seule racine satisfait, comme fait $x - a = 0$. Car en divisant l'equation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 - bbx + abb = 0$ par la formule $xx - 2ax + aa - bb$ (qui n'a point besoin d'estre egale à rien, pour estre un diviseur) il provient $x - a = 0$. Il est vray que les deux autres racines sont justement celles qui viennent quand on cherche x la plus grande ou la plus petite, ou pour le dire en un mot, la monadique ou les „geminatae" se reduisent en une.

*) Siehe die Beilage.

Mais c'est par accident par ce que lorsque $dx = 0$, il vient $y - b = 0$ ce qui fait $xx - 2ax + aa - bb = 0$, car si l'equation avoit esté $a\boxed{3}(y - b) = \boxed{2}(xx - 2ax + aa - bb) + b^4$, on trouvera selon la methode de Mons. Hudde que cette equation formée expressement

$$\begin{array}{l} x^4 - 4ax^3 + 2aaxx - 4a^3x + a^4 \\ \qquad\qquad\quad - 2bbxx + 4abbx - 2aabb \\ \qquad\qquad\quad + 4aaxx \qquad\qquad + 2b^4 \end{array}$$

et multipliée par 4, 3, 2, 1, 0, donne la même equation

$$\begin{array}{l} x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0 \\ \qquad - bbx + abb \end{array}$$

et cependant au cas de $dx = 0$ les deux racines $x - a + b$ et $x - a - b$ ne servent point et par consequent l'equation faite par leur multiplication, sçavoir $xx - 2ax + aa - bb$, sert point non plus. Car dans ce cas il y a aussi $y - b = 0$, mais cela donne icy non pas $xx - 2ax + aa - bb = 0$, c'est à dire $x - a = 0$ ou $x - a - b\sqrt{2} = 0$. Cependant revenant à la premiere courbe dont il s'agit et dont l'equation est $a\boxed{3}(y - b) = \boxed{2}(xx - 2ax + xx - bb)$ ou bien faisant $x - a = z$ et $y - b = v$, $av^3 = \boxed{2}(zz - bb)$ ou $v\sqrt[3]{a} = \boxed{\tfrac{2}{3}}(zz - bb)$ et $dv = 4zdz : 3\sqrt[3]{azz - abb}$, on peut satisfaire à dv (ou dy) $= 0$, non seulement en faisant $z = 0$ (ou $x = a$), mais encor dans nostre cas, en faisant $dz = 0$, comme en effect cela se peut prendre ainsi dans nostre courbe (fig. 146) ou DP sont *minimae*, comme $(D)(P)$ *maxima*, puisqu'il se trouve que les y, qui sont designées par DP, DP, sont les plus petites quand $dz = 0$, et $(D)(P)$ est la plus grande quand z est 0; car des racines d'une equation on employe celles qui servent, et icy des deux racines de l'equation $zdz = 0$, sçavoir de z ou dz, l'une et l'autre sert, et en quelque sens il est vray que la droite parallele à l'axe AP, qui passe par D, touche la courbe. Aussi peut on concevoir la sinuosité de la recourbure (qui enferme une touchante parallele à l'axe) reduite au cas ou elle evanuoit. Mais dans les methodes qui en cherchant y la plus grande ou la plus petite, suppriment dx ou dz comme celle ou on multiplie l'equation selon x par des nombres de progression arithmetique, il y a cette imperfection que le cas de $dz = 0$ est supprimé aussi. Car j'ay dit deja que c'est par accident qu'il vient icy.

La seconde objection n'est qu'une meprise, et **la troisieme** n'est pas une objection, car ce qu'on prend pour un **inconvenient**

n'en est point et quoyque la grandeur x reelle ne monstre point d'impossibilité, il faut considerer que le calcul n'est pas encor fini et que pour s'en servir, il faut la substituer dans l'equation locale de la courbe. Quant à l'equation $y = 2 + \sqrt{4 + 2x} + \sqrt{4x}$, elle est doublement ambigue, car les racines quarrées sont toujours ambigues et on peut dire ainsi qu'il y a 4 courbes differentes de position, selon qu'on varie les signes sans qu'il soit necessaire de dire à mon avis, qu'elles composent de differens rameaux d'une meme courbe. De l'equation ad maximam aut minimam selon laquelle on trouve icy $y = \sqrt{(\frac{3}{2}x - \frac{4}{3})}$ resulte $\sqrt{4 + 2x} + \sqrt{4x} = \sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}}$, la quelle se trouve impossible. Mais quand on cherche $dx = 0$, on trouve $4\sqrt{x}, \sqrt{2 + x} = 0$, c'est à dire $x = 0$, car $x = -2$ qu'on pourroit tacher d'en tirer, aussi se trouve exclue, car x negative donne l'impossible. Ainsi il est manifeste que le seul cas qui sert, est $x = 0$, se qui s'accorde avec la figure que M. Varignon a tracée.

CXXIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Praelum evasit libellus; mitto ecce duo exemplaria, plura missurus si desideras: impressa sunt 500, quorum 400 mittuntur in Hollandiam et bona pars ibit in Angliam, reliqua hic distribuentur. Correcturam ipse suscepi et a vitiis typographicis castigavi quantum potui; remanserunt tamen nonnulla, non tam mea quam typographi culpa. Nuper simile scriptum mihi incidit in manus ex Anglico in Belgicum versum; reperi in eo dictum quicquid dici potuit in hac materia, sed displicuit mihi, quod nonnihil liberius quam rerum status postulat adversus Papam ratiocinetur Auctor.

Notas Tuas in objectiones Rollii nondum dimisi; videntur enim aliquantulum a scopo aberrare, quod nimiae Tuae festinationi adscribo. Ideo e re Tua esse putavi, si mentem meam de iis Tibi prius aperirem, quam mitterem: eoque magis, quod jam antea etiam meas notas Varignonio transmiseram, quibus nunc Tuae aliquo modo adversari videntur; id quod Rollio novam cavillandi ansam praeberet, si utrasque visurus esset.

Quantum ad aequationem $a\,\boxed{3}\,(y-b)=\boxed{2}\,(xx-2ax+aa-bb)$, cujus maxima vel minima ordinata y invenienda sit, calculus differentialis dat unicum valorem ipsius x, nempe $x-a=0$; sed Methodus Huddeniana dat, pro x, hanc aequationem $x^3-3axx+3aax-a^3-bbx+abb=0$, cujus radices sunt $x-a$, $x-a+b$, et $x-a-b$. Jam recte dicis (quod et ego dixeram) non sequi ideo omnes tres dare casum maximi, id est talis maximi quod respondeat tangenti parallelae axi; nam sufficit, ut una radix sit aequalis nihilo, quae jam aequationem resolvet. Quando vero addis ex accidenti tantum esse, quod reliquae duae radices sint praecise illae, quae inveniuntur pro determinandis punctis reversionis (points de rebroussement) nempe $xx-2ax+aa-bb=0$, quod provenit faciendo $dx=0$: ut pace Tua dixerim, dico id non fieri ex accidenti, sed necessarium esse: fluit id enim ex essentia et indole Methodi Huddenianae, ut nimirum, per eam quaerendo maximum vel minimum, semper proveniat aequatio quae simul complectetur et determinationem maximi vel minimi et determinationem puncti reversionis, imo et determinationem puncti decussationis (quod voco, in quo curva se ipsam secat, ut Lemniscata, vel etiam cujus rami non continui se mutuo secant, ut ultima Rollii curva a Varignonio delineata $y=2+\sqrt{(4+2x)}+\sqrt{4x}$). Haec tria puncta, si dentur in curva quadam proposita, nunquam non simul determinabuntur per unam solam aequationem, si methodus Huddenii adhibeatur. Cujus rei rationem facile perspicies, modo attendere velis ad naturam hujus Methodi: ea enim pro maximis et minimis non est specifica, neque pro iis determinandis inservit, nisi quatenus involvunt concursum duarum radicum, pro quo illa Methodus proprie est accommodata. Jam vero potest fieri concursus radicum, ubi non statim est maximum vel minimum ad tangentem parallelam: nam talis concursus fit etiam in punctis reversionis et decussationis: adeo ut Methodus Huddeniana proprie non maximorum et minimorum, sed potius concursuum radicum sit nominauda. Quemadmodum hic vides triplicem casum, quo talis concursus fieri possit, concurrentibus AP, AP in fig. 147. fit A(P) quae determinat (P)(D) maximum vel minimum proprie sic dictum ad tangentem parallelam axi; in fig. 148. fit A(P) determinans punctum reversionis (D) et in fig. 149. fit A(P) determinans punctum decussationis (D). Vides igitur quod si quaedam curva proposita gaudeat punctis duorum, vel omnium trium casuum,

Methodus Huddeniana illa omnia una aequatione determinare debeat, idque necessario, non ex accidente. Atque hoc est, propter quod Varignonio scripseram, hanc Methodum magno defectu laborare, cum per eam non certi simus quid invenimus, et facile punctum reversionis vel decussationis pro puncto maximae vel minimae distantiae sumere possimus (quemadmodum reapse Rollio accidit, qui punctum decussationis in curva $y = 2 + \sqrt{(4 + 2x)} + \sqrt{4x}$ sumpsit pro puncto maximae distantiae) Calculo interim differentiali omnia haec puncta distinctim et separatim exhibente. Quod vero tandem spectat ad Tuam exceptionem $a^{[3]}(y - b) = {}^{[2]}(xx - 2ax + aa - bb) - b^4$, per quam putas Te posse ostendere ex accidente tantum fuisse factum, ut in curva priore duae radices (praeter tertiam illam utilem) forte fortuna determinarent puncta reversionis; id Te fefellit, quod hujus alterius Tuae curvae veram figuram non conceperis, eam procul dubio priori fig. 146 similem imaginando, loco quod toto coelo ab eo differat, adeoque quod sumseris pro punctis reversionis, quae talia non sunt. Nam debita ejus figura est, ut eam hic fig. 150. delineatam vides:

$$AP = x$$
$$PD = y$$
$$A(P) = a$$
$$(P)P = (P)(D) = \pi\Delta = b$$
$$(P)\pi = b\sqrt{2}$$
$$PD = b - \sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$$

Ubi nunc unicum est punctum reversionis (D) et duo puncta minimae distantiae D, D, et quidem in iisdem illis locis, in quibus in priori curva fuerant, permutata tantum natura punctorum: non igitur est accidentale, quod per Methodum Huddenianam eadem quoque proveniat aquatio, quae prius $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 - bbx + abb = 0$: nec duae radices $x - a + b$ et $x - a - b$ sunt inutiles, quemadmodum putas; designant enim puncta D, D minimarum ab axe distantiarum: sumsisti autem puncta Δ, Δ pro punctis reversionis, cum tamen nihil aliud sint, quam puncta maximae i n c l i n a t i o n i s, id est in quibus tangens coincidit cum applicata $\Delta\pi$, et revera faciendo $dx = 0$, invenitur non tantum $x - a = 0$ pro A(P), sed et $x - a - b\sqrt{2}$ vel $x - a + b\sqrt{2}$ pro $A\pi$, imo habetur quoque $x =$ infinito, sit ut curva haec quinque debeat habere puncta maximae i n c l i n a t i o n i s, duo in Δ, Δ,

duo in infinito, et unum in (D), quod quidem simul etiam est reversionis: sequitur hinc diversas in ea esse convexitates, quarum flexus contrarii sunt in $\varDelta$, $\varDelta$, extra quas duo adhuc alii sunt, qui reperiuntur faciendo $x = a \pm b\sqrt{(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{33}{4}})}$. Mirum itaque non est, quod puncta $\varDelta$, $\varDelta$ per Methodum Huddenianam non inveniantur, siquidem non involvunt concursum aliquem duarum radicum aequalium. Caeterum putarem ego omnes illas quatuor curvas expressas per $y = 2 + \sqrt{(4 + 2x)} + \sqrt{4x}$, propter ipsam signorum ambiguitatem debere haberi pro una curva, licet rami illius sibi mutuo non sunt continui: nam si aequationis irrationalitas tollatur, quatuor istae curvae sub una aequatione rationali comprehenduntur, quae ideo etiam pro una tantum curva haberi debent, non secus ac duae hyperbolae oppositae pro una curva habentur, utpote una aequatione expressae $xx - aa = yy$. Hoc si ita concipiamus, vides utique facile rationem, cur Rollius putaverit curvam illam $y = 2 + \sqrt{}$ etc. habere punctum maximae distantiae vel reversionis: nam methodus Huddeniana ipsi dedit punctum decussationis, in quo duo rami sese secant, quod sumsit perperam pro puncto maximae distantiae vel reversionis: jam vero si 4 istae curvae reputandae essent pro diversis, nullum reperiretur punctum decussationis.

Haec Tibi consideranda submitto; quod si tamen me ipsum errasse animadverteris, libenter corrigar; faxis ut id cito sciam: mittam enim tunc sine mora Parisios animadversiones Tuas.

Nunc demum intelligo periodos numerorum Tuorum dyadicorum, initio non satis mihi festinanti consideratas. Earum quidem leges pro numeris arithmeticae progressionis et eorum multiplis, vel ex ipsa oculari inspectione oppido patent; sed dubito an pro potentiis et summis eorum detegi possint; videntur enim valde abstrusae. Observavi numeros decadicos seu ordinarios posse distribui in potentias binarii, unitates, et cyphras quae secundum columnas dispositae iisdem omnino periodis gaudent.

0	0
1	1
2	$2^1 + 0$
3	$2^1 + 1$
4	$2^2 + 0 + 0$
5	$2^2 + 0 + 1$
6	$2^2 + 2^1 + 0$

7 $2^2 + 2^1 + 1$
8 $2^3 + 0 + 0 + 0$
9 $2^3 + 0 + 0 + 1$
10 $2^3 + 0 + 2^1 + 0$
11 $2^3 + 0 + 2^1 + 1$
12 $2^3 + 2^2 + 0 + 0$
13 $2^3 + 2^2 + 0 + 1$
14 $2^3 + 2^2 + 2^1 + 0$
15 $2^3 + 2^2 + 2^1 + 1$
16 $2^4 + 0 + 0 + 0 + 0$

Forsan hinc eadem etiam quae ex dyadicis utilitas emergeret: nam si periodorum leges innotescerent, vides utique facillimum foret Tabulam condere numerorum altissimae potentiae vel summae altissimae etc. Porro vides hinc facile esse numerum decadicum seu ordinarium, quantumvis magnum, exprimere dyadice, et vicissim. Sit ex. gr. numerus anni 1701 dyadice exprimendus, sumatur potentia binarii, quae numero proposito proxime accedat, et alia quae residuo, et tertia quae residui residuo proxime accedat, et ita porro, donec totus numerus exhauriatur; atque sic reperietur $1701 = 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^2 + 1$, quod si igitur loco 2^2, 2^5 etc. ponatur 100, 100000 etc. habebitur expressio dyadica **11010100101 = 1701.** Vice versa haud difficilius datus numerus dyadicus in decadicum convertitur.

Convenit me nuper in itinere suo Dn. Hermanus, et attulit mihi Responsionem suam ad Considerationes secundas Nieuwentiitii, ut et Fratris mei analysin Isoperimetrorum. Expectabam certe aliquid singulare et artificium quoddam inauditum et mysterii plenum, prae quo mea analysis non auderet aspicere lucem, ut enim verum fateor, nihil magis timebam, quam ne forte Frater meus extraordinarium et tam facilem solvendi modum haberet, ut meus, quamvis legitimus, sed tamen nonnihil prolixus (ut mihi videbatur) ne quidem in comparationem cum eo venire dignus esset: at vero eo nunc viso, non modo praeconcepta opinio cessat, sed et placere mihi incipit mea analysis, quam nonnisi mediocriter aestimabam. Vix credideris, quam operosa et obscura, quam intricata et prolixa sint omnia in calculo fraterno, ita ut singula examinare patientiae opus esset haud exiguum. Meministi, quam perplexus fuerit calculus Fatianus pro solido minimae resistentiae; meministi, quanta facilitate

illud problema expedierim: scias autem tantam differentiam ibi non fuisse, quantam nunc deprehendes, si fratris mei analysin cum mea conferre placuerit. Sed quod palmarium est, credit meus frater idque magna confidentia asseverat, problema isoperimetrorum citra differentiales tertii gradus solvi non posse propter considerationem (ut putat necessariam) trium particularum curvae inter se relatarum, loco quod per meam methodum, quae duarum tantum curvae particularum in ellipticula (si meministi) terminatarum considerationem requirit, statim etiam et immediate ad secundi tantum gradus differentialium aequationem pervenio. Non minus igitur frater in bonae methodi leges peccasse censendus est, quia per tertias differentias solvit (si solvit) quod per secundas statim solvi potest, quam peccavit Fatio, qui solvit brachystochronam per secundas, cum tamen solubilis sit per primas. Quod superest, non dubito quin frater suam analysin propediem in Actis fit publicaturus, sed meam cogor adhucdum supprimere, donec frater se arbitris submissurum spoponderit iuque eorum manus praemium promissum deposuerit. Ne interim Lectores de hac retardatione aliquid sinistri concipiant, neve omnino arbitrentur me victum ex palaestra decessisse, me obstringes valde, si in Tuo testimonio hujus morae causam indicaveris, vel saltem (si Tuis verbis id facere nolis) si mearum harum literarum excerpta ad Acta miseris, partim ut omnis suspicionis ansa Lectori tollatur, partim ut Frater sui officii debitique moneatur. Vale etc.

Groningae 7 Maji 1701.

CXXX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Fecisti pro prudentia Tua, quod extemporaneas notationes meas ad Rollii considerationes Tecum retinuisti, facile enim fieri potest, ut lapsus sit admissus. Interim nondum satis video, qua necessitate oporteat aequationem Calculo Huddeniano vel simili inventam continere maximo-minimam non tantum ordinatam, sed et coordinatam. Ecce enim in rationalibus. Sit $y = x^3 + 11xx + 12x + 13, :, xx + 21x + 22$, constat nostra methodo fieri $dy : dx = (x^3 +$

$11xx + 12x + 13)\ (2x+21) - (xx+21x+22)\ (3xx + 2\,.\,11x + 12) : \boxed{2}\,(xx+21\,x+22)$, et pro $dy = 0$ prodire numeratorem nihilo aequalem, at pro $dx = 0$ denominatorem; et prius quidem ita facile apparet, sive Huddeniano sive differentiali calculo rem instituas. Nam Huddeniano more erit aequatio $x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = yxx + 21yx + 22y$, ponendo y esse maximo-minimam. Ita jam multiplicando per numeros progressionis Arithmeticae 3, 2, 1, 0, fiet $y = 3xx + 2\,.\,11x + 12, :, 2x+21$, quem valorem aequando priori, habebitur his ambagibus aequatio eadem, quam statim dabat noster numerator factus nihilo aequalis. At vero vides non esse necesse, ut in fractione valorem ipsius $dy : dx$ explicante, numerator et denominator habeant communem divisorem, quod necesse esset, si oporteret radices aequationis $xx + 21x + 22 = 0$ (quae valet pro $dx = 0$) esse in radicibus aequationis Huddenianae, quae est pro $dy = 0$; alioqui necesse esset $2x + 21$ vel $x^3 + 11xx + 12x + 13$ habere communem divisorem cum $xx + 21x + 22$. Haec ut per otium consideres, peto.

Difficultas pro legibus periodorum inveniendis in decadicis incomparabiliter major est, quam in dyadicis, cum illic sunt decem notae tractandae, hic tantum duae. Et periodi in columna prima, secunda, tertia, quarta etc. sunt in dyadicis locorum 2, 4, 8, 16 etc. in decadicis locorum 10, 100, 1000, 10000; unde etiam hic periodos nemo consideravit, inductioque aeque ac ratiocinatio immensa varietate obruuntur.

. . . .

Cogitabam hac vice scribere ad Dn. Volderum nostrum; sed iterum veniunt impedimenta ex transverso, itaque rogo ut moram adhuc excuses et viri egregii benevolentiam mihi serves. Interea vale et fave etc.

Dabam Guelfebyti 16 Maji 1701.

CXXXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Video Te non satis percepisse mentem meam, cum notatiunculas quasdam super notationes Tuas facerem, quod quidem mirarer, Te virum tam perspicacem earum vim non statim perspe-

xisse, nisi compertem haberem, Te non semper magna attentione animi legere, quae levia putas. Non dixi, aequationem Calculo Huddeniano inventam continere debere maximo-minimam non tantum ordinatam, sed et coordinatam; sed e contrario dixi, methodum Huddenianam plane non esse methodum maximo-minimi, nisi indirecte tantum, quatenus scilicet maximo-minimum involvit concursum duarum radicum. Nam si placet ad genesin hujus methodi attendere (prout illa habetur in Geometria Cartesiana a Schootenio edita) videbis eam consistere in inventione concursus radicum. Possunt autem, quemadmodum in postremis meis ostendi, quas peto ut attente relegas, radices concurrere quae non statim maximo-minimum designent ad tangentem parallelam axi, sed etiam quae designant punctum reversionis, imo etiam punctum decussationis; ne igitur confundas, dico aequationem calculo Huddeniano inventam necessario continere debere praeter maximo-minimam ordinatam, etiam eas ordinatas, quae transeunt per puncta reversionis et decussationis. Jam si punctum reversionis vel decussationis tale sit, ut in eo curva habeat inclinationem perpendicularem ad axem, id est, ut sit maximo-minima coordinata, qualis erat Rolliana, dico tunc calculum Huddenianum necessario utramque maximo-minimam et ordinatam et coordinatam exhibere, adeoque necesse esse ut in fractione d y : d x explicante, numerator et denominator habeant communem divisorem. Secus vero erit si in puncto reversionis vel decussationis curva non inclinat perpendiculariter ad axem, vel si punctum, in quo curva perpendiculariter ad axem inclinat, non est punctum reversionis vel decussationis, sane minime necesse est neque etiam id dixi, in fractione dy : dx numeratorem et denominatorem debere habere communem divisorem, nam calculus Huddenianus tunc non dabit maximo-minimam coordinatam, quia non fit per concursum radicum. Atque hoc est, quod in posterioribus meis literis intendebam, scilicet in curvis quas Rollius Dn. Varignonio proposuit, non ex accidenti factum fuisse, ut per calculum Huddenianum punctum reversionis et decussationis in aequatione determinaretur, interim non quatenus erat ad minimam coordinatam, sed quatenus erat in concursu duarum radicum. Haec denuo attente consideres quaeso.

Pro insigni testimonio *) quod mihi perhibes, gratias ago. Tri

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben.

buis mihi quaedam ultra meritum: quantum autem dicis, Te meas methodos non ea attentione animi legisse, qua opus esset ad controversiam nostram dijudicandam, vereor ne frater id accipiat pro retractatione quadam, quasi initio tantum meas methodos probaveris propter apparentem speciem, nunc vero re attentius examinata eas improbes. Optassem, haec omissa mansissent, nosti enim quam suspicax sit frater meus. Optassem etiam ut rationem addidisses (ut in postremis meis rogavi) cur analysin meam nondum publicare velim, donec scilicet frater se arbitris subjicere promittat et praemium promissum deponat. Miror Te dicentem, nos ambos in causa non gravi imperare affectibus non potuisse, cum tamen scias, id de solo fratre meo dici posse, non de me qui multoties lacessitus silui diu.

Mitto heic rursus bina exemplaria libelli, quem nosti; habeo adhuc nonnulla, quae partitis vicibus Tibi transmittam, si ita visum fuerit. Vale etc.

Groningae d. 31 Maji 1701.

Beilage.

Misit mihi Dn. Jacobus Bernoullius, Basileensis Professor, Epistolam suam ad Fratrem, Dn. Johannem Bernoullium, Professorem Groninganum, qua sane non obscure mihi necessitatem aliquam interloquendi imponere voluisse videtur. Ego ambos in tantum aestimo, in quantum aestimari profundissimum in Mathematicis ingenium potest. Debeo utrique plurimum, sed Respublica magis, quod eorum potissimum tum occasionibus, tum inventis, sparsa semina Methodi meae tantum bonae frugis dedere. Itaque ambos mihi peramicos habeo voloque, et licet crebrius mihi cum juniore literarum commercium sit, plusque adeo ille ea ratione me juverit, non ideo vel ille postulat, vel ego praestarem, ut cum de veritate et justitia agitur, detrimento earum videar alterutri vel minimum favisse. Neque ego judicis personam aut in me recepi unquam, aut recipiam solus. Interea dissimulare diutius nec possum, nec debeo, Dn. Johannem Bernoullium maturrime, ut ipse publice significavit, ad me misisse solutiones fraternorum problematum, atque etiam analysin ipsam eamque duplicem, directam et indirectam. Legi tunc statim et probavi, non tam legi ea attentione animi, qua opus esset ad controversiam inter duos egregios viros dijudicandam, quod addo, ne quis me ideo judicis personam sumere

putet. Addam in fidem excerpta verba ex literis tunc a me Groningam datis; nempe 26 Maji 1697 ita Groningam scripseram: „Mitto, quae in Actis Maji de Curva Brachystochrona variorum solutiones editae sunt. Volui ut statim acciperes, quia Dn. Frater Tuus Tibi potissimum nova problemata proponit, termino et praemio statuto"; et 15 Jun.: „Primo cursore Tuas Dn. Menkenio misi, ut mature publicetur, Te solutiones fraternorum problematum brevissimo tempore dedisse"; et 29 Jul.: „Magna cum voluptate vidi methodum maximi ..... pulchre a Te in rem praesentem isoperimetrorum usurpatam." Haec olim scripta repeto, ne nunc videar aliquid alterutri dare. Analysis nuperrime edita Basileae (ut ex Catalogo Francofurtano didici) nondum ad me pervenit. De caetero valde opto atque etiam rogo, ut nobile par fratrum aemulationem interioribus matheseos studiis quantumvis utilem ita moderetur, ne sequius homines judicent de scientiis, si videant ingenio tanto tamque profundo viros et quod caput est, fratres in causa non gravi imperare affectibus non potuisse.

CXXXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Reversus Hannoveram inveni literas 31 Maji ad me datas. Facile credo de Calculo Huddeniano Te recte judicare: mihi ea qua par est attentione priora relegere non licet. Inveni redux 26 literas, quibus respondendum est, ultra eas quas Guelfebyti et Cellis recepi, non multo pauciores. His adde agenda atque elaboranda diversissimi generis, et judica, quantum mihi temporis ad meditationes analyticas sit relictum.

Facile intelliges re considerata, non potuisse me aequius scribere de lite vestra, quam feci. Dixi, quod res est, me solutionem Tuam et tempestive recepisse et probasse; non potui tamen non adjicere quod etiam verum est, non me adhibuisse eam attentionem, quae judici fuisset imposita, ne scilicet Dn. Frater Tuus me judicem hac declaratione agere velle dicat. Retractationem nullis fidiculis inde exsculpet. Quod si faciet, habebit me publice contradicentem. Non dico etiam vos in causa non gravi affectibus

imperare non potuisse, sed hoc tantum, vos curaturos pro prudentia vestra, ne quis hoc vobis imputare possit. Quod monitum profecto necessarium erat, ne litem inter fratres (quae quantum displiceat omnibus, dici satis nequit) fovere velle viderer. Certe Dn. Menkenius omnem pene mentionem ejus horret. Sic etiam Dn. Marchio Hospitalius nuper post multam intermissionem datis ad me literis eadem animi sensa ostendit. Declarationem Tuam, quod nolis publicare Analysin Tuam, donec Dn. Frater se arbitris subjiciat et praemium deponat, a me proferri profecto indecens erat, quia non necessarium. Quidni enim hoc rectius facias ipse? Quae ipsi commode non possumus, merito imponimus amicis. Quod si aliquid ultra debitum fecissem et egissem, ut sic dicam, procuratorem Tuum, profecto personam mutavissem, et ridicule pro Te ad epistolam Tibi a fratre missam respondissem.

In Societate Regia Prutenica magno applausu receptum est pulcherrimum phosphori Tui inventum, et mihi id negotii datum, ut Tibi gratias agam nomine Societatis, honorificentissimaque de Te ejus sensu exponam. Optaremus Te nobis viciniorem, sed nulla nobis hactenus occurrit ratio, ea emolumenta, quae habes, non dicam aequandi, sed utcunque ex intervallo assequendi.

In fasciculo ex Nundinis Lipsiensibus allato, tandem etiam reperi redux Analysin Domini fratris Tui et video etiam ad tertias usque differentias ab eo iri, nulla, ut mihi videtur, necessitate. Dnus. Marchio Hospitalius scribit, sese etiam accepisse eandem analysin, et avide percurrisse directamque et bonam reperisse. Mihi tamen Tua olim melior visa est: potest aliquid bonum esse, etsi optimum non sit. Vale etc.

Dabam Hanoverae 24 Junii 1701.

CXXXIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quatuor misi exemplaria libelli gallici ad Legatos Imperiales, bina videlicet ad singulos, prout in penultimis desiderasti. Supersunt mihi adhuc 5 vel 6, quae pro jussu Tuo parata habes.

Facile crediderim, non sat otii Tibi suppetere pro examinandis, quae dixi de calculo Huddeniano: videbis interim, Dn. Varignonium non mihi tantum assentiri, sed et ante acceptas meas idem circa eam rem observasse, quod saltem apud Te pro aequitate Tua loco argumenti valebit, me non cespitare. Mitto, ut soleo, quae novissime accepi Varignoniana, mihi si placet remittenda. Varignonius in sua tertia difficultate festinans nimirum fallitur in eo, quod potentias ipsius x per arithmeticam progressionem multiplicat, loco quod id fieri debeat cum potentiis ipsius y, non attendens quod pro applicatis haberi debeant eae, quarum maxima minimave quaeritur. Ad haec et reliqua Varignonius jam respondi et quaedam nova ad confutandum Rollium suggessi.

Si methodos meas pro isoperimetris nondum legisti omni qua par est attentione, optarem ut eas attentissime relegeres, horula si qua Tibi vacat ad id negotii impensa; horam enim, non plus, requirunt, sed fratris, mensem fere. Non petebam, ut Declarationem meam, quod nolim publicare analysin meam, donec frater meus se arbitris subjiciat et praemium promissum deponat, Tuis verbis conceptam ad Acta mitteres, sed tantum ut ipsa mea verba excerpta ex literis meis communicares; id sane minime Tibi imposuissem, si ipse ego commode praestare potuissem, sed nosti utique Dn. Menckenium nihil hac de re amplius velle imprimere, quod vel a fratre meo vel a me immediate mittatur. Nescio itaque, qua ratione id foret agere procuratorem meum, vel pro me ad epistolam mihi a fratre missam respondere, si nihil aliud quam mea publicare fecisses: sed nolim Tibi molestus esse.

Quod in Societate Prutenica (quam florere incipere gaudeo, credebam enim, quod nihil de ea vel viderem vel audirem, jam ante instantem calamitatem temporis iterum esse extinctam) cum aliquo applausu sit receptum phosphori mei inventum, laetus intellexi. In Academia Parisina iterata sunt mea experimenta, sed non cum optato successu, id quod ego miror. Dn. Varignonius ad me misit scriptum Dni. Hombergii, qui id negotii in mandatis habuit, sed facile ex eo colligo, non omnem quam debuit adhibuisse cautelam, immo nec ejus machinam pneumaticam accuratam satis esse. Rescripsi longam epistolam et respondi ad objectiones, communicando simul novas quasdam observationes et artificia nova, quibus phosphori constructionem mirum in modum facilitavi, ipsumque perfectiorem clarioremque reddidi. Mirum esse dixi, Dn. Homber-

gium adeo infelicem esse, ut nullo hactenus mercurio assecutus fuerit scopum desideratum; me vero felicem adeo, ut inter 5 vel 6 mercurios diversis locis et tempore mihi allatos nullus fuerit, qui me frustraverit: ideo me dubitare, annon gratulandi mihi potius quam dolendi causam habeam, dum me solum videam phosphori inventorem non tantum, sed et artificem solum. Rogavi praeterea Academiam, ut mihi transmittat eundem illum mercurium, quo Hombergius infeliciter usus, spe freto, rem cum eo non minus quam cum aliis mihi successuram ob meam sive dexteritatem (si quam habeo) sive antliae meae pneumaticae miram exactitudinem, me postea phosphorum ex mercurio Hombergiano factum ad Academiam cum authenticis testimoniis remissurum, ut ita appareat, non mercurii, sed Hombergii culpa, lucem illius fuisse eclipsatam. Habeo nunc in parato aliquot phosphoros, Tibi unum destinavi qui missu facilis est; non enim cum toto apparatu excedit trium unciarum pondus; mittam eum si volupe est Tibi per cursorem publicum, commodior occasio non datur.

Quod Societas Prutenica honorifice de me sentiat, est de quo mihi gratuler, inprimis vero quod illa et Tu me viciniorem optetis. Vestro utique desiderio facile morem geram, si quondam ratio occurrit meam conditionem non dicam ampliandi, sed tantum aequandi, adeo Tibi et amicis sum deditus. Interim vale et fave etc.

Groningae d. 9 Julii 1701.

CXXXIV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Analysin Dni. Fratris Tui, quam peculiari scripto comprehensam acceperam, nuper etiam reperi in Eruditorum Actis. Dn. Reyherus et Dn. Tidius, Auctores novi cycli sane peringeniosi, qui Tibi etiam si bene memini visus est, sollicitant, ut a corpore Evangelico recipiatur, asseverantque per plurima secula nullum discrimen repertum oriri notabile inter cyclum et veritatem Astronomicam: sed suadent, ut mutetur intercalatio in aliam paulo per-

plexiorem, quod obtinere difficile erit. Vellem tamen, ut fuissent audita eorum consilia ante Decretum, sed Ratisbonae item est paulo festinantius, quam rei difficultas postulabat, non nisi tribus mathematicis consultis. Ego Tuam et Dni. Volderi sententiam de Reyherianis consiliis intelligere optarem. Inclusas ad Dn. de Volder literas rogo ut transmittas et pro me intercedas, quo facilius veniam morae impetrem, quam mihi promitterem certius, si satis praesumerem de considerationibus, quas affero ad naturam substantiae melius intelligendam. Sub finem aliqua ab eo quaero de Novellis rerum mathematicarum vestrae orae, in quibus et similibus etiam a Te instrui gratissimum erit. Nihilne amplius auditur de Nieuwentitio? Quid facit Hermannus vestras?

His scriptis, Tuas accepi cum Varignonianis, quas remitto cum gratiarum actione. Recte notasti festinantem sumsisse x pro y: quaeritur enim recta ipsis y parallela, quae curvam tangat; itaque multiplicatio per numeros progressionis Arithmeticae facienda erat secundum y. Nescio an Rollii intentio sit, eandem aequationem more Huddeniano inventam simul dare maximo-minimam tam x quam y: si hoc vult, errat. Nam si esset v. g. aequatio $x^3 + y^3 = bx + by + c$, tunc y posita maximo-minima foret $3xx - b = 0$; sed si x maximo-minima, fiet $3yy - b = 0$, cujus ope tollendo y ex prima aequatione prodiret $x^3 - bx - \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} - c = 0$, quae cum priore $3xx - b = 0$ deberet habere radicem communem, si vera esset talis assertio, quod utique non procedit. Verum est radices tam secundum y, quam secundum x aequales fieri, cum y determinetur per x et per binas x bis et per binas x aequales aequaliter; nôn tamen ideo x fit maximo-minima coordinatarum (ut est y maximo-minima ordinatarum) etsi fiat μοναδικὴ, seu pro geminis unica, dum fit tangens.

Gratissimum mihi erit Tuum phosphori exemplum, ut sic dicam, quod acceptum Societati novae Regiae transmittam; optarem adderes, quae in hoc negotio Parisios scripseras, praesertim pro tutiore elaboratione. Interim amicus meus, experimento tumultuarie sumto, in obvio mercurio etiam lucem in vacuo deprehendit, sed quod compendii caūsa tantum vesica usus esset loco epistomii, non fuit durabilis Phosphorus. Id, ni fallor, incommodum superest in hoc Phosphòro, quod clāuso licet vase alterationem recipere

et cuticulam contrahere potest per calorem ambientem externum. Sed hoc cautione evitari potest.

Optarem nancisci librum Dni. Fatii *), cui per modum appendicis adjecerat, quae contra nos scripsit. Aiunt in eo tractari meliorationem rei hortensis per radios solares efficacius dispensatos. Quod quidem scimus valde profuturum esse, et licet non ignoretur, tamen vulgo negligi. An aliquid singulare suggerat ipse, ex ipsius Libri inspectione patebit. Si vidisti, fac quaeso ut sciam.

Memini doctum quemdam Batavum aliquando Tecum commutare literas; an ille ex eo tempore progressus non poenitendos in interiore Analysi fecit?

Aiunt Gregorium Oxoniensem Professorem quoddam Opus mathematicum editione parare, et in hunc usum corrogare subscriptiones, more Anglicano. Quod argumentum tractet, non comperi. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 14 Julii 1701.

P. S. Si cui meditationi Mathematicae ad Acta missae adjungas aliquid, quo declares sine omni verborum aculeo, cur Tibi non videatur aequum, ut publices Analysin Tuam, donec inter Te et Dn. Fratrem Tuum controversia rite terminari possit, simulque adjicias paucis, quid de edita Dni. Fratris Analysi sentias, credo Dn. Menkenium in edendo difficilem non fore. Relegissem ego dudum Analysin Tuam et cum fraterna comparassem, si antiquas illas schedas, nescio ubi latentes, reperissem, nam ut recuperem, multos fasciculos aperire opus est. Faciam tamen, quam primum commode fieri poterit, quando id desideras.

CXXXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Puto novissimas meas Tibi redditas cum scriptis ad Dn. Volderum: nunc novas pro utroque vestrum recipis, et Volderianam rationem in ipsis leges, atque ut spero ignosces, quod non

*) Fruit walls improved etc. Londin. 1700. 4.

ipsas tantum, sed et binas adjectas ad Te dirigo. Tibi autem scribendi propria ratio est, ut memoriam Phosphori Tui pulcherrimi refricem, cujus specimen a Te per cursorem publicum aut potius per publicam vecturam expecto, eoque nomine Tibi non mediocriter ero obstrictus. De sumtu satisfacere meum est. Interim testimonio amici mei certi esse possumus, lucem non esse privilegium mercurii Tui, nam, ut nuper scripsi, facili experimento eam vidit. Anglus doctus, qui huc advenit, me certiorem reddit, Newtoni Librum de motu lunae mox editum iri. Rem insignem praestabit, si hoc aenigma solvat. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 5 Augusti 1701.

P. S. Dominus Hermannus ubi est, et quando excurret ad has oras? Spero me aut hic inventurum, aut Brunswigae sive Guelfebyti, aut Berolini. Has literas putabam me dudum transmisisse, cum ecce in angulo cum inclusis reperio; id quaeso excusa, et excusatum habe.

CXXXVI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Mitto ecce, ut promisi, exemplar Phosphori mei perpetui, pro exiguitate sua satis lucidum. Latet id in hac capsula chartacea, quam poteris reserare ope scalpelli incidendo commisuras. Ubi exemeris lagenulam vitream, perlustra quaeso statim, an in itinere nullum damnum acceperit, an non fracta, an non fissuram egerit; an orificium adhuc probe obturatum et munitum sit, ut securus sis nihil aëris irrepsisse. Videas, rogo, an vitrum ipsum manserit purum et undiquaque pellucidum; hoc non gratis quaero, nam cum nuper ad aliquot leucas curru excurrerem, mecum gestavi talem lagenulam, ut experirer num longinquam transportationem facile ferre posset; quod quidem factum est, sine jactura luminis, sed observavi parietibus lagenulae internis quasdam maculas adhaesisse, veluti ex fuligine quadam contractas, mercurio interim ipso nihil omnino alterationis perpesso. Mirabar id, nam a crebris et vehementibus concussionibus jam per annum et ultra singulis fere noctibus phosphorum talem agitare soleo, talem inde

adhaerescentem fuliginem in vitris nunquam observavi; conjicio igitur a tremulo motu currus etiam occultum aliquem tremorem mercurio fuisse impressum, et intimam aliquam particularum collisionem, cujus vi particulae metallicae aliaeque heterogeneae melius separari a mercurio et vitro adhaerere potuerunt, quam per motum simplicis agitationis, licet vehementissimae. Scire itaque percuperem, an in hoc exemplari idem observaveris; forte motus equitationis, utpote non tremulus, non adeo est incommodus. Collo, ut vides, lagenulae circumligavi frustum vesicae, majoris tantum cautelae gratia, alioquin non opus esset; poteris adimere rursus, si libuerit; praestat tamen ut sinas; nam abundans cautela non nocet. Intra vesicam est operculum stanneum cum cochlea foemella alteri cochleae mari pariter stanneae superinductum, sed intra operculum ipsum, colli orificium obturatum est accuratissime subere, caemento quodam undiquaque probe munito, ut hoc modo nihil nec aëris ingredi nec mercurii egredi, vel ad operculum stanneum, quod corroderet, pervenire possit. Certe praeter inventionem Phosphori, ipsa ejus elaboratio non prostremae est artis: nemo enim facile exhauriet aërem ad decimam usque millesimam partem, eoque extracto cito, adeo obturabit, ut nihil in lagenulam subrepat aëris, nihilque inposterum sit subrepturum. Hoc primarium esse puto, quod Parisiensibus adhuc deesse credo, et cujus defectu hactenus nondum ad optatum successum potuerunt pervenire. Caeterum, si lubet experimentum facere cum hoc Phosphoro, non sufficit ut id fiat in loco obscuro interdiu; nam loculi nimia adhuc diei luce percusi, non facile percipiunt lumen debilius: noctem ipsam igitur exspectes, et quo obscuriorem, eo melius; tumap prehenso lagenulae collo, eam agites sursum deorsum, quasi velles eluere vitrum, tota lagenula vitri ignea apparebit, cujus splendor non minus vividus erit, quam Phosphori Kraftiani chymice parati. Rogo mihi ocius perscribas, quo in statu omnia deprehenderis; unum est, quod caveas, ne scilicet lagenula nimium incalescat, unde caementum, obturaculum subereum praemuniens, liquescere et ab aëre forinsecus jugiter urgente per foraminulum in subere relictum, per quod aër eductus fuerat, in vitri cavitatem premi posset. Alias nihil est, quod metuas; poteris Tecum gestare et quovis in loco experimentum instituere, sine fractionis periculo, etiamsi non adeo caute contrectetur. Vitrum enim, ob notabilem spissitudinem, satis robustum est, modo non in corpus aliquod durum

nimis ruditer impignat, aliamve externam et violentam injuriam patiatur. Et ita habes Phosphorum in perpetuum durabilem, qualis nullus hactenus inventus fuit. Quando vero dicis amicum Tuum in obvio mercurio etiam lucem observasse, sed non durabilem, recte addis, quod disparuerit ideo, quod compendii causa tantum vesica (quamvis non recte capiam, quomodo vesica loco epistomii inservire possit) usus esset loco epistomii: nam quam facile peccetur in circumstantiis, et quam facile extrinsecus noxia quaedam mutatio accidere possit, satis arguit infelix Parisiensium successus. Interim tamen, quod saltem aliqualem observaverit in obvio quodam mercurio, id meam sententiam, quemvis scilicet mercurium, si rite paretur, in vacuo luminosum esse, mirifice confirmat. Vanus est metus Tuus, cum putas incommodum superesse in hoc Phosphoro quasi clauso licet vase alterationem recipere et cuticulam contrahere posset per calorem ambientem externum; horum enim nihil omnino expertus sum in Phosphoro diu in pera mea, ubi satis calefiebat, gestato: quidquid hic periculi subest, id non de mercurio, sed de obturaculi caemento, ut jam dixi, metuendum est.

Misi literas ad Volderum, quas ad eum scripseras, sed hactenus nihil responsi accepi. De Nieuwentitio nihil a longo tempore audivi. Hermannus nostras transfretavit in Angliam, visurus ibi Wallisium, Newtonum, alios. Fatii Librum de melioratione rei hortensis nunquam vidi; inquiram an Amstelodami prostet. Per doctum Batavum, qui mecum literas commutat, intelligis forte Dn. Dierquens, Praesidem in Curia Brabantiae, quae Hagae est. Is sane nostra non mediocriter intelligit, sed habet filium, qui majores longe progressus fecit. Cum nuper ipsi scripsissem, Cissoidis quadraturam diu redactam esse ad quadraturam Circuli, sed ejus rectificationem, quam ego invenerim, dependere a quadratura hyperbolae, adeoque per descriptionem logarithmicae haberi posse, neminem adhuc dedisse: ille protinus mihi transmisit solutionem elegantem et constructionem concinnam curvae cissoidalis in rectam extensae, duplici modo et per descriptionem logarithmicae et per extensionem curvae parabolicae, utrumque beneficio nostri calculi; unde conjeci in eo non parum esse versatam.

Consilium Tuum secutus mitto hic etiam meam declarationem de analysi fraterna, cui praemisi responsionem ad excerpta ex literis Fatianis. Videbis me omnia serio pertractasse sine omni ver-

borum aculeo, ita ut etiam fratris mei nomini pepercerim. Justum sane et aequum est, ut Dn. Menkenius modestam meam defensionem edat, si vel ullomodo meae existimationi consultum velit, cum ipse praesertim dicat in exordio ad excerpta literarum Fatii, se defensionis gratia provocatis praesto esse, atqui ego maxime fui provocatus. Quocirca hoc scriptum Tibi submittere volui, ut prius examines, et deinde Lipsiam sine mora transmittas et inprimis Dno. Menkenio commendes; non sum enim nescius, quantum is Auctoritati Tuae deferat. Vale et fave etc.

Groningae d. 13 Aug. 1701.

CXXXVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Absenti allatum est vasculum Phosphoreum; redux statim aperui, visum est sine labe, lucemque emisit agitatum: spero et durabile fore, nec aërem se paulatim insinuaturum per caementum. Haec, ubi primum potui, scribo, multasque Tibi interim gratias ago. Tanto melius se res habet, si calor externus superficiem non immutat, adeoque nec lucem obstruit. Distincte Tibi rescribam tumultuarium illum modum qualecunque lucis specimen obtinendi per vesicam sine epistomio; nunc vix ad scribendum temporis satis est; nam ego advenio et tabellarius abit. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 23 August. 1701.

P. S. Quod commendasti Actis inserendum, statim Lipsiam ad Dn. Menkenium mittam.

CXXXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non dubito, quin literas meas acceperis, quibus significavi phiolam Tuam Phosphoream recte ad me pervenisse, neque ex jactatione itineris detrimentum accepisse. Si tantillum commoveas

lucet, etsi non sit lux admodum vivida. Ego mecum Berolinum feram Societati nostrae Regiae, tanquam egregium a Te munus: absolutus enim ab Anglis, qui nunc hinc discessere pene omnes, iter diu dilatum nunc illud intendam. Interea ecce Tibi Diploma Societatis, quo in numerum Sociorum cooptaris. Nempe eo res deducta est, ut Concilio habito aliquot egregii Viri Collegae ac Socii appellarentur, inter quos tuum relatum est nomen jure merito, mihique id negotii datum, ut ad Te Diploma perferri curarem, quod nunc mitto, Deumque rogo, faxit ut Tibi id decus, nobis vero ac Reipublicae, bonisque literis emolumentum inde sit diuturnum. E re autem putem, datis ad Societatem literis, gratam Tibi nominationem Tuam fuisse testeris, et spem facias subinde nobiscum utiliter communicandi.

Spero etiam redditas Tibi meas, quibus incluseram secundas ad Dn. Volderum. . . . .

Cogitabamus aliquando Berolini de novo genere Diarii, ut publicanda magis in nostra sint Societate. Videbis, an Tute aliquid suppeditare velis . . . .

. . . .

Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 13 Septembris 1701.

P. S. Si quid velis vel ad me vel ad Societatem, poterit, dum absum, recta mitti Berolinum ad Dn. Jablonsky, Secretarium Regium et Regiae Societatis Berolinensis. Idque ut facias aequum puto, literasque ad Societatem includas, quibus gratiae agantur.

CXXXIX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Societatis diploma missu Tuo accepi rectissime: quam gratum mihi fuerit, videbis ex responsione ad Societatem. Non dubito, quin Tua ex commendatione iste honos mihi contigerit; gratias itaque etiam hoc nomine permagnas Tibi debeo et ago. Si quid novi subinde detexero, quod cum Societate communicari dignum putem, id libenter facturus ero. In physicis et experimentalibus non spernenda pollicerer, modo necessariis omnibus

instructus essem. Adinveni nuper novam barometri construendi rationem facilem, quod variationes pro lubitu multiplicatas exhibet. Nosti Hugenium olim dedisse ideam barometri alicujus, quod quidem variationes multo sensibiliores redderet, quam vulgaria; sed praeterquam quod illas non omnino quatuor decies multiplicet, quoties scilicet mercurius gravior est aqua, etiam hoc incommodi habet, inter alia plura, quod propter difficilem tuborum suorum structuram ad praxin deduci non possit, nemoque quantum scio hactenus deduxerit. Meum vero caret hoc incommodo, constat enim tubis ordinariis, et tamen effectus quantumvis augeri poterit. Muschenbroeckius, artifex Leydensis magnae peritiae et singulari dexteritate pollens in conficiendis instrumentis, qui etiam ea quibus utor confecit, postquam ipsi meam inventionem aperuissem de novo hoc barometro, rescripsit mihi se superatis nonnullis exiguis difficultatibus unum ad mentem meam feliciter parasse, monstrans variationes sexdecuplo majores ordinariis, ita ut si mercurius in ordinariis ex. gr. uno pollice ascendat descendatve, in hoc jam motus fiat per 16 pollices.

Penultimas Tuas quas ad Volderum scripsisti, diu est quod curavi, sed nihil adhuc responsi accepi. Postremas vero cum adjunctis ad Oudinum et Baylium, quas nuperrime tantum accepi, postridie etiam dimisi. Pro opera Tua ad Dn. Menkenium utut infelice, debitas tamen ago gratias. Vir iste se fratri meo sine ulla causa magis favere, quam mihi, manifeste nimis monstrat; interim cur permisit, ut in suis Actis tam contemtim provocarer, si jam nolit, ut in iisdem ad provocationem respondeam et responsionem ad finem perducam? Si non partium studio teneretur, mihi quod aequum est non denegaret. Fui primus provocatus, ergo etiam concedi mihi deberet, ut ultimus responderem: nisi enim respondeam, publicum ignarum, quod Dn. Menkenius meam responsionem suppresserit, id mihi pro defectu responsionis et pro tacita solutionum mearum quasi nullitatis agnitione interpretabitur. Vides ergo quod meae existimationis intersit non tacere, quam si Dn. Menkenius non laedere volet, non potest non ultimum scribendi locum mihi concedere; quod si non faciet, ego de injuria mihi facta publice protestabor. Optarem ut id illi oblique insinuares, quando ad eum rescribis, et quid postea factum mihi statim significares.

Ad me nuper pervenit Groningii Bibliotheca Universalis, con-

tinens inter alia Historiam Cycloidis, quam Tibi lectam etiam non dubito: meo quidem judicio fecisset melius abstinuisse a rebus, quas non satis perspectas habere ipse monstrat; ut enim nihil dicam de soloecismis grammaticis, haec historiola ita scripta apparebit cuilibet legenti et materiae hujus gnaro, ut facile colligere possit scriptorem non insignem fuisse Mathematicum; multa sunt allata praeter ordinem, multa omisit non omittenda, et multa omittenda non omisit, ita rerum bonarum ne quidem delectum novit. Sed et nonnulla falsa retulit. Ex. gr. quando pag. 50. Epistolam in Pascalium aliosque Gallos acerbe scriptam tribuit Hugenio, cum tamen ejus auctor sit Wallisius. Item quando postremorum circa cycloidem inventorum, quae mihi soli debentur, tamen Fratrem meum participem facit, dum inventionem quadraturae zonarum cycloidalium pag. 99 ipsi adscribere videtur, quam tamen me primum invenisse constat ex Schediasmate de segmentis innumeris quadrabilibus cycloidis a me publicato, ubi simul nonnullarum zonarum quadraturam exhibui, ex quibus jam totum mysterium jam satis patebat, ut parum vel nihil sit quod postea a Fratre meo fuit publicatum. Id vero inprimis me male habet, quod Groningius repetat, quae Frater ex invidia in meorum inventorum extenuationem deblateravit, o m n i a s c i l i c e t q u a e c i r c a q u a d r a t u r a s s p a t i o r u m c y c l o i d a l i u m i n v e n i r i p o s s u n t, u n a c y c l o i d i s p r o p r i e t a t e d u d u m d e t e c t a n i t i, e t e x e a t a m a p e r t e f l u e r e, u t v i r i c e l e b. H u g e n i u s e t L e i b n i t i u s, q u i d u o e j u s s e g m e n t a q u a d r a r u n t, n o n p o t u i s s e n t n o n p a r i f a c i l i t a t e c a e t e r a o m n i a s e g m e n t a e t s e c t o r e s q u a d r a b i l e s r e p e r i r e, s i a n i m u m i n t e n d e r e v o l u i s s e n t. Vide quaeso an livor ipse tam virulenta eructare potuisset in meum inventum, quod circa cycloidem omnium praestantissimum sine jactantia dixerim, non propter inventionis difficultatem, sed e contrario propter nimiam facilitatem rei alioquin nobilissimae et tamen per integrum seculum latitantis. At quam inepte dicit me nihil reperisse, quod Tu pariter et Hugenius, qui duo cycloidis segmenta quadrastis, non pari facilitate potuissetis reperire, si animum intendere voluissetis; videtur utique Thraso innuere velle, quod omnia quae hactenus in lucem ipse emisit, tantae nobis fuissent caliginis, tantae difficultatis, ut non quemadmodum mea reperire potuissetis, etiamsi vel maxime animum intendissetis. Mihi certe nunquam talia tribui, nam si ea

tantum communicare deberemus, quae aliorum aciem licet valde intentam effugerent, credo nec fratrem nec alium quempiam aliquid scripturum fuisse, cum utique semper aliquis sit, qui tantae esset sagacitatis, ut idem praestare potuisset, si voluisset se applicare. Tandem considera, annon infinita mea cycloidis segmenta quadrabilia extenuando simul et Tuum obliquum contemnat, eadem scilicet ratione argumentando, quod Hugeniano jam ante invento, Tuum longo post tempore demum inveneris, adeoque quod nihil inveneris, quod Hugenius qui cycloidis segmentum rectum quadravit, non potuisset non pari facilitate alterum Tuum segmentum reperire, si animum intendere voluisset. Sed quis ferret has cavillas, quae ex invido animo unice proveniunt? Interim Groningius non dubitavit eas in libellum suum transferre, quod utique non fecisset, si de inventi mei pretio debite judicare potuisset. Quae de cycloidibus protractis et contractis protulit, nullius fere sunt momenti; eos vero gaudere pariter segmentis et spatiis innumeris quadrabilibus, quod ante me nemo animadvertit et quod in sua Historia alicujus ponderis fuisset, alto tamen silentio praeteriit, ut et quando eandem illam proprietatem demonstravi haberi in Trochoidis seu in Cycloidis socia, ille ne γρῦ quidem ea de re, utut satis eleganti, memoravit. Et quidem haec ad Te scribere volui, ut Groningium, quem Tecum literas commutare scio, moneas, si ita lubet, ut secundam partem hujus historiae, quam meditari dici, paulo curatiorem edat, aut quod satius esset, penitus supprimat.

Ex Tuis laetus intellexi, quod lagenula Phosphorea ad Te incolumis pervenerit; mihi autem non scripsisti, annon fuliginis aliquam speciem observaveris lateribus vitri internis adhaerescentem, prout mihi in aliqua accidisse, ab agitatione currus, in postremis meis significavi: nam si idem etiam in tua lagenula accidisset (quod tamen non credo, ob aliam jactationis speciem ab equo, quam a curru) mirum non esset, si vitrum a fuligine turbulentum lucis vivacitatem imminuit. Quod autem scribis, si tantillum moveatur lucere, etsi lux non sit admodum vivida, indicium utique est in itinere nihil aëris in phialam irrepsisse; alias enim, si vel tantillum irrepsisset, lux vel omnino suffocata foret vel nonnisi vehementissimis agitationibus appareret, et quidem scintillatim tantum, velut ex silice excussa, loco quod si phiala ab aëre bene vacuata

est, lux, quae apparet facile, etiam continua est, instar flammae et replet totam vitri cavitatem. Sed velim ut etiam scias in tam parvis vasculis, quale Tibi unum misi, lucem tam vividam non esse quam in majoribus; quid enim tam exigua copia argenti vividi efficere posset? Sunt mihi vasa grandiora, quorum lucis favore in tenebris commode digitos et literas majusculas distinguere possim. Caeterum, quod hi mei Phosphori longum iter perferre possunt, hoc meam hujus lucis generationis explicationem mirifice confirmat; si enim illa proveniret a peculiaribus quibusdam particulis igneis, in mercurio uno potius quam in alio natantibus, ut volunt nonnulli Parisienses, qui fit quod illae a violenta itineris jactatione non statim dissipentur, siquidem per poros vitri facilius utique elabi possent, quam ex poris mercurii, utpote longe angustioribus: adeo ut vel hinc pateat, lucem mei phosphori dependere non a particulis quibusdam permanentibus, sed ab universali quadam materia, per poros mercurii tanquam per cribrum continuo fluente. Hisce vale et fave etc.

Groningae d. 8 Octobr. 1701.

P. S. Vidi in Diplomate meo mentionem fieri privilegiorum et praerogativarum Sociis Societatis Brandeburgicae concessarum; gratum esset intelligere, quid sint et in quo consistant: item, qualia habeat Societas statuta et leges. Optarem etiam nomina omnium Sociorum hactenus conscriptorum.

CXL.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nuperis meis jam dimissis, quas Tibi acceptas spero, ad me pervenerunt Cl. Volderi literae, quibus reseratis inveni hoc, quod vides responsum ad Te datum una cum adjectis responsoriis Oudini et Baylii, quae omnia ocyus Tibi transmittenda censui, et quidem ut jussisti, iterum sub involucro inscripto Dno. Jablonski, Secretario Societatis. Quod superest, me refero ad novissimas meas, ad quas responsionem expecto. Interim vale et fave etc.

Groningae d. 15 Octobr. 1701.

CXLI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex quo accepi Tuas cum Volderianis, fere semper haesi in Regia Berolinensi, ita volente Regina et a Fratre Electore impetrante. Equidem hoc modo ordinariae occupationes meae non parum interrumpuntur. Interim fortasse Reipublicae literariae velificare nonnihil potui. Nam obtinui, ut per ditiones Regis mandata dari debeant Medicis, annuas observationes conferendi ad Historiam anni Physico-Medicam, cujus egregium pro anno **1700** specimen dedit Medicus Hallensis clarissimus, Fridericus Hofmannus. Sed et quidam nobilis Polonus in graphica arte excellens, auspiciis Regiis, a Societate ablegabitur in Russiam observationibus Astronomicis et Physicis instituendis. Cumque pingat egregie, commendabitur Tzari, ut quemadmodum Regis, Reginae et Regii Principis affert iconas, ita Tzaricae Familiae Regi referat.

Tuum Phosphorum vero, ut auguror, perpetuum, Regi et Reginae ipse ostendi, habuitque plausum spectantis Aulae. Puto me effecturum, ut Rex gratum sibi inventum aliquo honorario testetur. Id enim jam probavit primus Aulae administer, eumque in finem nomen Tuum jussit annotari.

Libens intelligo novum barometri genus a Te excogitatum, quod variationes pro lubitu multiplicet. Puto id a Te fieri in tubo ipso, nec machinulis, sed liquoribus: alioqui enim non ignorabis Hookium et alios (imo jam ipsum Gerikium) ope rotularum aut cylindrorum pro lubitu multiplicare sensibilitatem divisionum. In Hugeniana constructione est aliquid difficultatis. Interim cum neges Tibi constare in praxin fuisse traductam, non possum non significare, Hubinum Lutetiae Parisiorum barometrum Hugenianum aliquoties elaborasse successumque non defuisse. Sed verum est multiplicationem esse limitatam et dependere a proportione aquae ad hydrargyrum.

Groningana Cycloidis Historia, ut a Viro scripta, qui argumentum ipsum non satis profunde excussit, movere Te admodum non debet. Suppeditaveram ipsi notitiam nonnullorum novissimorum, sine quibus adhuc magis manca foret; sed quaedam tamen omisit, vel non satis intellexit. Non dissimulaveram totum ipsius institutum mihi parum probari; neque enim tanti est lis inter Ita-

lum et Gallum, ut Germanus ejus historiam scribat, cum praesertim multo majoris momenti sint postea detecta. Sed voluit ille Bibliothecam universalem edere, vel Codicem (haec enim nomina placebant) in quo esset de omnibus aliquid. Quae de Jure Gentium minatur, vel in Libro vel in suis ad me literis, mihi non valde satisfaciunt; plerique hodie volunt libros scribere, nullo in eos tempore aut labore impenso: sed ita Reipubliae parum prosunt, plerumque etiam sibi. Diu nihil a Groningio vidi: occasione data monebo, quae mones.

Dn. Menkenius noster, vir cetera optimus, hoc habet, quod scrupulosior est, quoties aliquid inserendum Actis, quod displicere possit aliquibus. Id ipse circa Fatium expertus sum. Sed distingui debebat inter defensionem et aggressionem. Ad Tuam mentem ei iterato scripsi, sed hactenus frustra, denuo tamen. Ajunt nescio quid innovatum esse ab annis pauculis in Hydracontisteriis Batavis per Tubos flexiles vim exerentibus contra incendia. De eo peto ut inquiras; et quid hoc rei sit mihi significes.

Inter praejudicia acutissimi Volderi nostri non minimum est, quod Extensionem concipit ut quiddam primitivum, quod faciat corporis essentiam, cum Extensio nihil aliud menti ingerat, quam diffusionem quandam (seu continuam repetitionem) alicujus communis naturae per plura coexistentia; quaenam autem sit illa natura, non exprimat, sed praesupponat: unde extensio relativum quiddam est, non absolutum; et ipsa natura substantiae corporereae, quae scilicet diffundi intelligitur, est quiddam extensione anterius. Hoc ei, ni fallor, jam in superioribus indicavi, ita tamen ut non satis eo animum attenderit: nunc autem non repetivi, sed confirmavi. Quod si Tibi ea in re satisfacio, commode ipsi quoque auxilio eris in hoc melius intelligendo. Vale in annum novum aliosque multos, et me ama.

Dabam Berolini 27 Decembris 1701.

CXLII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum nesciverim, an literas meas sub inscriptione ad Dn. Jablonski certe acceperis, scripta haec Varignoniana, jam ab ali-

quot hebdomadis mihi accepta, nolui dimittere, antequam de traditione mearum securus essem. Quod cum factum sit per novissimas Tuas 27 Decembris datas, ecce nunc scriptorum variorum fasciculum, quae vel una vel partitis vicibus mihi remittes; adjectae sunt iis, ut vides, literae, quas Dn. Varignonius ad Te scripsit; cui si ipse respondere volueris, poteris ad me dirigere literas; promptus ero in curando.

In quo consistat novi mei barometri inventio, disces ex literis Muschenbroeckii, Artificis Leydensis, ad me datis. Videbis structuram haud valde esse compositam, duobus quippe tubis, verticali uno et ampliori, horizontali altero et graciliori, totum negotium absolventibus. Quod Gerikius, Hookius, alii multiplicatas barometri variationes tentaverint per rotulas, cylindrulos aliasque machinulas, non equidem ignoro, sed ignoro an in praxi ullum effectum habuerint; hujusmodi enim machinulae ob frictionem aliaque materiae incommoda, non prima statim aëris mutatione moveri possunt, sed collectis demum successive pluribus mutati aëris gradibus, machinulae una vice et quasi per saltum, superata frictione, moventur, adeo ut tantum absit, ut hujusmodi barometra per machinulas insensibiles variationes indicare possint, ut potius sensibiliores etiam dissimulent. Meum vero barometrum, cum per liquorem ipsum variationes ostendat, huic incommodo non est obnoxium. Cum Lutetiae essem, nunquam audivi Hubinum elaborasse barometrum Hugenianum; sed concedes, puto, quod praeter limitatam effectus multiplicationem et difficilem tuborum structuram eorumque adimpletionem, non facile etiam contrectari, multo minus transportari possit, id quod pretium ejus multum imminuit.

Quod Phosphorus meus spectantis Aulae plausum habuerit, valde laetus intellexi. Quod vero dignus fuerit aestimatus, qui ipsius Regis et Reginae oculos in se converteret, id quidem magno honori mihi duco, praesertim si gratum sibi fuisse inventum meum aliquo signo Rex testabitur, quemadmodum polliceris Te effecturum. Sed non possum non dolere simul, quod Phosphorus, quem Tibi misi, ille sit quem inter plures quos in parato habeo, selegi propter parvitatem molis, ut commode per cursorem publicum posset transmitti, adeoque, ut verum fatear, inter omnes reliquos minimum splendet ob modicam nimis mercurii inclusi quantitatem. Quis autem cogitasset Te levidense illud Phosphori vasculum, quod Tibi soli misi, ut inventi veritatem videres, postea coram Rege,

Regina et Aula producturum? Id si mihi praedixisses, parassem Tibi Phosphori exemplar in majori et elegantiori forma.

In literis Tuis ad Cl. Volderum, dicis Tschirnhausium moliri etiam vitra Telescopiorum longe porrigentium, qualia Hartsoekerus elaborat: id ego nesciveram; putabam enim illum versari tantum in vitris causticis conficiendis, quorum crebro mentionem facit in Act. Erud. et alibi. Hac occasione dicam (quod nondum fecissem) me moliri novam aliquam speciem speculi caustici, levi pretio et labore parabilis, etiam sub forma ingenti, a quo non minorem effectum mihi polliceor, quam ab ordinariis ex chalybe aliove metallo factis. Perscribam successum quam primum paravero.

Miror valde, quod Dn. Menkenius etiamnum haesitet in edenda mea declaratione. Iniquum est, mihi defensionem denegare contra aggressionem. Quod si alium praetextum non habet, quam quod forte quaeratur de acerbitate defensionis meae, per me licet ut corrigat, deleat, mutet, moderetur pro lubitu, modo rei substantia maneat, quanquam modestissime omnia scripserim. Si vero nec hoc flectere poterit Dn. Menkenium, dubitabo, an posthac unquam aliquid ad Acta ipsius missurus sim, habeboque occasionem de ipsius partium studio publice conquerendi.

Machinae illae hydraulicae contra incendia, quas dicis in usu esse apud Batavos, et instructas tubis flexibilibus, forte nihil singulare habent. Nam hujusmodi jam vidi olim Genevae: erat autem illa uti ordinaria, scilicet constabat magno receptaculo, quod in anteriore parte habebat duos cylindros, in quibus emboli alternatim ascendebant et descendebant, ut hoc modo aqua radio continuo exprimeretur, et quidem per longum aliquem tubum coriaceum instar intestini, quem homo aliquis, apprehendens in anteriore parte, secum ferebat in summa aedium vel tectorum, et orificium ejus aquam continuo evomens versus angulos et recessus dirigebat, ut hoc pacto succurreret, ubicunque necessitas postularet. Inquiram interim an syringae Batavorum aliquid singularius habeant, quod perscribi mercatur, quo casu delineationem fieri curabo, quam mittam.

Dimittam hodie literas, quas dedisti ad Volderum una cum adjectis ad Dn. Oudinum et Baylium. Meo utique non indiges consilio, ad mentem Tuam Cl. Voldero intelligibiliorem reddendam, nisi velis me facem Soli accendere. Video ipsum notionem habere substantiae a Tua multum diversam; verum etiam est, quod ex-

tensionem habeat per primitivam corporis essentiam: Tu vero dicis eam esse tantum relativum quid, et praesupponere communem aliquam naturam per plura coexistentia. In quonam autem illa communis natura corporis consistat, dicit ille se non posse concipere, et a Te procul dubio desiderabit claram et distinctam ideam, ut et Tuam nunc definitionem substantiae, quam, ni fallor, promiseras, si suam prius dederit. Quod superest Tibi vicissim in novum hunc annum et in longam sequentium seriem omnia fausta et felicia ex animo apprecor. Vale et fave etc.

Groningae 14 Jan. 1702.

P. S. Rogo ut Varignoniana quantocyus mihi remittas, quoniam ad eo respondere debeo; nam nondum respondi.

CXLIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literae, quas ad me dedisti, cum inclusis Varignonianis et Muschenbroekianis, Berolini me non invenere: jam enim discesseram cum Regina: itaque illinc ad me huc missae et heri demum redditae. Nolui itaque differre responsum, etsi brevitas temporis et distractiones per absentiam diuturnam accumulatae non patiantur, ut rimari possim attentius, quae Cl. Varignonius noster Adversario respondet, et quae Tibi perpensa non dubito. Literis ejus respondeo, ut vides, nec video qua alia commodiore ratione possim, ne tricis metaphysicis frustra implicemur. In Tua tamen atque illius potestate (quod ipsi significare potes) utrum velitis communicari aliis quae scripsi; nam si quid inesse putatis, quibus abuti possint alii, suffecerit notationes vestras mihi communicari, ut, quousque salva veritate videbor posse, locutiones meas accommodem sensis vestris.

Peringeniosa est Tua barometri constructio nec inutilis: cogitavi aliquando de barometro portatili, quod includi theculae in horologii forma posset, sed mercurio caret et ejus officio fungitur follis, quem pondus aëris comprimere conatur, elastro aliquo chalybeo resistente. Hugenianum ipse in Hugenii museo vidi.

Pro speculis causticis aliisque majoribus ad urendum, aliosve usus comparatis, quidam Scrinarius artifex Dresdae non male ad-

hibuit lignum folio auri obductum et politum. Eo coquit ova, aliaque id genus praestat. Pro vitris ingentibus putem commode adhiberi cavas tabulas vitreas conjungendas, medium replendo liquore. Ita enim longius, quam ulla alia ratione iri potest.

Intellexi non sine dolore, Dn. Menkenium, Symptomate aliquo gravi nervosum genus invadente, paralytico nescio an apoplectico laborasse, sed restitutum spero, et malım fuisse minus grave quam ferebatur.

Cum Phosphorum a Te acciperem, neuter nostrum de demonstratione Berolinensi cogitabat. Praestat aliquid monstrare ipsa re, quam multa explicare verbis. Sed brevitas temporis nunc abrumpere jubet. Vale etc.

Dabam Hanoverae 3 Februarii 1702.

CXLIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum non habuerim scriptu valde digna, differendam esse responsionem censebam, donec aliquid acciperem a Voldero et Varignonio. Opportune vero contigit, ut eodem fere tempore ab utroque ad me pervenerint literae; mitto itaque cum Volderianis ad Te datis etiam Varignonianas, quippe quae etiam Te tangunt, hasce si placet remittes.

Gaudeo Tibi probari novam meam Barometri constructionem. Alterum illud Tuum ope elastri chalybei, folli alicui inclusi et aëris compressioni resistentis, meo quidem judicio non prorsus factu impossibile esset, modo fieri possit follis, ex quo aër perfectissime extrahi queat et nihil postea aëris tractu temporis redingrediatur; hoc enim absolute requireretur, alias si quid aëris in folle remaneret, confunderetur barometrum cum thermometro. Specula caustica lignea et auri foliis obducta et polita etiam hic et alibi jam sunt nota; ante aliquot annos ejusmodi unum fieri curavit meo suasu Senator aliquis hujus urbis, quo non tantum ova coqui, sed etiam plumbum liquefieri potest. Sed nova mea ratio specula caustica parandi in hoc consistit, ut adhuc leviori opera et pretio viliori nec tamen minoris efficaciae curari possint. Quamvis hactenus nondum vacaverit ejus rei experimentum facere, aperiam tamen

cogitata mea. Bonam partem plumbaginis contererem in pollinem subtilissimum, quo superficiem ligni torno accurate sphaerice excavatam aspergerem, postquam prius pulvis cum albumine ovi in massam mediocris consistentiae est subactus; dein cum adhuc madet lacinia panni probe et sedulo fricarem, tandem vero perpolirem ope vitri politorii (gall. polissoir) et nisi hoc modo satis expoliri posset lignum, obducerem potius superficiem concavam foliis chartae optimae hancque postea plumbagine cum albumine ovi subacta oblinirem et ratione modo dicta detergerem et polirem. Dici enim non potest, quam eleganter charta hoc modo laevigari possit; tentavi illud in parvo quodam frustro, quod tantam laevitatem accepit, ut instar chalybis politi (cujus etiam colorem prae se ferebat) objectorum imagines distinctissime repraesentaret.

Accepi nuper posteriores menses Actorum Lips. anni proxime elapsi; sed ibi non reperi Declarationem meam ad solutionem problematis isoperimetrici. Miror sane Dn. Menkenium nihil adeo pensi habentem meae existimationis; scit utique me citra ipsius laesionem non posse hic subsistere; fui enim provocatus, mearum nunc est partium provocationi satisfacere, vel potius satisfactionem jam datam salvare. Passus autem est Dn. Menkenius, ut in Actis suis provocarer; quo jure ergo meae defensioni locum denegat in iisdem? nisi aperte velit fratris partibus studere. Aequitas postulat, ut mihi comedat ultimam positionem. Rogo ut Tua apud illum Auctoritate utaris denuo et serio moneas, imo conjures, ut diutius non differat scripti mei publicationem, sed ut quantocyus faciat quod ex justitia facere tenetur; quod si vero obtorto collo pergat reluctari, ut schediasma meum mihi remittat, et tunc videbimus quid porro agendum. Vale etc.

Groningae d. 11. Aprilis 1702.

CXLV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Varignonianas ad Te missas et a Te mihi communicatas cum gratiarum actione remitto, et cum eae occasionem mihi dedissent relegendi mearum ad Dn. Varignonium literarum Gallice scriptarum

exemplum, animadverti me alicubi non satis emendate in illis locutum. Itaque bina loca correxi, idque ipsi epistola altera Lutetiam recta missa significavi mature, ut si nondum edita est prior, corrigatur: ad edendum enim scripta non erat.

Follis qui aërem sufficienter excludat, fieri credo poterit ope vesicae. Ita commode credo habebimus barometrum portatile instar horologii. Corium nondum ita munire potui, ut aëri pervium non sit, quanquam id multas ob utilitates valde vellem. Et credo esse artifices, qui possideant hanc artem; nam passim memorantur culcitae nonnisi aëre suffertae, etsi videre eas nondum mihi contigerit. Caeterum etsi corium pro barometro non facile sufficere posse putem, ubi nimirum perpetua aëris coercitione opus est, vellem id saltem consequi posse, ut in 24 horas inflata ex corio culcita novo sufflamine non indigeret. Cogitavi aliquando, an non pelles animalium marinorum vicem corii terrestrium in hunc usum praestarent.

Specula lignea primus, quod constet, invenit faber quidam lignarius an tornator Dresdensis, sed Tua ratio pro foliis metallicis plumbagine obducendis nova est et elegans. Vidi ipse libros compactos, ita ut plumbago pro auro argentoque foliorum chartae terminationes, sive quod vulgo sectionem vocant, ornaret non minus splendide atque eleganter. Librum Guillelmus Penn, Tremulorum Angliae Coryphaeus, miserat, apparebatque frugalitatem cum elegentia conciliare voluisse . . . .

. . . .

Ex Novellis Reipublicae Literariae nuperis, quas Tibi quoque lectas puto didici, quaedam a Dno. Tschirnhausio Lutetiae acta, quorum ipse me participem non fecit, nescio an aliquid de ea re ad Te Dn. Varignonius? Quod si is quoque siluit, miror ego nimias et frustaneas cautiones. Cur enim apud amicos dissimulat, quae mox loquatur Diarium? Mentionem id facit duarum Propositionum Academiae Regiae exhibitarum, quarum una sit de perfectione lentium, alterius nescio an sensum satis assequar, qui eo videtur tendere, ut in data curva duo exhibeantur arcus, quorum differentia sit mensurabilis. Id si assecutus esset, rem praestiterit non contemnendam; sed vereor ut sit possibilis. Ni fallor enim, etsi curva parabolica non sit proportionalis Logarithmis vel areis Hyperbolicis eos exprimentibus, exhibui tamen olim curvam ordinariam arcus habentem Logarithmis proportionales. An ergo

spes est duarum arearum hyperbolicarum Logarithmis proportionalium haberi posse differentiam? Mihi id sane perdifficile videtur. Differentia enim Logarithmorum est Logarithmus rationis numerorum.

Cum nuper hac transiret Rex Prussiae, Consiliarium ejus Libellorum supplicum Magistrum hortatus sum, ut Phosphori Tui, quem Regi ostenderam, data occasione meminisse vellet, quod etiam se facturum promisit. Cogitavi posse aliquando ope ejus ex vitro cavo confici aliquid instar sceptri aut coronae, quod a machinamento quodam obtecto continue agitatum semper luceat.

Quaenam, quaeso, illa est multisectio angulorum pro numeris irrationalibus, cujus demonstrationem Dn. Variguonius a Te petit?

Pene est, cur idem faciam quod Varignonius, id est querar, quod tamdiu me Tuas praeclaras cogitationes (quarum multas domi Tuae nasci in dies non dubito) vis ignorare, ita ut plerumque quae facis, demum ex Diariis vel aliunde discam. Quorsum evasit Dn. Hermannus? Diu nihil de Nieuwentiitio audivimus.

Nova Reipublicae Literariae ibidem de speculo loquuntur vitreo, quod Dn. Tschirnhausius Academiae Regiae vendiderit. Sed ego puto, pro speculo potius vitrum causticum esse intelligendum. Diu enim est, quod ipse dixit, sese haec vitra speculis praeferre et fateor ope vitrorum commodius experimenta fieri posse. Interim tamen nec specula sunt contemnenda, praesertim si magna, admodum commodius quam lentes parari possint.

Exige quaeso a Dno. Variguonio, ut subinde ad Te scribat Nova literaria, praesertim ad Physicam et Mathesin pertinentia, et inter alia explicet, quid a Dno. Tschirnhausio sit actum. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 20 Aprilis 1702.

CXLVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quae nuper ad Te pariter et eximium virum Volderum nostrum scripsi, reddita Tibi esse non dubito.

Accepi novissime Dictionarii Bayliani alteram editionem, in

qua est replicatio quaedam ad ea, quae prioribus respondi, sed plena officii et humanitatis. In eo sum, ut vicissim aliquid reponam, nam et ipse autor ad haec invitat. Id Tibi et per Te Voldero mittam, ut per vos ad Cl. Baylium perveniat. Renovat etiam (in v. Zeno) quae Gouyus Jesuita in Trevuriensi Diario Dno. Marchioni Hospitalio objecit. Nam autor Dictionarii inclinat, ut scis, ad Pyrrhonismum, facileque arripit argumenta dubitandi.

Cl. Groningius, quem nosti, novas quasdam recensiones literarias dare aggressus est, partemque speciminis mihi inscripsit. Respondi et hortatus sum, ut ne superficiem tantum lambat scriptorum, sed in corpus ipsum penetret. Memini Te mihi aliquando scribere, esse aliqua supplenda in Historia Cycloidis, quam dederat; ea si scribas, qualia esse velis, mittam ad ipsum; commode enim inserere poterit, suo illi fasciculo, qui per intervalla prodire debet. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 29 Maji 1702.

CXLVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Literas Tuas ad Cl. Volderum rite curavi, sed hactenus nihil responsi ad eas accepi. Ursi etiam suasu Tuo Dn. Varignonium, ut nova literaria communicet et inter alia explicet, quid a Nobil. Tschirnhausio sit actum. Responsionem ejus hisce adjeci. Ex ea vidi quod etiam Tibi miserit exemplar Diarii, continentis futile aliquid specimen Rollii contra calculum differentialem, una cum Responsione quam ipse Varignonius contra illud paravit et meo judicio solide satis refutavit nugas Rollianas. Non igitur male actum foret nec Varignonio ingratum, si responsionem istam in latinum verti et Actis Lipsiensibus inseri curares.

De vesica pro folle Tuo barometrico etiam ego cogitaveram ante acceptas Tuas, et ejus ope varias alias barometri species sine folle perfici posse vidi; sed etiamsi suppeteret modus aërem sufficienter excludendi, id tamen incommodi restaret, quod omnes vesicae, coria et pelles quamvis marinae extensioni et contractioni sint obnoxiae propter aëris humiditatem, quam facile imbibunt,

unde fieret, ut cum barometro etiam hygrometrum confunderetur. Hoc ut praecaverem, quaesivi modum ampliandi spatium vacuum renitente aëre externo, sine dilatatione alicujus vesicae vel corii; quaerenti venit in mentem, id praestari posse ope syringae, in qua embolus a fundo clauso syringae separatur adhibita potentia aequali ponderi columnae aëris embolo incumbentis, quo pondere mutato et ipsa potentia mutari debet, id quod praebuit occasionem sequenti speculationi. AB (fig. 151.) est syringa sive tubus a parte B clausus, in cujus cavitate embolus E sine ulla frictione liberrime fluere possit, accurate tamen adeo impleat cavitatem tubi, ut arceat aëris ingressum, proinde pauxillum olei embolo superaffundi debet, ut ita embolum ab aëris contactu liberum reddat, partim etiam ut superficiem tubi internam lubricam faciat. V est uncus firmus, ex quo emboli virga est suspensa, P pondus appensum fundo tubi, quod una cum pondere tubi paulo minus sit, quam pondus columnae aëreae embolo incumbentis. CC est catena ex. gr. ferrea ponderi P appensa, cujus pars una recumbit in basin horizontalem H, adeoque pondus P non auget, altera pars catenae pendet adeoque auget pondus P.

Concipe igitur embolum E a fundo B retractum esse per intervallum BE, pondus vero P, pondus syringae et pondus catenae partis pendentis simul tantum esse praecise, quantum est pondus columnae aëreae, manifestum est, ita omnia in aequilibrio mansura; quod si nunc aëris gravitas augeatur, assurget syringa cum pondere P et secum trahet catenam et ita pars pendens fiet longior, donec aequilibrium iterum restituatur; si aër fit levior, patet contrarium evenire debere. Est ergo catena, quae ascensus et descensus moderatur; hinc quo tenuior est, tanto erunt majores, adeo ut pro lubitu sensibiles hujus barometri effectus reddere liceat.

Potest hoc barometrum portatile fieri, si loco ponderis P et catenae C applicetur inter A et E elastrum aliquod, quod sese contrahere conatur, nam contrahetur diminuta aëris gravitate, extendetur aucta eadem. Vel etiam loco elastri poterit appendi pondus P illudque augeri vel imminui per uncias, drachmas, grana, addendo vel demendo, donec embolus incipiat a fundo syringae separari, et ita non tantum habebitur barometrum indicans alterationes gravitatis aëris, sed et simul statera exhibens quovis momento pondus ipsum columnae aëreae. Vidi ejusmodi stateras, quibus merces ponderantur, consistunt nempe in cylindro ferreo

habente in sua cavitate virgulam latentem, qua contracto vel extenso quodam elastro ab appensis mercibus sese exserit et per divisiones notat pondus quaesitum. Liceret hoc barometrum aliis modis construere, multos enim excogitavi, quibus vero exponendis nunc supersedeo.

Quando Dn. Tschirnhausius putat, se invenisse modum assignandi duos arcus in data curva, quorum differentia sit mensurabilis, non dubito quin more suo se ipsum fallat. Si enim hoc generaliter praestare posset, haberet utique rectificationem arcus circularis adeoque et circuli quadraturam, nam differentiae duorum arcuum circularium potest utique facile fieri tertius arcus aequalis.

Non certe difficile erit ex phosphoro meo parare, quaecunque velis, nam inveni modum aërem extrahendi ex vitris cavis, qualiscunque sint figurae, quod forsan ab aliis non facile adeo praestaretur.

Miror Te mihi nunc dicam scribere, quod qualiumcunque mearum meditationum Te non participem reddam, cum tamen Te nihil celaverim hactenus; quantum vero ad meditationes mathematicas, nolui iis Tibi esse molestus, memini enim quod me aliquando monueris, ut Tibi parcerem, dimissis, uti dicebas, ob alia negotia speculationibus mathematicis. Ne vero putes, me Tibi invidisse (quod absit!) en *) quae de multisectione angulorum ad Varignonium scripsi una cum quibusdam problematibus ipsi propositis, sed dubito an iis satisfacturus sit. Si ex hisce aliisve, quae ad Te subinde scribo scripsive, nonnulla digna censeas, quae cum Societate Berolin. communicentur, in Tua est potestate, me hic semel pro semper consentientem habes. Vale etc.

Groningae 10 Juni. 1702.

Beilage.

Demonstratio

Multisectionis Angularis in ratione data sive surda sive numerica insertae Act. Erud. Lips. 1701 m. April. **)

Lemma I.

Rectangulum sub diagonalibus trapezii cujuscunque circulo inscripti est aequale summae rectangolorum sub lateribus oppositis.

---

*) Siehe die Beilage.

**) Vergl. Joh. Bernoull. op. omn. Tom. I. p. 386.

Demonstratio hujus satis nota est, et passim habetur in Trigonometricis.

Lemma II.

Si (fig. 152.) in semicirculo ADB duo habeantur arcus aequales AC, DE, quorum ille diametro sit contiguus, alter ubicunque sumtus, ducanturque subtensae CB, DE, EB ut et CA, DA, EA; dico rectang. sub DB et CB minus rectang. sub AC et AD fore aequale rectangulo sub AB et EB.

Demonstratio. Ob similia Triang. ACF, BDA erit AC : CF = BD : AD et AC in AD = BD in CF; iterumque ob similia Triang. BDA, BEF erit AB : BD = BF : BE, et AB in BE = BD in BF = BD in BC — BD in CF = BD in BC — AC in AD. Q. E. D.

Lemma III.

Positis iisdem, dico fore rectang. sub BD et AC plus rectang. sub BC et AD aequale rectang. sub AB und AE.

Demonstratio. Conjungantur puncta C, D per rectam CD, quae parallela erit ipsi AE, et ducatur DG parallela ipsi AC, quae etiam ipsi AC vel DE erit aequalis, adeoque ducto radio OD, erit Triang. OBD simile Triangulo GDE, ob angulos OBD et DEG eidem arcui insistentes aequales. Hinc OB : DB = DG : GE, et OB in GE = DB in DG, et sumendo utrimque duplum, AB in GE = DB in AC plus DB in AC, addendo utrique AB in AG vel CD, erit AB in AE = DB in AC + DB in AC + AB in CD. Est autem per Lem. I. DB in AC + AB in CD = BC in AD. Ergo AB in AE = DB in AC + BC in AD. Q. E. D.

Demonstratio

Formulae Sectionis angularis.

Hisce praemissis, res ita peragitur. Esto diameter $AB = 1$, subtensa $AC = x$, adeoque $BC = \sqrt{1 - xx} =$ (brev. gr.) y, subtensa $AE = a$, adeoque $BE = \sqrt{1 - aa} =$ (brev. gr.) b.

Ponantur primo arcus AC, DE contigui, evanescente intermedio CD, ita ut arcus AE sit duplus ipsius AC; quo casu rectae AD, AC, ut et BD, BC coincidunt, adeoque, per Lem. II. erit $yy - xx = b$, et per Lem. III. $2xy = a$. Ponatur nunc arcus intermedius aequalis ipsi AC vel DE, ita ut arcus AE sit triplus arcus AC: ergo, per praeced. cas. erit $yy - xx = BD$

et $2xy = AD$. Hinc, per Lem. II. $y^3 - 3xxy = b$, et per Lem. III. $3xyy - x^3 = a$. Si nunc ponatur arcus intermedius CD aequalis duobus arcubus AC, ita ut arcus AE fiat quadruplus ipsius AC; ergo, per secundum casum erit $y^3 - 3xxy = BD$, et $3xyy - x^3 = AD$. Hinc per Lem. II. $y^4 - 6xxyy + x^4 = b$, et per Lem. III. $4xy^3 - 4x^3y = a$. Porro, si arcus intermedius CD aequalis statuatur triplici arcui AC, ita ut arcus AE evadat quintuplus ipsius AC, ergo per tertium casum erit $y^4 - 6xxyy + x^4 = BD$ et $4xy^3 - 4x^3y = AD$. Hinc per Lem. II. $y^5 - 10xxy^3 + 5x^4y = b$, et per Lem. III. $5xy^4 - 10x^3yy + x^5 = a$, et ita quousque libet facile continuabitur. Ubi haec elegans progressionis generatio conspicitur: scilicet sumta potestate binomii $y + x$, cujus exponens sit numerus, quo arcus AE continet arcum AC, erit illius potestatis terminus primus, minus tertio, plus quinto, minus septimo, plus nono etc. $= b$, et terminus secundus, minus quarto, plus sexto, minus octavo, plus decimo etc. $= a$. Quandoquidem igitur sumto numero potestatis indefinito n, sive fracto sive integro, sive surdo sive rationali, erit, ut olim ostendimus, et nunc satis notum $\overline{y+x}^n = y^n + \frac{n}{1} y^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2} y^{n-2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} y^{n-3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} y^{n-4}x^4 + \text{etc.}$ Ergo patet, si AE sit ad AC ut n ad 1 haberi pro indefinita sectione angulari hanc progressionem universalissimam, $b = y^n - \frac{n.1n-1}{1.3} y^{n-2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} y^{n-4}x^4 - \frac{n.n-1.n-2.n-3n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} y^{n-6}x^6 + \text{etc.}$ vel etiam $a = \frac{n}{1} y^{n-1}x - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} y^{n-3}x^3 + \frac{n.n-1-n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} y^{n-5}x^5$ etc. quae duae progressiones omnes aequationes finitas possibiles complectuntur pro quovis numero n integro, sive pari sive impari; hisce enim in casibus abrumpuntur semper progressiones; in reliquis autem abeunt in infinitum. Hinc patent, quae in Actis diximus de hac materia.

Problemes.

1. **Trouver une courbe algebraique avec laquelle un arc de cercle donné pris ensemble soit rectificable.**

2. **Trouver une courbe algebraique, dont les arcs soient proportionels aux segmens de cercle.**

3. Les courbes paraboliques et hyperboliques de quelques degrez qu'elles soient transformer en d'autres courbes algebraiques, en sorte que les arcs des unes soient egaux aux arcs des autres.

4. Ayant donné un polynome elevé à quelque puissance que ce soit, par ex. un trinome elevé à la vingtieme puissance $\overline{a + b + c}^{20}$, on demande son plus grand terme.

5. Ayant donné une progression des nombres naturels elevés à quelque puissance que ce soit, par ex. $1^7+2^7+3^7+4^7+5^7$ .... 100^7, qui est la progression de $1+2+3+4 \ldots\ldots + 100$ continuée jusques au centieme terme, et dont chaque terme est elevé à la septieme puissance, on en demande la somme sans beaucoup de calcul.

6. Ayant donné une quantité differentielle $\frac{p\,dx}{q}$ (j'entends par p et q des grandeurs rationnelles formées de x et de constantes de quelque maniere qu'on puisse concevoir) il en faut trouver l'integrale, ou du moins les reduire à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, car l'un ou l'autre se peut toujours. C'est là dedans que consiste le grand mystere des quadratures et des rectifications, et des reductions aux expaces circulaires et hyperboliques, c'est ce qui a été desiré de tout temps.

J'ay resolu tous ces problemes-là, mais en voyey un qui paroit leger, qui fait pourtant de la peine.

7. Deux nombres étant donnés m et n, trouver un quarré xx qui fasse avec chacun un quarré parfait, sçavoir $m + xx =$ à un quarré, et $n + xx =$ à un autre quarré.

CXLVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratias ago, quod literas Varignonianas mecum communicasti, quas statim remitto. Vellem et ipse refutationem Rollii latine inseri Actis Lipsiensibus.

Etsi Dn. Tschirnhausius nullas demonstrationes communicaverit Academiae Scientiarum Regiae, vellem tamen saltem discere possemus propositiones, quas se invenisse dixit. Unam invenies in

Novis Reipublicae Literariae a Bernardo editis (ubi de vitro ejus caustico in Gallia vendito mentio est) quae mihi ad id, quod nuper scripsi, redire videbatur.

Barometri portatilis causa follem clausum potius, quam embolum ideo adhibui, quia frictione continua mox corium, vel quod ejus loco est, atteritur, ita ut variet resistentiae motusque facilitas, donec tandem aër plane interlabatur; et cum reparetur clausura (quam reparationem in antliis artifices vocant Liederung) initio semper major est difficultas, quae diminuitur temporis tractu. Follem autem vellem adhiberi metallicum, in quo plicae a chalybeis laminis suppeditentur. Ita cessabunt, quae metuis. Interea tentamenta fieri possunt in follibus coriaceis vel membranaceis.

Gratum est, quod Dno. Varignonio communicata etiam ad me pervenire jam pateris. An unquam, ut innuis, significavi mihi molestas esse has communicationes? Si veniam aliquando petivi, quod vel otio vel pristina animi alacritate destitutus, Tibi commode satisfacere aut vacare pro dignitate novis meditationibus non potui, an ideo sequitur, eas a me sperni, aut non libenter cognosci? Interim etsi in novis sim tardior, tamen puto me ex olim mihi repertis posse satisfacere plerisque Tuis sane egregiis problematibus et aliis non paulo adhuc generalioribus.

Primum, secundum, tertium in potestate habeo. Quartum non satis intelligo; quid scilicet voces maximum terminum? Puto in ipso et in quinto compendia quaedam pulchra succurrisse Tibi, qualia magnifacere soleo, etiam cum aliter (sed prolixius) res haberi potest. Itaque pergrata erit solutio.

Sextum problema non tantum habeo, sed etiam ita habeo, ut jam a primis meae Geometriae altioris annis mihi fuerit constitutum, tanquam Scientiae infiniti meae analyseosque adeo summatoriae pars non parva. Et sperabam prosequi satis, inque id tempus editionem distuleram, ut aliquid meae Scientiae infiniti servarem; sed cum videam, quam multa alia mihi supersint agenda, et quam non debeam a me sperare, in quibus prolixiusculi calculi desiderantur, non ita pridem decreveram publicare hoc quoque artificium, inque id expedieram breve schediasma aliis excitandis. Unde haec accipe, cum nemo melius uti possit.

Nempe dudum inveni Analysin omnium Quadraturarum rationalium (uti appellare soleo) quae, ut verbo dicam, nititur divisoribus formulae cujusque rationalis unicam indeterminatam continentis.

Qua ratione fractio omnis denominatoris compositi potest resolvi in aliquot fractiones rationales nominatorum simpliciorum. Esto fractio $\frac{1}{xx+..x+..}$ vel $\frac{1}{x^3+..xx+..x+..}$ vel $\frac{1}{x^4+..x^3+..xx+..x+..}$, talis denominatoris radices vel divisores sunt l, m, vel l, m, n, vel l, m, n, p, et ita porro. Posito $l=x+b$, $m=x+c$, $n=x+d$, $p=x+e$ etc. ubi nihil refert, determinatae b, c, d, e etc. sint rationales an irrationales; analysis enim nostra superior inferiorem, nempe resolutionem formularum in divisores, quae eadem est cum resolutione aequationum in radices, supponit. His positis hanc reperi regulam: $\frac{1}{lm}=\frac{1}{c-b,l}+\frac{1}{b-c,m}$, $\frac{1}{lmn}=\frac{1}{c-b,d-b,l}+\frac{1}{b-c,d-c,m}+\frac{1}{b-d,c-d,n}$, et $\frac{1}{lmnp}=\frac{1}{c-b,d-b,e-b,l}+\frac{1}{b-c,d-c,e-c,m}+\frac{1}{b-d,c-d,e-d,n}+\frac{1}{b-e,c-e,d-e,p}$, et ita porro. Fractiones autem, quarum numerator non est unitas vel constans, sed aliqua formula rationalis ex potentiis ipsius x conflata, veluti $\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{lmnp}$, resolvi poterit in tot fractiones, quot membra habet numerator, ut $\frac{\alpha}{lmnp}+\frac{\beta\beta}{lmnp}+\frac{\gamma xx}{lmnp}$, et harum quaelibet rursus resolvi potest in fractiones simplicis denominatoris hoc modo: $\frac{\alpha}{lmnp}$ jam est resoluta, $\frac{x}{lmnpq}=\frac{1}{mnpq..}-\frac{b}{lmnpq..}$, et $\frac{xx}{lmnpq..}=\frac{1}{npq..}-\frac{b+c}{mnpq..}+\frac{bb}{lmnpq..}$, et $\frac{x^3}{lmnpq}=\frac{1}{pq..}-\frac{b+c+d}{npq..}+\frac{bc+bb+cc}{mnpq..}-\frac{b^3}{lmnpq..}$, et $\frac{x^4}{lmnpq..}=\frac{1}{q..}-\frac{b+c+d+e}{pq..}+\frac{bc+bd+bb+cc+dd}{npq..}-\frac{bbc+bcc+b^3+c^3}{mnpq..}+\frac{b^4}{lmnpq..}$ et ita porro, quae omnes fractiones in valoribus, cum numeratores habeant constantes, rursus ut jam ostensum, in fractiones simplices resolvi possunt. Habemus ergo omnium fractionum rationalium reductiones ad has: $\frac{1}{x+b}$,

$\frac{1}{x+c}$, $\frac{1}{x+d}$ etc. seu $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ etc.; sed quia interdum radices formularum sunt imaginariae, hinc pro divisore assumi potest factum ex ipsis reale, v. g. si inter divisores simplices sint duo $\frac{1}{x+\sqrt{-1}}$ et $\frac{1}{x-\sqrt{-1}}$, adhiberi potest factum ex ipsis $\frac{1}{xx+1}$, et si adesset $\frac{1}{xx+\sqrt{-1}}$ et $\frac{1}{xx-\sqrt{-1}}$ adhiberi potest $\frac{1}{x^4+1}$. Itaque licet, cum divisor est $\frac{1}{xx+1}$, non possit reduci res ad quadraturam hyperbolae, quia hujus formulae $xx+1$ radices sunt imaginariae, res tamen reduci potest ad aliam simplicem quadraturam, nam, ut olim inveni primus, cum meam quadraturam arithmeticam darem, $\frac{1}{xx+1}$ summatur per quadraturam circuli, aut vice versa.

Sed latet in his arcanum adhuc majus. Quoniam, ut olim etiam inveni in aequationibus et calculo singulari comprobavi, possunt imaginariae non minus quam reales in Analysi aequationum recte et utiliter adhiberi; ideo idem feci etiam in Analysi Tetragonistica et quadraturas rationales reduxi ad logarithmos vel veros vel imaginarios, ipsamque adeo circuli quadraturam, non una ratione. Eaque ratione expressiones transcendentes summatorias seu quadratorias transfero ad exponentionales, quae maxima est perfectio Analyseos Transcendentis. Nam quae in calculo summatorio vel differentiali vel infinitesimali incognitae exhibentur, non possunt ex eo tolli, licet enim incognitam quaesitam determinet curvarum Tuarum Transcendentium, vel Transcendentis et ordinariae intersectio, non tamen ideo analytice descendi potest ad valores specialium incognitarum. Ex. gr. sit $\int\sqrt{aa+xx}\,dx = ax+yy$, et

$$\int\sqrt{aa+yy}\,dy = \int\sqrt{az+zz}\,dz + ab \text{ et } \int\sqrt{ab+zz}\,dz = ax,$$

patet nullam incognitarum posse tolli. Licet enim $x = \int\sqrt{ab+zz}dx : a$ posset substitui in $\sqrt{aa+xx}$ et in ax, tamen non potest substitui in dx. Id enim succedit tantum, cum loca se tangunt, non vero cum se secant. At Analysis exponentialis, cum nos liberet ab ipsis dx,

rem eo reducit, ut possimus tollere incognitas, velut in Algebra; et licet logarithmi vel exponentiales fiant imaginarii, id tamen pro analysi non nocet. Et imaginariae valorem realium ingredientes virtualiter destruuntur compensatione, atque inde etiam duci possunt constructiones imaginariis carentes.

Superest ergo ad perficiendam Analysin quadratoriam, ut quadraturae irrationales reducantur ad rationales. Quod sane jam desiderari animadverti, ex quo meam inveni Quadraturam Arithmeticam. Et hinc primo aspectu statim vidi, quid Tibi velis, quam quaeris xx talem, ut $am + xx$ et $an + xx$ sint quadrati, seu cum quaeris quadratum, quod datis duobus numeris additum, cum unoquoque faciat quadratum. Ita enim habetur reductio curvae Ellipseos et Hyperbolae, similiumque Problematum Tetragonisticorum ad quadraturam circuli aut hyperbolae. Et sane cum mihi olim videretur reductionem ad rationales, saltem quoad ipsas indeterminatas (nam constantium irrationalitas non curatur) ob hoc ipsum semper posse praestari, nec rem ipsam fuissem aggressus, spondebam dimensionem curvae hyperbolae aequilaterae, idque scripseram in Epistola antiqua, quam edidit Wallisius, quod in ea nescio quae facilitas peculiaris tunc occurrere visa esset, postea in Actis Eruditorum, cum quadraturam cujusdam curvae, qualis est $\sqrt{a^4 + x^4}$, ni fallor, quaereret Dominus Frater Tuus, innuebam me eam habere in potestate. Sed cum tandem rem essem aggressus, difficultatem opinione majorem deprehendi. Itaque cum jam idem tentes, convocandae sunt copiae nostrae in unum, ut quantum licet progrediamur. Sane hoc problema, ut $am + xx$ et $an + xx$ sint quadrati, habeo cur credam, non posse indefinite solvi: multisque aliis tentatis, reductio dimensionum curvae ellipticae aut hyperbolicae ad quadraturas rationales hactenus non successit, ne interventu quidem imaginariarum. Itaque nondum constat, an hoc semper sit possibile. Quodsi rem ex voto promoveris, aliquid insigne praestabis. Aliquam ego promotionem dedi, dum adhibui summandas ordinatas, quarum partes sunt ad rationales summandas revocabiles; ita enim erit et totum, v. g. si sit $fy : a = \sqrt{ab + cx + xx} + \sqrt{al + mx + xx}$; sublata enim irrationalitate habetur aequatio, in qua $yyxx$, yyx, xx, x, y^4, yy. Unde habetur summatio ipsarum x seu $\int x\,dy$, qui habetur summatio

ipsarum y (seu $\int y\,dx$), quae y sunt dupliciter exprimibiles, tum per partes duas irrationales, ut factum, tum etiam per radicem universalem, : quae cum per se summando sit intractabilis, reducitur hoc modo ad duas partes in summando tractabiles. Unde utile nobis considerare etiam diversos modos exprimendi eandem radicem. Reperi etiam etsi $x^{2e}\sqrt{}(xx+ab, :, xx+ac)$ nondum possit reduci ad rationales quadraturas seu summandas, tamen eo reduci posse $x^e\sqrt{\frac{xx+ab}{xx+ac}}$ seu summari posse rationaliter $\int x^e dx \sqrt{\frac{xx+ab}{xx+ac}}$, posito e esse imparem. Nam v. g. ponendo $xx=ay$, fiet $\frac{1}{2}\int a\,dy\sqrt{\frac{y+b}{y+c}}$. Taliaque multa inveni, sed nondum mihi generaliter satisfeci. Plurimum autem mihi spondeo ab ingenio Tuo, praesertim cum ipse rem sponte aggressus sis; nam si mea tantum commendatione fecisses (de quo saepe cogitaveram) fortasse minus alacriter institisses.

Unum interim Tibi considerandum commendo, a quo nonnihil spero. Quaeritur $vv+ab$ et $vv+ac$, ita ut prius aequetur vel potius identificetur ipsi ☉☉☿ : a, posterius ipsi ☽☽☿ : a; patet productum eorum invicem aequari quadrato, quod sufficit, etsi singula quadratis non aequentur. Hoc ut praestetur, sumo $l=x+f$, $m=x+g$, $n=x+b$ et $v=112\sqrt{}lm+113\sqrt{}ln+123\sqrt{}mn+100a$, et ☉ $=210\sqrt{}al+220\sqrt{}am+230\sqrt{}an$ et ☽ $=310\sqrt{}al+320\sqrt{}am+330\sqrt{}an$, et ☿ $=412\sqrt{}lm+423\sqrt{}mn+400a$. Hoc modo explicando et valorem $avv+aab$ comparando cum valore ☉☉☿, et valorem $avv+aac$ cum valore ☽☽☿, habebitur desideratum, ubi in calculo compendia dabunt homoeoptota, ut sic dicam, et coefficientes numeris fictitiis relationes indicantibus expressi. Pro comparatione autem seu identificatione poterunt inveniri valores l et m per n, ut ita inveniatur n per constantes, sed in ultima aequatione, ubi fieret v. g. $\lambda n+\beta\alpha=0$ positis λ, β, α constantibus, oportet facere $\lambda=0$ et $\beta=0$, ut n maneat indeterminata, quod continget bis. Reliquae aequationes comparatitiae seu identificatoriae praestabuntur ope constantium seu coefficientium assumtarum 112, 113 etc. His obtentis habebitur $\int dv\sqrt{}(vv+ab,\ vv+ac)$ per formulam constantem

ex ... $\sqrt{l}\,m$ + ... $\sqrt{l}\,n$ + ... $\sqrt{m\,n}$ + ... quae revocari potest ad quadraturas rationales, cum quaevis pars eo revocari possit. Calculum autem absolvere non licuit. Absolvissem, si olim venisset in mentem, sed ab aliquot annis imparem me sentio calculis prolixioribus. Sed tempus, ut finiam.

Habui et ego olim singulare aliquid et utile circa Sectiones angulares. Praecedentibus scripsi Dn. Varignonio. Prima aequatio Rolliana expediri potest methodo tangentium vulgarissima. Parentii Liber merito examinaretur; dudum animadverti affectare eum, ut multa et magna invenisse credatur. At Liber ejus dudum cognitis innititur, quibus an recte sua inaedificarit, dicere non habeo. Vale et me ama etc.

Luzemburgi prope Berolinum in Palatio Regiae 24 Junii 1702.

P. S. Quae me voles, Hanoveram rogo mittas more solito.

CXLIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ecce hic literas a Voldero. Tuas priores 24 Maji datas per amicum illum accepi recte, sed nonnihil sero. Bayliani Dictionarii alteram editionem nondum vidi; quae ad replicationem Auctoris Tibi factam es repositurus et ad me missurus, curabo pro nutu promtissime.

Penitus sum ignarus eorum, quae Gouius Jesuita in Trevurensi Diario, Marchioni Hospitalio objecit; ea quidem scire desiderarem, nam Diarium illud, ut multa alia quae nunc passim eduntur, huc non perveniunt. Nunquam et nusquam tanta novorum literariorum penuria laboravi, quam hic Groningae; etiam ut videtur cessat Dn. Menkenius Acta Lips. mihi transmittere, tota enim hoc currente anno nihil eorum vidi; an gratia ipsius exciderim, quod forte meo nomine nonnihil vehementius increpaveris recusantem animadversiones meas in fratris methodum isoperimetrorum et in Fatii responsionem Actis suis inserere; an vero alia causa subsit, me prorsus latet.

Quae desideravi in Groningii Historia Cycloidis, perscripsi in literis ad Te datis die 8 Octobr. 1701, cum Tibi simul transmit-

terem literas gratiarum actionis ad Societatem Brandebourg. Si ea in altera suae historiae parte, quam meditatur, supplere velit, faciet quod aequitas postulat, ut suum cuique tribuatur; alias praestat ut in recensionibus suis literariis nihil amplius de cycloide dicat, quam ut male recensoris officium adimpleat, ut in priori parte fere factum est.

Haec ad priores Tuas sufficiant; quantum ad alteras 24 Jun. datas, si refutationem Rollii latine inseri Actis Lips. cupis, id Tibi curandum incumbit, vereor enim ne meum cum Menkenio commercium sit jam plane abruptum. Ursi Varignonium, ut nos compotes reddat propositionum Tschirnhausianarum cum Academia Scientiarum quamvis sine demonstratione communicatarum. Gaudeo quod problemata mea, quae jam ante complures annos solvi, Tibi non displicuerint. Per maximum terminum polynomii alicujus ad datam potentiam elevati intelligo illum, qui in actuali elevatione ad potentiam datam caeteris major deprehenditur, ex. gr. si binomium $a+b$ elevetur actualiter ad 4^{tam} potentiam, provenient hi quinque termini $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$; si nunc a ad b sit ut 1 ad 1, maximus eorum terminus erit medius $6aabb$; si a ad b ut 2 ad 1, maximus erit secundus $4a^3b$, ut et si a ad b sit ut 3 ad 1; si vero a ad b sit ut 4 ad 1, duo erunt maximi termini, nempe primus et secundus, a^4 et $4a^3b$; si vero a ad b sit in alia quacunque majore ratione, maximus terminus erit semper primus a^4. Quaeritur itaque modus maximum terminum determinandi in polynomiis ad quantamvis altam potentiam elevandis, ex. gr. sit trinomium elevandum ad 20 potestatem $\overline{a+b+c}^{20}$, et sint a, b, c ut 3, 2, 1, exhibendus est terminus, qui inter omnes maximus est. Non dubito quin nunc facile sis soluturus, praesertim cum Tibi jam innotescat, quomodo dati termini sit coëfficiens determinandus. Quantum ad sextum problema, credebam me primum fuisse, qui id excogitaverim et solverim, ideoque illud jam per tres fere annos tanquam mysterium abscondidi, puto et Te eodem modo animatum fuisse. Cum vero Tuam methodum publicare decreveris, absurdum foret, si meam diutius supprimere vellem; mitto igitur illam excerptam ex adversariis meis, prout olim in chartam conjeceram, rogo ut illa cum Tua in lucem compareat, et si forte Tua jam sit edita, testimonio Tuo confirmabis, quod meam invenerim sponte et nec Tuo nec alius hortatu interveniente, ut et diu antequam quicquam de Tua publicanda cogitasses. Me-

mini Wallisium alicubi dicere, quod invenisse sit ingenii, sed primum invenisse fortunae; fortunae igitur, si non aetati, ascribendum, quod non primus inciderim in hoc inventum. Si meum schediasma, ad Acta Lips. miseris, optarem ut id fiat quasi Tuo motu et me inscio, ne Dn. Menkenius putet, me sibi invito aliquid velle obtrudere, nollem enim novam repulsam ferre. Caeterum quamvis nostrae methodi in fundamentis conveniant, scilicet in resolutione fractionum compositarum in simplices, agnosces tamen, ut spero, meam ad praxin commodiorem, eo quod fractionem non tantum denominatoris, sed etiam numeratoris compositi citra aliam resolutionem vel praeparationem, statim in simplices resolvo, ad quas per Tuam non pervenis, nisi duabus tribusve resolutionibus generalibus et postea pluribus aliis particularibus factis, quod mihi laborem in immensum adeo producere videtur, ut non videam, qua via quave patientia se quis ex calculo extricare possit. Ita aequationem $\frac{dy}{y} = \frac{-2z^3 - zz}{z^4 + z^3 - 1} dz$ pro trajectoria hyperbolarum resolvi equidem in simplices, quamvis operose satis, sed si Tuam regulam sequi vellem, immergerer in calculum, unde forte nunquam redirem. Fortassis autem sunt Tibi quaedam compendia pro calculi abbreviatione, quae ego nondum perspicio.

Rectissime conjecisti, quod per problema, quo quadratum quaero, quod datis duobus numeris adjectum cum unoquoque faciat quadratum, nihil aliud intenderim, quam reductionem curvae ellipseos, hyperbolae et similium problematum tetragonisticorum. Verissimum est primo aspectu videri rem facilem esse, sed tamen jam olim ea in re magnam difficultatem inveni; hinc, si meministi, Te monui in Actis 1695 pag. 64. ut dares demonstrationem ejus, quod dixisti in Actis anni praeced. pag. 370 $\int dx\sqrt{a^4 + x^4}$ dependere ab extensione curvae hyperbolicae, cum ego ab extensione curvae parabolicae cubicalis primae dependere ostenderim. Quando vero de aliis hujusmodi quadraturis loquens dicis loco citato „quomodo autem hae duae quadraturae conicis dimensionibus respondeant, alias ostendam“ credo Te tunc respexisse ad modum reducendi indeterminatas irrationales ad rationales, quas nunc ostendimus per conicas dimensiones construi posse. Tecum omnino sentio, hoc problema, ut $am + xx$ et $an + xx$ sint quadrati, indefinite non posse solvi, sed hujus de-

monstrationem optarem. Non putem ego aliquid praestari posse ponendo $vv + ab = \odot\odot☿ : a$, et $vv + ac = ☽☽☿ : a$, et sumtis $l = x + f$, $m = x + g$, $n = x + h$, faciendo $v = 112\sqrt{lm} + 113\sqrt{ln} + 123\sqrt{mn} + 100a$ et $\odot = 210\sqrt{al} + 220\sqrt{am} + 230\sqrt{an}$ et $☽ = 310\sqrt{al} + 320\sqrt{am} + 330\sqrt{an}$ et $☿ = 412\sqrt{lm} + 413\sqrt{ln} + 423\sqrt{mn} + 400a$. Praeterquam enim quod calculus esset immensae prolixitatis, miror quod dicas, calculo peracto haberi $\int dv\sqrt{\frac{vv + ab}{vv + ac}}$ per formulam constantem ex $..\sqrt{lm} + ..\sqrt{ln} + ..\sqrt{mn} + ..$, cum tamen manifestum sit formulam illam fore aliam fractionem constantem ex

$$\frac{..\sqrt{lm} + ..\sqrt{ln} + ..\sqrt{mn} + ..}{..\sqrt{lm} + ..\sqrt{ln} + ..\sqrt{mn} + ..}$$

quae priore longe difficilior erit. Tandem etiam in hujusmodi suppositionibus plerumque accidit, ut plures proveniant aequationes comparatitiae seu identificatoriae, quam habentur coefficientes assumtae, ita ut res abeat in plusquam determinatam seu impossibilem. Hoc in aliis occasionibus saepius mihi contigit. Verissimum est et facile patet, quod dicis $\int x^e dx\sqrt{\frac{xx + ab}{xx + ac}}$ (posito e numero impare) posse reduci ad quadraturas rationales; hoc artificium aliaque multa huic affinia jam diu inveni. Sic eadem arte determinavi in Actis 1693 pag. 53, quibus casibus $\int dx \frac{x^n}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$ sit algebraicum, et quibus ad circuli quadraturam reducibile.

Per Amicos illos reduces ex Batavis (qui literas Tuas mihi tradiderant) misi Tibi ante duas hebdomadas, si bene memini, fasciculum continentem Iconem syringae illius tuborum flexilium, qua utuntur hic ad restinguenda incendia; internam structuram facile imaginatione supplebis, nihil enim singulare habet. Adjeci quaedam scripta mea adversariis meis opposita, ut videas quid agam vel potius quid patiar; miraberis forsan acerbitatem styli, sed scias hoc fere unicum remedium esse, quod omnium ultimo arripui, quo inimicorum furorem nonnihil compescere potui. Vix credo fuisse aliquem ab Apostolorum tempore in hunc usque diem, qui a fratribus suis majorem persecutionem perpessus fuerit, quam mihi toleranda est ab imperitis Osoribus et pessimis Hypocritis. Quod dixi, animae operationem in corpus non consistere in influxu quo-

dam, sed tantum in consensu et concursu actionum utriusque sua propria principia sequentis, quam etiam Tuam esse sententiam scio, ex ea faciunt nescio quam haeresin et Beckerianismum; ut et quod dixerim, corpus non posse peccare, voluerunt me ad rogum damnare; dicunt philosophiam et mathesin nostram evertere theologiam. Ita vides, quo pacto me oporteat tempus terere. Vale etc.

Groningae d. 12 Aug. 1702.

CL.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non dubito, quin nuperas meas cum meditationibus quibusdam meis circa Analysin Tetragonisticam acceperis. Nunc ad Te mitto adjunctis pro clarissimis Viris Voldero et Baylio, rogoque ut illi mittas tam suas, tam quas alteri destino literas, cum replicatione ad ea, quae in iterata Dictionarii sui editione reposuit meis; rogesque mecum Volderum, ut Baylio literas suas cum scripto meo lecto et expenso transmittere mihique judicium suum aperire velit, quemadmodum et Tuum flagito. . . . .
Interea vale et me ama etc.

Dabam Berolini 19 Augusti 1702.

CLI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Intellexi jussisse Regem Prussiae, ut Tibi Nummus aureus mittatur pondere circiter 40 Ducatorum. Dabo igitur operam, ut urgeatur executio, et Nummum, ubi nactus fuero, ut recipias faxo. Hoc volui ne nescires, quanquam sciam Te magis honorem in munere Regio, quam pretium pecuniarium aestimare.

Spero scriptum meum ad Te pervenisse, quo Baylianis objectionibus respondeo. Rogoque ut sententiam Tuam mihi indices, saltemque significes quamprimum, utrum Tibi sit redditum, quo

sim eo nomine extra metum. Spero et Dn. Volderum mentem suam aperiturum.

Nonne notus est Tibi Dn. Pitcarnius, Scotus, Medicus Lugduni-Batavorum docens ac Medicinam faciens. Hunc aiunt insignem esse etiam in re mathematica. Nuper Libellum medicum edidisse dicitur.

Davidis Gregorii Astronomicum Opus prodiisse puto. Credo velut commentarium esse in Hypotheses et ratiocinationes Newtoni circa Systema Corporum Coelestium. De caetero ad priores me refero. Vale etc.

Dabam Luzemburgi prope Berolinum 2 Septembris 1702.

CLII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ut Te a metu liberem, promtissimus sum in respondendo ad novissimas Tuas, nudius tertius acceptas. Significo itaque rectissime ad me pervenisse scriptum Tuum, quo Baylianis objectionibus respondes, quod postquam a me summa attentione perlectum fuisset, statim misi ad Cl. Volderum et rogavi, ut sibi pariter lectum porro cum literis ad Baylium ipsum transmitteret; neque dubito quin omnia ex voto Tuo jam sint curata. Quae in scripto illo reperi, profundam meditationem spirant eamque sane pertinacem, ut merito mirer, qui ingenium diu multumque adeo in abditis istis macerare nec tamen defatigari potueris. Delectabar valde inter legendum, cum multa reperirem meis quondam speculationibus consona: quae enim habes de unione animae et corporis, iis omnino assentior, imo hic in Disputationibus publice defendi, quamvis hinc gravissimae lites cum nonnullis Theologis ortae mihi fuerint, quae tanto cum fervore grassabantur, ut me tanquam Haereticum in scriptis et concionibus publice traducerent, sed ad suam propriam ignominiam, nam praeterquam quod ipsis non peperci, ut videbis ex scriptis quibusdam meis, quae nuper ad Te misi, etiam ipsi Provinciae Ordines meas secundarunt partes et Persecutoribus meis silentium imperarunt. Explicavi illam unionem animae et corporis per modum Harmoniae, plane ut Tu facis, et in-

tellexi postea ex quibusdam Cartesianis, neque se rem aliter considerare, adeo ut illorum via assistentiae, ut vocas, prorsus congruat cum via Harmoniae; volunt enim Deum creasse animam cum omnibus suis ideis, quae successive se mutuo producendo vel, ut Tu vocas, evolvendo praecise concurrant cum certis quibusdam motibus, qui successive pariter in corporibus producuntur, ita ut necesse non sit, animam movere corpus vel vicissim corpus transmittere perceptiones ad animam. Usus sum similitudine (ni fallor) Tua duorum horologiorum, quae horas indicando perfectissime conspirare possunt, absque tamen eo ut se mutuo moveant, sed hoc ipsum est, quod Adversarii mei dixerunt esse detestandum Beckerianismum. Ex nostra igitur sententia anima suas habet perceptiones ac si nullum esset corpus, et corpora ita moventur ac si nulla esset anima; non est proinde realis dependentia inter corpus et animam, sed relativa tantum. Haec per se sunt clara. Sed hinc sequi videtur, propter id ipsum nullo opus esse principio activo vel entelechia, cum enim nihil sit in universo, quod agat aliquid extra se, nisi velimus admittere rerum influentiam, quam Tu ipse rejicis. Non satis concipere possum verba Tua, quando dicis, punctum aliquod massae tendentiam habere secundum tangentem curvae praestabilitae, sed entelechiam esse, qua punctum hoc dirigat secundum curvam praestabilitam: agit ergo entelechia in punctum, sed quomodo? An per influxum? non, hunc enim negas; an per harmoniam? si hoc, erit relatio tantum, quae in re nihil mutat. Adeoque punctum illud massae secundum praestabilitam curvam moveretur, etiamsi nulla adesset entelechia, quae praestabilitam curvam meditatur. Dico: meditatur, videris enim ei cogitationem ascribere, dum dicis massae punctum per se et sine entelechia non habere memoriam. Vellem etiam scire, cur anima nostra non eandem habeat praerogativam, quam quaevis entelechia, quae juxta Te (si mentem Tuam bene capio) aliud nihil est, quam anima minus perfecta, cum entelechia sit principium activum et potest realiter agere in massam, uti statuis; anima vero extra se nihil valeat, imo ne minimum quidem punctum massae movere. Caeterum elegantia sunt, quae habes de speculo vel imagine universi, in qualibet anima vel entelechia existente, ita ut in toto universo nihil peragatur, cujus nos non habeamus perceptionem; nam propter divisionem et continuitatem materiae minimus motus in remotissimo loco ad corpus nostrum propagatur, unde

in mente propter eorum harmoniam praestabilitam quaedam perceptio oritur.

Pitcarnius Scotus mihi notus est de fama, sed Medicinam Lugduni non docet. Erat quidem invitatus ad docendum et acceptavit Lugdunumque se contulit, sed vixdum aggressus erat Professionem, cum venia impetrata repeteret Scotiam, se brevi rediturum promittens; sed postea ducta uxore in patria et ab ea retentus fidem liberare non potuit. De libello, quem edidit, nihil audivi. Quod sit mathematicus, discere potui ex Dedicatione Bellini, Medici Itali, Pitcarnio inscripta.

In responsione Tua ad Baylium vidi Te agentem de ludo aleae et concertationibus, et variorum, qui de ea re scripserunt, mentionem injecisti. Sed miror, quod nihil dixeris de Caramuele, qui copiose et erudite hanc materiam pertractavit, quamvis nonnullos paralogismos subtiles in eo animadverterim. Non enim dubito quin ejus Mathesis Biceps Tibi sit visa. Scripsit post Hugenium, nam hujus dissertationis de ratiocinio in ludo aleae meminit.

De Davidis Gregorii Astronomico opere haud valde magnam opinionem concipio, postquam ejus crassa sophismata circa Catenariam videre mihi contigit.

Gratias Tibi ago, quanto possum opere, pro opera Tua, quam sollicite adeo impendis ad procurandum mihi munus Regium (uti innuis) valde pretiosum, quod non minus honorificum mihi erit. Colligo hinc Tuum in me singularem benevolentiae affectum, quem quovis tempore et modo demereri conabor.

Miror quod novissimas meas, quas Hanoveram (uti in praecedentibus me jusseras) inscripsi, nondum acceperis. Continebant inventa mea circa analysin tetragonisticam, quae cum Tuis in lucem edi rogabam, aut si Tua jam essent publicata, ut mea tamen ederes adjecto Tuo testimonio, quod proprio meo Marte in hanc speculationem inciderim, de Tuis nihil adhuc nec viso nec audito. Significa quaeso an literae illae ad Te pervenerint, et judicium Tuum perscribe. Vale et fave etc.

Groningae d. 16 Septem. 1702.

Hoc ipso momento rumor (utinam verus!) ad nos pervenit de capto Landavio.

CLIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Serenissimus ac Potentissimus Prussorum Rex fundatae a se Scientiarum Societati jura daret, in se recepit praemia illis nonnulla persolvere, qui insigni aliquo invento thesaurum humanae cognitionis locupletassent. Id cum a Te novo Phosphori genere, quem parare in potestate esset, et in multa, ut apparet, secula proferre salvum liceret, factum esse constaret, ego, cui Societatis cura a Rege commissa est, Regio verbo insistens, facile obtinui, ut Nummus aureus quadraginta circiter Ducatorum, quos vocant, pretium aequans, pro Te mihi traderetur, quem nunc transmitto.

Rex, in quo moderatio animi par est generositati, non putat aequari muneribus posse inventarum rerum dignitatem, sed suam erga egregios Viros ostendi propensionem. Quod superest, vale, et Societatis nostrae, unde salutaris, praeclara consilia Tibi mecum commendata habe.

Dabam Berolini 24 Augusti*) 1702.

P. S. Consultum erit, ut literis datis Regi gratias agas, acceptumque Tibi munus testeris.

Rogo etiam, ut significes an Tibi redditae sint meae, quibus inerat responsio ad Cl. Baylium in nova Dictionarii sui editione quaedam iterum meo systemati philosophico objicientem, quam petebam et Cl. Voldero communicari, ejusque ope ad Dn. Baylium dirigi.

CLIV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Dubius haerebam per aliquot hebdomadas, an adjectas hasce Baylianas et Volderianas dimitterem, metuens quippe ne non ad Te rite perveniant literae meae, binas cum Tibi scripserim, ad qua-

*) Muss 24 Septemb. heissen.

rum neutras responsionem accepi hactenus. Interim ne forte officii erga Te neglecti reus videar, diutius cunctandum non censui. Retineo tamen Tuum illud scriptum, quo Baylio ad objectiones respondes et quod una cum literis suis remisit, donec ex Te rescivero, quid de eo factum velis. Rescribe ergo quantocyus, rogo, ut de voluntate Tua mihi constet, simul et ut securus sim de hisce et praecedentibus meis, ut spero, non perditis, ad quas me nunc refero, plura non addens, nisi quod jussa Tua avide expectem, qui sum ad quodvis officii genus paratissimus etc.

Groningae d. 28 Octobr. 1702.

Volderus concedit corporum entelechiam, si per eam aliud nihil intelligendum est, quam vis primitus impressa, sed negat eam corpori esse essentialem, et vel ideo quoniam si impressa fuit, iterum ex eo possit tolli et destrui. Alia quaedam habet a meis, quae nuper monui, haud multum abludentia.

CLV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Tibi et Dno. de Volder ample respondere sperarem, impeditus nunc quidem et distractus respondeo tantum, omnia bene reddita esse, et me mox amplius responsurum. Interea significo Numisma Aureum Regis, de quo distinctius Tibi dudum scribere memini, missum esse Amstelodamum, ad Dn. Halmam, Bibliopolam celebrem, a quo nomine Tuo peti potest. Haec festinus.

Dabam Berolini 14 Novembris 1702.

P. S. Scriptum a Dno. Baylio remissum rogo ut interim serves.

CLVI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Accepi cum literis Tuis datis 24 Augusti (nisi forte 7^bris^) elegantissimum illum Nummum Aureum, quem Potentissimus Rex Prussiae mihi, in Phosphori inventi memoriam mitti jusserat. Ex

dono hoc pretioso colligere licet, quanta propensione affectus sit erga rerum pulchrarum inventores, quamvis inventum meum tanti non sit, ut in eorum numero habear, in id tamen incumbam ut aliquando favore Regio me dignum reddam. Rogavi Nob. Jablonsky, ut per occasionem Regi gratum meum animum aperire velit. Tibi quoque me devinctum sentio, quippe qui scio, quod ex Tua potissima commendatione hoc honoris mihi contigerit. Non est quod multis mihi commendes Societatis nostrae consilia; nam si quid in me est, quod valeat ad ejus commodum curandum, ex officio contribuere teneor, etsi non rogatus. Spero me communicaturum nova experimenta, occasione Phosphori mei perpetui instituta, quibus rationes meae de causa hujus luminis, a Gallis quibusdam etiamnum negata, mirifice confirmantur. Ab aliquo tempore tribus vicibus trinas ad Te dedi literas, sed nihil hactenus responsi accepi. Direxi illas omnes Hanoveram, ut me jusseras; haud dubie ibi haerent, nisi (quod non sperem) interciderint. Ex postremis earum, quibus adjectae sunt Responsiones Cl. Volderi et Baylii, videbis me non tantum scriptum Tuum ad Baylium rite curasse, sed etiam idem illud ab eo et per Volderum mihi remissum esse, quod nunc retineo, donec quid de eo factum velis mihi constiterit; quod ubi rescivero, nulla in me mora erit, sed ad nutum Tuum omnia diligentissime curabo. Vale etc.

Groningae 18 Novembris 1702.

CLVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum non dubitem, postremas meas, quibus nummum aureum ad me perlatum significabam et eo nomine gratias agebam, Tibi rite fuisse traditas curante Nob. Jablonski, ad quem eas direxeram, et cum interim nihil ab eo tempore responsi nec ad istas nec ad aliquot praecedentes meas literas hactenus a Te acceperim, diutius cunctari non potui, quin in hujus silentii causam inquirerem, veritus ne quid Tibi inexpectati acciderit, sed incertus, quo in loco Te invenirem, scribere citius nequivi, usque dum ante aliquot dies aliquis hac transiens, qui se dicebat Tubingensem et in Patria sua Professorem Math. designatum, se Berolini ante tres quatuorve heb-

domadas Te incolumem salvumque vidisse et allocutum esse mihi retulit, quod cum magna voluptate intellexi. Idcirco hasce Berolinum mitto, scribendi causam fere non aliam habens, quam ut responsionis ad me dandae, quam avide expecto, Te commonefaciam.

Prodiit nunc volumen opusculorum nonnullorum posthumorum Hugenii editoribus Voldero et Fullenio. Cl. Volderus ejus exemplar unum mihi dono misit, quod heri accepi cum ipsius literis, in quibus significat se aliud quoque per Bibliopolam, cum commodiorem viam ignoraret, misisse Lipsiam, ut inde porro ad Te mitteretur. Quod ut Tibi per occasionem scribam, me rogat, quo si forte morentur Lipsienses, inde illud petere queas. Commodum ergo accidit, quod hac ipsa vice, qua Tibi scribere decrevi, eadem opera id exequi potuerim. Voluminis hujus Titulus ita habet: Christiani Hugenii Zelemii, dum viveret, Toparchae Opuscula postuma, quae continent Dioptricam, Commentarios de Vitris figurandis, Dissertationem de corona et parheliis, Tractatum de motu, de vi centrifuga, Descriptionem Automati planetarii. Sed nihil horum adhuc perlustrare licuit; ut ex figuris, quarum bene multae sunt, colligo, pleraque curiosa sunt. In Tractatu de motu video agere Auctorem de ejus quantitate et communicatione. Quam primum vacabit, legam visurus an nobiscum ea in re consentiat, an in diversum abeat.

Accepi nuper literas a Dno. Varignonio, in quibus communicat quaedam a Dno. Tschirnhausio Academiae oblata, sed imponit mihi legem arcani, quamvis omnia sint facillima et vix Tyrone digna; inter alia spatii alicujus quadraturam sine ejus demonstratione, sed quae tam facilis est et obvia, ut facilitate non multum cedat demonstrationi Euclideae, quae demonstratur aequalitas triangulorum super eadem basi et in iisdem parallelis existentium, procedit enim tantum per additionem et demtionem spatiorum quorundam communium: hujusmodi quadraturarum centum novas quotidie exhibere liceret. Aliarum vero inventionum mentionem fecit, quas Dn. Tschirnhausius possidere se jactaverit, non autem aperuerit, quas autem ego more ejus solito mere paralogisticas puto, praesertim si ea sit quae memoratur in Novellis Reip. literariae 1702. m. April. quam falsissimam esse demonstrare facile possum. E contrario problema magni momenti mihi a quodam mathematico in vicinia nostra propositum est et postea in Diario Paris. his

verbis: Une courbe algebraique (vulgairement appelée geometrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussy geometriques, mais d'especes differentes, lesquelles soient chacune de meme longueur que la proposée, quod olim pro una alterave tantum curva, nunc generaliter pro quavis data solvi. Usum habere potest ingentem reducendis curvis et una per alteram metiendis; ita possum exhibere curvas algebraicas innumeras valde compositas et graduum seu dimensionum perquam altarum, quae tamen singulae sint aequales curvae valde simplici, ex. gr. ellipsi vel hyperbolae. Quid de hoc sentias, gratum erit intelligere. Interim vale et fave etc.

Groningae d. 5 Mai. 1703.

P. S. Memineris sine dubio, quod adhuc responsum debeas Cl. Voldero. Misi Tibi ante plures menses per duos peregrinantes, qui salutem et literas 'a Te mihi afferebant, scripta quaedam mea et iconem illius machinae hydraulicae, qua his in oris utuntur ad incendia restinguenda. Velim mihi significes an acceperis.

CLVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Multi menses sunt, quod ad Te pariter et praeclarum Virum B. de Volder dedi literas. Voldero destinatas reperi in Schedis meis, iterumque descriptas nunc mitto, et ad eum curari peto. Videbis ex illis, quid ad difficultates ejus reponam, quibus et Tuis, ni fallor, satisfieri potest.

Cum in corpore pene nihil aliud sit quam Entelechia, non video quomodo ea spoliari possit. Certe substantia sine Entelechia esse non potest. Cum corpori initio vim impressam dico, nihil aliud intelligo, quam non prius existentiam, quam vim habuisse; addo nec habere potuisse. Vires derivativae et mutabiles sunt modificationes rei substantialis et remanentis; nec quicquam rei a Deo imprimitur, quod non fluat ex ejus natura, neque ab alio impressio facta intelligi potest.

Schediasma Tuum de quadraturis per resolutiones fractionum insertum est Actis Eruditorum *).

Ego cum diu adversa valetudine Berolini laborassem, nunc Divino munere restitutus huc appuli, et commercia pariter literaria aliosque labores utcunque resumo. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 20 Junii 1703.

CLIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum nuper eximio nostro Voldero, literis Tibi missis, scripserim nondum me accepisse Hugeniana Posthuma, eaque nunc demum ad me pervenerint, subnataeque sint aliae ad Te scribendi causae, simul id significare petereque volui, ut quando crebrius Dn. Voldero scribis, hoc quoque eum docere, et meo nomine gratias repetere velis.

Percurri obiter et puto consentire nostris, quae de motuum Legibus habet Hugenius, sed non ea constituisse principia, quae omnibus definiendis sufficiant; itaque nec de concursu nisi centrico et corporis unius cum uno sibi immediato agit.

Dn. Tschirnhausius sperat in Microscopiis et Telescopiis multo plura praestare, quam possibile putat Hugenius. Consilium mihi est, aliquando rem expendere diligentius. Quod si Tibi interim vacabit facere, plurimum deferam judicio Tuo. Quae memoras de Problemate inserto in Parisino Diario, curvas infinitas specie diversas inveniendi datae aequales, non vidi. Problema tamen ipsum putem non difficulter solvi infinitis modis, et alia etiam praestari majora. Ni fallor, aliquando et Dn. Tschirnhausius aliquid tale promisit. Mentionem aliquando nonnullorum ad me Problematum a Te solutorum feceras, ex quibus quaedam me habere, quaedam non habere putabam, et in his lucem a Te petebam, idque repeto, cum Tibi vacabit.

Non satis scio, utrum Deventriae, an alibi habitet Dn. Cu-

*) Act. Erudit. 1703 p. 26.

perus, Vir etiam in literis egregius. Itaque cum vobis vicinis id ignotum esse non possit, volui a Te petere, ut si alibi agit, corrigas inscriptionem et literas ad ipsum mitti cures; ego vicissim, qua potero, officia praestare studebo. Nunc vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 3 Julii 1703.

CLX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Binas ad Te literas me dedisse puto, quibus cum nihil sit responsum, suspicabar Te domo abfuisse: sed nuper juvenis Doctus Gothanus, qui Te in transitu salutavit, certiorem me reddidit, esse Te domi. Itaque has volui ad Te dare, saltem ut scirem an binae priores essent redditae, praesertim cum novissimis (si bene memini) inclusae fuerint repetitae literae ad Cl. Volderum, quas redditas olim negabas.

Dn. Cluverius promittit nobis novum Microscopii genus, quod magnitudinem, nescio an et salva claritate, multiplicet in infinitum. Hugenius hic limites esse putat in Opere posthumo. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 8 Septembris 1703.

CLXI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Binas Tuas literas, quas ante aliquod tempus ad me dedisti, cum novissimis Tuis accepi, atque inclusas ad Cl. Volderum, ut et alteras ad Ampliss. Cuperum rite curavi, neque dubito quin ad illos recte pervenerint. Sed cum nihil hactenus responsi mihi dederit Cl. Volderus nihilque et ego scriptu valde dignum habuerim, distuli responsionem meam hucusque et distulissem forte diutius, donec a Cl. Voldero aliquid accepturus fuissem, nisi ex postremis Tuis Te de literis Tuis prioribus sollicitum intellexissem.

Quae ad Hugeniana posthuma notas circa motuum leges, jam perscripsi Cl. Voldero cum meis ad eandem materiam animad-

versionibus bene multis, ubi ostendi, quod si Hugenius nostra principia secutus fuisset, clarius et facilius nec non concinniori ordine regulas motuum constituere et demonstrare potuisset.

Dicis problema Diario Parisino insertum, curvas infinitas specie diversas inveniendi datae aequales, non difficulter solvi posse infinitis modis; equidem libenter aliquem ex istis modis Tuis viderem, ut cum meis, quorum etiam infinitos habeo, conferrem. Fateor per curvas transcendentes facillime satisfieri posse quaestioni, sed si data sit algebraica, sensus quaestionis est, ut et quaesitae sint algebraicae, et hoc adeo obvium esse non video; ideoque tanto libentius Tuos modos viderem, et puto me aliquid hic praestitisse non minimi momenti. Dn. Tschirnhaus promisit quidem aliquid tale, imo longe plura, sed nihil praestitit pro more suo.

Eorum problematum, quorum ante biennium vel circiter ad Te mentionem feci, quaedam Te habere mihi dicebas, quaenam autem illa sint, mihi non succurrit. Si ea, quorum a me lucem petis, in memoriam mihi revocare lubet, conabor petitioni Tuae satisfacere. Poterat in Schediasmate meo Actis Lipsiensibus nupero Januario inserto nomen fratris mei omitti, ita ut ideo exemplum totum, quo methodum meam illustrare volui, eliminari non opus fuisset; sed video Lipsienses sibi reservare jus mea pro lubitu mutilandi vel omnino supprimendi, si vel minimam refutationis umbram habeat, aliorum vero contra me aggressuras iniquissimas nulla mei ratione habita statim protrudendi, ita ut aliis me aggredi liceat, mihi vero me defendere non liceat. Unde cautius posthac agam neque festinabo amplius multa ad Acta mittere, nisi deposuerint partium studium, quod palam nimis ostenderunt in litibus mihi intercedentibus cum Tschirnhausio, postea cum fratre, et tandem cum Fatio Duillerio, a quibus omnibus, ut nosti et ipse fassus es, summam passus sum injuriam.

Attulit mihi nuper Scotus quidam libellum aliquem hoc anno editum a Georgio Cheynaeo, etiam Scoto, cui hic titulus: Fluxionum methodus inversa sive quantitatum fluentium Leges generales ad Celeberrimum Virum Archibaldum Pitcarnium, Medicum Edinburgensem. Petiit a me Lator, ut examinarem et judicium meum scriptis darem, quod feci, et ille ad Auctorem jam transmisit, sed nullam adhuc responsionem ab eo obtinuit. Est sane, fateor, libellus peregregius, multis sagacissimis inventis plenus; neminem ex Britannis novi post New-

tonum, qui profunde adeo penetraverit in interiorem hanc Geometriam. Sequitur Auctor Newtonianum notandi modum, multos tamen praecipitatos notavi paralogismos. Nostris quoque (multis in locis) utitur inventis, quamvis id nunquam fere agnoscere velit; Britannis tribuit nimium, Exteris parum vel nihil relinquit; si ipsi credimus, sedes Geometriae in Britannia tantum reperitur et in aliis regionibus peregrina fere circumvagatur. Newtonum extollit in coelum et merito, nisi id in aliorum omnium extenuationis quandam speciem facere videretur. Ecce enim, uti finit: Quae, inquit, ipsius Magni Newtoni reperta cum mecum animo perpendo, non possum abstinere me, quin dicam, omnia in hisce vel per hasce (aut non absimiles methodos) ab aliis (intra hosce viginti quatuor annos proxime elapsos) edita, esse solum eorundem ab Ipso diu antea cum Amicis vel publico communicatorum Repetitiones, aut non difficilia corollaria. Ergo nos reliqui nihil aliud sumus, quam Newtoni simiae, mutiliter scilicet repetentes quod ille jam diu ante nos fecit. Auctor nullius exteri mentionem facit, praeterquam Tui et mei, et semel quidem tantum, ita inter omnes Exteros nos solos hoc honore dignos aestimavit. De Te ita loquitur: Haec methodus coincidit cum ea publicata a Cl. Leibnitio Actis Lipsiae Aprilis 1693 (hoc est, ad minimum 17 annis postquam erat a Newtono reperta, uti constat ex pag. 634 tertii Vol. Oper. Math. Cl. Wallisii). Eam igitur (utpote facillimam et abunde a Leibnitio, Viro ob multiplicem Eruditionem per Totum Orbem terrarum Celeberrimo, illustratam) prolixius exponere necessarium non duco, rem exemplo uno et altero conficiam.

Caeterum ingenium mihi nunc non situm est ad mathematicas subtilitates, ab aliquo tempore dubius valde et ambiguus haesi, et lupum adhuc auxibus teneo, ut fere nihil aliud, quam de statu meo vel mutando vel non mutando cogitem. Ultrajectini Magistratus nuper me ad Professionem Matheseos et Philosophiae in sua Academia exercendam invitaverunt lautissimis conditionibus, et etiamnum omnem lapidem movent, ut me obtineant. Scribi curarunt Consules ad Socerum meum, Senatorem et Curatorem Academiae Basileensis, ut consentire velit in vocationem Trajectinam, blandissimis verbis et omni qua possunt humanitate me ad se allicere conantur, dicunt

me solum et unum esse, quem expetem, quoniam alium, quem mihi sufficiant, non norint; tantum nempe ipsis in me situm est. Interim etiam Ordines hujus Provinciae me carere nolunt et ut suspicor, offerent salarii augmentum aliquod, ut me retineant. Sed ad magis me turbandum et incertum reddendum accedit occasio remigrandi in Patriam, eodem tempore subnata, quam amplectendam mihi suadent Parentes. Qualis mihi sit exitus futurus ex hoc labyrintho, tempus docebit; certo nescio adhuc quid de me fiet. Interim deliberandi spatium, quod ab Ultrajectinis obtinui, ad finem vergit. Si Tu mihi mature satis consulere potes, gratum erit consilium Tuum intelligere. Quod superest, vale et fave etc.

Groningae d. 29 Septembr. 1703.

CLXII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratum est intellexisse, quod literae meae, quibus Cl. Voldero respondi, tandem secunda vice recte sunt ad Te perlatae: verebar enim profecto ex silentio, ne forte, ut prima vice, periissent.

Aula nostra extra urbem in vicinia est. Ego ibi plerumque agere jussus sum, assignatis etiam in Palatio cameris. Ita rarius conversor cum Analysi, aut inspicio veteras chartas meas. Faciam tamen, tam ut Tibi explicem, qua ratione, sane amplissima, datae curvae aequales exhibeam curvas algebraice algebraicas, infinitis modis, quod a multis annis habeo; tum ut Tibi perscribam, quid in Problematibus Tuis solutum habere expetam.

Cheynaeus Scotus Librum suum etiam ad me misit, sed, ut verum fatear, pene Tyronis opus esse videtur in his studiis; adeo nihil reperio, quod non facillime ducas ex pervulgata jam dudum methodo serierum. Nec ullum aggreditur problema alicujus momenti. Quod si vel aliquam Seriem novam elegantem exhibuisset, saltem ex labore ejus proficeremus, et tamen supercilium sumit. Talis libri quotidie multi scribi possunt non magno operae pretio. Itaque nisi meliora proferat, hominem sibi relinquendum vel potius ad medicinam bene faciendam hortandum censeo. Interim mihi gratum erit, quae ipsi scripsisti videre; tum quae Voldero circa ea, quae Hugenius de motu reliquit, egregia pro illo tempore, sed

opinor nostris non conferenda. Vellem et Dioptricen ejus examinasses.

Difficile fuerit Tibi consilium dare, inter Basilaeam, Ultrajectum et Groningam fluctuanti, nisi omnibus circumstantiis perspectis. Si omnia aequalia essent, credo ad praeferendam Patriam impelleret conjux; sed si alibi meliores conditiones offeruntur, Patria esse videbitur, ubi optime erit. Groningam tamen non putem, nisi insigni emolumentorum augmento deserendam; modo valetudini conveniat aër. Valetudinis enim super omnia habenda ratio est.

Aliquando quorumdam Posthumorum Cartesii editio promittebatur in Batavis. An prodierint nescio. Ego ex iis nonnulla itidem habeo. Talia sunt: Regulae veritatis inquirendae (quae mihi non admodum singulares videntur) illustratae exemplis non male, Fragmentum Dialogi Gallici, Primae cogitationes de animalium generatione etc. quod si non ederent qui promisere, possem ego librario edituro submittere, et addere quaedam inedita Galilaei et Valeriani Magni et Pascalii; et meas notas, quas vidisti in Cartesii partem Principiorum generalem, aliaque id genus. Neque aliud poscerem a librario, quam magnum numerum exemplarium, ob tot amicos per orbem. Si edita sunt Cartesiana, forte tamen caetera placebant, praesertim cum addi possint quaedam inedita Campanellae, aliaque id genus.

Gratulor Tibi honorem certaminis praeclararum Urbium de Te. Opto mature discere, an Te in vicinia porro sim habiturus. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Herrenhausae prope Hanoveram 2 Octobris 1703 *).

CLXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Laudo consilium Tuum, quod maluisti manere Groningae, nec praeter rationem locum mutasti. Vellem haberes quem posses

*) Joh. Bernoulli's Antwort auf dieses Schreiben war nicht aufzufinden.

commendare Ultrajectinis. Sed vide sterilescere hoc aevum in omni pene genere doctrinae, et quanto majora habent subsidia studiosi, eo magis ignaviam invalescere.

Saepe iis, qui Mathesin πρὸς τὰ ἄλφιτα inservire negant, Tuum aliorumque paucorum exemplum ingessi, quos lautis conditionibus invitant Principes et Respublicae, dum medicores illi atque intra vulgata haerentes merito tenuiori fortunae relinquuntur.

Methodus illa mea multo plus praestat, quam problema illud Tuum, curvas algebraicas innumeras datae algebraicae aequales; imo habet aliquid inexpectatum, de quo, ubi otium nactus fuero.

Cheynaeus mihi vix problemata aggressus videtur, alioqui sensisset, quam non facile sit problematibus per finita solvendis viam monstrare per Series infinitas, et Serierum abruptio tam variis modis contingere potest, ut nonnisi multa arte eligi possit, quae ad rem faciat. Talium autem artium nulla apud eum vestigia deprehendo.

Inepte Newtono vindicare vult Methodum Seriei per arbitrarios coëfficientes assumtos et comparatione terminorum determinandos investiandae; nam ego eam publicavi *), cum nec mihi nec cuiquam alteri, saltem publice, constaret tale quid habere et Newtonum. Nec ipse jam magis sibi tribuet, quam mihi. Uter prior habuerit, non dixerim. Ego jam adhibui in antiquo tractatu de Quadratura Arithmetica, quam Hugenius et Tschirnhausius Parisiis legere.

Esto; sit Cheynaeus paulo supra Tyronem, certe facile dare potuit, quae dedit. Quicunque semel intellexit nostra, talem librum facile componet. Certe nullam novam Seriem pulchram, nullum Theorema elegans affert. Praeterea non syntheses illae Serierum aliorumque Theorematum, sed Problemata sunt lapis lydius Methodorum.

Significa, quaeso, titulum libri posthumi Cartesiani, et apud quem sit impressus, ut possim petere ex Batavis. Ita videbo, quid addi possit. Polyandri cujusdam in meis fragmentis latinis mentionem fieri non recordor.

Nuper demum Berolini apud Dn. Cunaeum vidi Librum quemdam Rollii in 4°. Apparet ingenio non carere, sed mire esse per-

*) Art. Erudit. 1693 pag. 178. G. G. L. Supplementum Geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens etc.

plexum, et ex musca elephantem facere, et inventa Serierum fruge vesci glandibus suarum intricatissimarum appropinquationum. Plura committit, quae non vidi. Est autem promissis ditissimus, et aliorum quorundam exemplo in abstracto sibi fingit miras Methodos. Sed ubi Problema solvi debet,

ubi arma Dei ad Vulcania ventum est,
Mortalis mucro, glacies ceu futilis, ictu
Dissilit.

Placent valde quae notas ad Hugenii Phoronomica, praesertim quod calculo subjecisti incrementa velocitatum per interpositionem corporum. Totum caeteroqui opus Hugenii nititur hypothesi, vera quidem et successu confirmata, et a me quoque adhibita, sed quam a priori non facile demonstrabit aliquis, aut Geometricae vel Metaphysicae necessitatis esse ostendet: nempe quidquid verum est de motu certa duorum motuum compositione facto, id verum etiam esse de motu ejusdem directionis et velocitatis libero aut alia compositione facto; atque ita qui corporum in navi mota concurrentium motu apparenti ex ripa oritur effectus apparens in eadem ripa, hunc oriturum etiam, si navi et alveo aquae sublato vel in ipsi ripa idem concurrentium motus cerneretur. Hoc principium erroneum male putavit Honoratius Fabrius, cum Kepleri et Cartesii modum demonstrandi aequalitatem incidentiae et reflexionis oppugnet. Interim, eventu magis, quam demonstratione necessaria, hoc principium varie compositi motus idem efficientis stabiliri fatendum est, neque causam quaerentibus aliam occurrere, quam harmoniam sive perfectionem rerum, a qua in universum verum est pendere leges motus, tanquam effectus supremae Mentis, non a surda quadam necessitate, qualis geometrica est. Verum quidem est easdem esse Conicae Sectionis proprietates (ut exemplo utar) sive motu in plano, sive sectione solidi construatur; sed ibi certe pronuntiari potest, unam lineam ab altera non differre, quoniam, causa remota, subsistunt; ast duos motus, qui diverso modo producuntur, cum post causam remotam minime subsistant, non aeque eosdem pronuntiare licet, nec causam physicam vel geometricam reperias, cur corpus, navi forte impedita, aperto in prora exitu, in stabile planum exiliens easdem leges sequi, et ut sic dicam, meminisse debeat eorum, quae in navi fiebant, quae nullum sui vestigium reliquere. Idem est in omnibus demonstrandi Methodis, quibus hic utimur, ex. gr. quod corpora concurrentia id

observare debent, ut vim nullam vel accipiant vel tribuant, per quam vel nimis parum vel nimium assurgere possint, ne scilicet relabendo effectus potior aut inferior causa oriatur; neque enim est in illis cavendi intellectus. Est et aliud principium, ex quo semel admisso leges motuum ostendi possunt. nempe quod idem sit ictus, idemque a se invicem recedendi conatus, modo eadem sit celeritas appropinquationis concurrentium, ita ut non referat, quis in alterutro sit motus. Sed hoc quoque principium magis assumitur ex fundamento harmoniae, quam perfecte demonstratur; assumitur, inquam, materiam motui resistere, seu corpus quiescens non pati se loco dimoveri, nisi refracta vi incurrentis, cum tamen in materia nihil aliud concipiendo quam extensionem et impenetrabilitatem nihil tale inferri queat, et sequi potius debeat quantumcunque quiescens a quantulocunque sine resistentia loco pelli debere; sed ita omnis harmonia Legum naturae tolleretur, et mutationes fierent per saltus. Itaque postremo recurrendum est ad principium Harmoniae sive Sapientiae, atque id ipsum pulchre evenit, ut de Supremo Autore in ipsis Legibus suis generalibus Natura testetur, quod cessaret, si Geometriae demonstrationi locus foret.

Ex his vides, etiam non esse cur putes, uno tantum me usum principio, nempe reductionis ad motum perpetuum tanquam absurdum: quanquam adhibui in Actis, ut rem intellectui omnium accommodarem. Caeterum vix ulla excogitabitur methodus, qua non sim usus ad idem efficiendum, nempe non tantum ope gravium, sed et elasticorum deprimendorum, aequalitatis effectus et causae; aequalitatis inter actionem et reactionem concurrentium, indiscernibilitatis hypothesium, evitandi saltus et interventus virium mortuarum, compositionis motuum, et speciatim concursus obliqui. Inprimis vero delectatus sum considera tione metaphysica virium et actionum, quoniam positis definitionibus rei maxime consentaneis, inde geometrica necessitate efficio, vires esse in ratione composita ex simplice corporum et duplicata celeritatum. Usus quoque sum aequationibus, quas pene anno abhinc ad Dn. Fratrem Tuum interrogantem perscripsi; nempe, posito motum ipsius a ante concursum esse v, post x, et motum ipsius b ante concursum esse y, post esse z, fore $v - y = z - x$, seu $v + x = y + z$ et $av + by = ax + bz$, et denique $avv + byy = axx + bzz$, ita tamen ut signa harum literarum mutentur, cum directio contraria est praevalenti.

Ex duabus autem aequationibus quibuscunque hic sequitur tertia, et sunt adhuc aliqua profundiora. Caeterum Dn. Hugenius, supposito principio compositi motus, non habebat opus principio de assurgente centro gravitatis, quod coincidit cum aequalitate effectus et causae; nam quae reciprocis moli celeritatibus sibi occurrunt elastica, ea sibi mutuo motum adimere debere, geometrica necessitate constat ex natura aequilibrii et virium mortuarum.

Literas adjunctas ad eximium nostrum Volderum curari peto, cui et haec puto non ingrata erunt de legibus Naturae, non ex geometrica necessitate, sed Sapientiae et Harmoniae principio plene derivandis. Oblitus sum dicere, Hugenium videri non cogitasse de elastro concurrentium, unde coactus est recurrere ad principium centri gravitatis. Propositionem primam separatim demonstravit a secunda, quia nondum satis tunc in usu erat ratiocinatio ex mea lege continuitatis, quam etiam in Geometria Elementari prodesse memini. Nam cum Euclides assumat potius quam demonstret, duas rectas aequidistantes esse in eodem plano, res statim conficitur, si sub convergentibus comprehendantur, ubi punctum infinite abest, seu cum ratio datae ad ejus elongationem evanescit.

Quoniam Dn. Frater Tuus et alii mirantur, quod duo corpora inaequalium virium se mutuo sistant (quod etiam magno Hugenio fraudi fuisse videtur, ne naturam virium plene perspiceret) ideo soleo eos admonere, ut distinguant inter vires vivas absolutas, quibus effectus aliquis violentus produci potest (ut ascensio gravis, tensio elastici corporis, motus quiescentis) et ut sic dicam, impeditivas, quae necessario leges virium mortuarum, vel si mavis embryonatarum, sequuntur in destruendo se mutuo, quia destructio non fit per saltum, sed continuo, seu per inassignabilia decrementa, id est, per vires embryonatas. Sed vires impeditivae toto genere distant ab absolutis, ut angulus contingentiae a recto.

Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 22 Novembris 1703.

CLXIV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nuperrimas meas cum adjunctis Volderianis et excerptis quibusdam meis de Motu, Tibi jam redditas esse non dubito. Paucula haec nunc scribo, ut Tibi meliori modo commendem Latores, Nobilem Anglum, qui in mathematicis principiis mea manuductione per aliquot menses est usus, ejusque Ephorum, Virum potitissimum et eruditissimum, Robertum Falconerum, qui familiariter novit Cheynaeum, cujus Librum de Fluxionibus mihi attulit. Respondi nuper Cheynaeo, et veritatem nequaquam dissimulavi, monstrando ei quod Tecum aliisque exteris non ex merito egerit, dum eos non nisi extenuandi et eorum inventis derogandi studio citasse videatur. Quo animo haec sit accepturus, ex ejus responsione docebor. Dn. Craigius non eandem, quam Tu, fert sententiam de Libro Cheynaei; hunc enim in epistola quadam edita in Transactionibus ita alloquitur: „Facile credas, Vir Eruditissime, mihi non „parum arridere, quod methodus, qua usus sum in determinandis „figurarum quadraturis, tantopere a D. Leibnitio et Te probata „fuerit, ut ille alteri cuidam a se inventae non nihil similem agno„sceret. Tu vero ut conjecturam feceris ei non multo absimilem „esse illam, qua utitur D. Newtonus, eundemque ipse tanto cum „successu sequaris, ut methodus calculi differentialis inversa „incredibili incremento jam a Te promota sit in Libro „Tuo, quem D. Archibaldo Pitcarnio, Patriae nostrae et saeculi hu„jus ornamento, inscripsisti etc.“ Vides quanta laude hic Liber extollatur, quanquam id non adeo miror, cum sint Populares et alter alterum certatim laudando nihil omittat, quod in se redundare possit. Scripsit mihi Cheynaeus Newtonum Cogitata et Experimenta sua de Natura lucis et colorum nunc sub praelo habere, sed vernacula sua lingua edenda; item Moivraeum quaedam (sed quae aut qualia, se plane nescire) publico minari, et Gregorium mundam et correctissimam omnium operum Euclidis Graece et Latine Oxonii Editionem curare. Cum hic mentio inciderit de Gregorio, etiam hoc Te scire volo, quod ejus demonstrationem Curvae Catenariae Cheynaeo proposuerim examinandam, et rogaverim, ut suum ut et Newtoni (quocum quotidie conservandi copiam habet) de ea udicium perscribat. Scripsi enim Te et me et omnes exteros Ma-

thematicos, qui nec fungi nec stipites sunt, eam demonstrationem pro paralogistica habere, prout bene monitum sit ab Anonymo in Actis Lipsiensibus, quicquid postea Gregorius contra respondere nitatur. Itaque rogavi, ut mihi libere et candide dicat, quid Angli et imprimis Newtonus sentiant, ut nimirum hac arte Newtoni sententiam elicerem, quam si cum nostra conveniret, postea in publicum edere possemus loco Replicationis Anonymi utpote nondum datae. Caeterum me refero ad meas novissimas. Vale et ama etc.

Groningae d. 29 Novembr. 1703.

CLXV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex quo meae ad Te Volderumque nostrum literae periere, quas, ut memini, iterum mittere coactus sum, idem metuo, cum quas, ad utrumque scribo, ad Te pervenisse non intelligo. Scio enim esse quosdam curiosiores quam par est rerum alienarum, quos epistolas nonnullas a me aut ad me aperuisse aliquando et suppressisse comperi.

Anglus quidam hac transiens, qui aliquamdiu Groningae egerat, narravit esse Tibi compositionem nescio quam non metallicam, speculis aptam, quam et ipsi communicaveris. Occasio in eam inquirendi apud eum non fuit, et malui a Te quaerere, quidnam id rei esset.

Quidam Tornator Dresdae, visis Tschirnhausii speculis metallicis, alia ex ligno fabricavit, quae auro foliato obduxit, nec contemnendus est effectus, etsi ut credi potest, metallicorum vim non aequet. Alii pro ligno non male gluten aut massam glutinosam adhibuere, quae ipsa deinde inaurata fuit. Haec enim massa minus mutationibus obnoxia est.

Cum nuper forte epistolas digerens in Tuam incidissem, qua mentionem facis problematis inserti, ut scribis, Parisino Diario, nempe curvas invenire Algebraicas specie differentes datae curvae Algebraicae aequales, volui nonnihil experiri methodum, quam animo conceperam, et paulum meditatus, statim incidi in viam ge-

neralissimam et facillimam. Esto (fig. 153. 154) linea data B(B); assumatur pro arbitrio (specifice tamen determinata debite et collocata, ut mox dicam) linea F(F), quae praestet speculi vicem, et radios BF, ipsam B(B) tangentes repercutiat angulo incidentiae et reflexionis aequali. Horum radiorum reflexorum FL concursu formata linea L(L) habebit differentiam cognitam a data B(B). Sunt enim lineae BB, LL coëvolutae eodem circumplicato filo, et sic stylo filum tendente describetur F(F). Jam cum BFL + L...(L) sit = B..(B) + (B)(F)(L), patet fore B...(B) — L..(L) = cognitae BFL — (B)(F)(L) differentiae filorum. Sunt autem lineae B(B), F(F), L(L) algebraïcae, ergo et differentiae filorum habentur algebraïce. Et quia de casu tantum speciali (etsi ad quemlibet applicabili) seu arcu dato B(B) in calculo agitur, ideo species infima (sive aliqua parametrorum) vel situs etiam speculi F(F) sic assumi potest, ut in casu proposito haec filorum differentia sit nulla, imo data. Effici etiam potest, ut summa curvae datae et quaesitae sit data, uti arcuum B(B) et L(L), si fila BF, FL simul crescant vel decrescant. Quod si pro reflexione adhibeas refractionem, vel pro reflexione ordinaria fictitiam, quam adhibuit Cartesius, poterit fieri ut curva prodeat, quae sit in ratione data ad datam; itidem infinitis modis, ut prodeant specie differentes. quamquam etiam obtineri possit per ordinariam reflexionem Curva, quae sit ad datam in ratione data, si nempe datae similem in ratione data facias, et huic aequalem, modo explicato. Poterit etiam (generalissime in terminis simplicibus) Curva talis fieri, ut unus arcuum sit aequalis summae vel differentiae inter rectam datam et magnitudinem, quae sit in ratione data ad alterum arcum, ut si curva data sit x, quaesita y, et postuletur $y = c + \frac{b}{a}x$. Et plura hujusmodi confici possent, si utilitas appareret.

Si speculum reflectendo radios reddat convergentes, ut in figuris adjectis, speculum est figura, quae omnes ellipses tangit, quarum foci sunt in punctis B et L respondentibus, filoque BFC; sed in casu, quo radii reflexi divergentes sunt, seu trans speculum convergunt, patet hoc speculum esse lineam ad omnes ellipses perpendicularem: idem est si pro reflectionibus refractiones adhibeamus, concursusque sit non trans lentem, sed citra; quae consideratio et alias connexionem subinde inter tangentem et perpendicularem iisdem curvis curvam dabit. Sed talia omnia a Te re-

ctius et peritius discutientur; ego quae abstrusiora nunc aegre attingo. Vale.

Dabam Hanoverae 3 Januarii 1704.

Beilage.

Es scheint, als wenn Leibniz die vollständige Behandlung des schon mehrfach erwähnten Problems, von der er in dem vorhergehenden Schreiben einen Auszug giebt, für die Oeffentlichkeit bestimmt hatte. Sie mag deshalb hier folgen:

Solution du probleme qu'on avoit proposé dans le Journal des Savans: Une courbe ordinaire (c'est à dire qu'on appelle vulgairement Geometrique) estant donnée, en trouver une infinité d'autres de differente espece, toutes Geometriques, dont chacune soit egale à la donnée, ou (ce qu'on veut bien adjouter) en telle raison qu'on voudra. Par Mons. D. L.

Soit la Courbe ordinaire donnée (fig. 155) B (B), on demande une autre aussi ordinaire L (L) egale à B (B), et cela d'une infinité de façons. Prenés à discretion la ligne F (F) aussi ordinaire ou Algebraique telle qu'il vous plaira pour servir de miroir, en sorte que les rayons BF venans de la courbe B (B) en la touchant, soyent reflechis par ce miroir en FL et y forment par leur concours la courbe L (L) les FL croissant quand les BF decroissent, ou vice versa, et la ligne L (L) sera la demandée egale à B (B), et comme le miroir F (F) peut estre varié d'une infinité de manieres, on aura autant de lignes egales à la donnée.

J'appelle ces deux lignes B (B) et L (L) Synacamptes, l'une à l'egard de l'autre: car j'appellais Acampte (voyez les Actes de Leipzic Janvier 1689) c'est à dire sans inflexion des rayons, une courbe L (L) par rapport à des rayons donnés de position par ordre, savoir FL, qui la rencontrent sans en estre alterés, c'est à dire sans en souffrir ny reflexion ny refraction, par ce qu'ils la touchent; comme j'appelle une ligne Aclaste par rapport à des rayons qui la rencontrent et la percent sans refraction, par ce qu'ils luy sont perpendiculaires. Et j'appelle Synacampte la ligne L (L) par rapport à la ligne B (B) par ce qu'elles son toutes deux acamptes par rapport aux memes rayons continués BFL. Elles sont aussi du genre des coëvolues, le même fil ABFLH estant appliqué à toutes les deux, et son evolution déscrivant la courbe F (F) par le moyen du style F, qui tient le fil tendu. Et

ces deux lignes B (B) et L (L) peuvent estre appellées particulierement contrevoluës, l'une à l'egard de l'autre, par ce que le fil B F croissant en (B) (F), il arrive qu'à l'encontre le fil F L diminue ou devient moindre en (F) (L), et comme c'est toujours la meme longueur A B F L H, il est manifeste que ce qui est evolu de l'arc B (B), est involu ou appliqué à l'arc L (L) et que par consequent ces deux arcs sont égaux. On suppose tousjours que tout est dans le meme plan.

Or comme le fil ou l'evolution sert à demonstrer l'egalité de ces deux Lignes, les rayons avec le miroir servent à trouver l'une par l'autre. Car la ligne B (B) estant donnée et le miroir F (F) pris à discretion, et par consequent donné aussi, il est manifeste que les tangentes F L sont aussi données de position ordinatim, car B F donnée est reflechie du miroir selon la loy des angles de reflexion egaux à ceux d'incidence. Et j'ay monstré dans les Actes de Leipzic Avril 1692, comment des lignes (droites ou courbes données de position ordinatim (ou par ordre)) formant une ligne par leur concours, qui est tousjours leur tangente commune, on peut determiner cette ligne par mon calcul des differences, et cela algebraiquement, si ces lignes soient algebraiques comme icy ou les lignes F L ne sont que droites. D'ou il est manifeste que le probleme en question est resolu. Mais la ligne F (F) est celle qui se forme par le concours de toutes les Ellipses dont les deux foyers sont les points B et L qui se repondent, et le fil B F L donne tousjours le meme. Et par cette consideration j'ay monstré que tous les problemes se peuvent resoudre, ou il s'agit de trouver la figure d'un miroir ou d'un verre, qui doit rendre paralleles, ou envoyer vers un point, ou dresser comme venons d'un point tous les rayons venans d'un point du soleil ou d'un autre lumineux soit directement, ou apres autant de reflexions ou refractions qu'on voudra. Comme j'en avois donné l'essay du dit mois de Janvier de l'an 1689, ou je publiay cet usage que les coevolutions ou des foyers lineaires ont dans la science catoptrique ou dioptrique dont on ne s'estoit point ..... auparavant. Et ce fut la premiere ouverture de la doctrine des caustiques demandées, qui a esté si bien cultivée depuis par Messieurs Bernoulli, et particulierement par M. le Marquis de l'Hospital dans son Analyse des infinitesimales. Il se pourroit que les deux courbes B (B) et L (L) fussent parties d'une même courbe, en sorte que une courbe B L fut sa propre contrevolue. Et on

peut trouver le miroir en supposant la dimension de la courbe, car prenant T comme concours des deux tangentes quelconques de la courbe, on peut s'imaginer le fil ABF(L)H et le stile tendant tousjours ce fil decrira le miroir demandé. On peut faire aussi que la courbe LL ne soit pas une continuation de la courbe BB, mais congruente ou la trace de la meme posée autrement. Mais dans ces cas les miroirs ne seront pas tousjours des courbes Algebraiques, comme on demande icy. Car leur construction suppose la dimension de la courbe donnée.

On pourra faire sur le meme fondement que la courbe L(L) soit en raison donnée à la courbe donnée B(B), en employant un verre ou autre matiere transparente au lieu d'un miroir et que la matiere soit de telle densité que les rayons BF rompus apres F de telle sort que le sinus de l'angle de la refraction soit en raison donnée au sinus de l'angle d'incidence, car alors la partie de la courbe, savoir L(L) qui se forme par les rayons compris entre F et (F) sera aussi en le meme raison donnée à B(B). Et il n'importe, si le concours se fait au dela du verre ou en deça comme dans nostre figure, ou la refraction les rend divergens. Outre qu'on se pourroit imaginer avec M. des Cartes une matiere reflechissante qui detournât de meme les rayons par un angle different de celuy d'incidence, en sorte qu'il fit, mais en arriere l'effect de la refraction, comme au contraire on se peut imaginer une matiere faisant refraction qui fist l'effect de la reflexion, mais en avant tellement que les angles d'incidence et de refraction seront egaux: mais comme il ne s'agit icy que de la determination geometrique, les reflexions et refractions ordinaires suffisent. Il est vray qu'on peut venir à tout encore d'une autre maniere, en faisant une courbe semblable et en raison donnée à la courbe donnée, ce qui est aisé par les droites homologues et trouvant depuis une courbe egale à cette courbe homologue.

Il ne me reste que de remarquer icy, comme j'ay fait encor ailleurs, la difference qu'il y a entre les manieres d'inventer: il y en a de plus analytiques, où il faut penser profondement, mais il y en a où il ne s'agit que de penser ou de s'aviser de penser à quelque chose et de faire une combinaison ou synthese aisée, comme icy où tout Geometre assés avancé, qui pensera en meme temps aux coëvolues et à nostre probleme, ne manquera pas d'en trouver la solution.

CLXVI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex responsione Volderi hic adjuncta videbis vanum fuisse metum Tuum de literis ad illum datis; illas me recte accepisse, illud jam Tibi significaveram per duos Anglos eodem quo acceperam die mihi valedicentes Hanoveram petituros et a me literas commendatitias ad Te delaturos; sed ut ex Tuis conjicio, apud Vos nondum appulerunt, quod forte Hamburgi nonnihil moventur, forte tamen nunc appuleruut. Intelliges ex literis illis, quid Cheynaeo summatim scripserim; misissem hac vice descriptionem animadversionum mearum in ipsius librum, si otium describendi habuissem.

Ut ad Tuas priores respondeam paucis, quas jussu Tuo cum Cl. Voldero communicavi, commendavi Ultrajectinis Doct Hermannum, qui si offerretur Professio, eam non recusaret; spero successum. Etiam ego notavi contra Cheynaeum, quod non bene faciat, si quidem Newtono vindicare velit methodum seriei per arbitrarias coëfficientes assumtas, ideo tantum quod Newtonus eam habuerit, antequam Tu publicasses: monui Te eam habere potuisse etiam prius multo, quam publicandam statuisses.

Titulus libri posthumi Cartesiani ita habet: R. Des Cartes Opuscula posthuma physica et mathematica. Ampla ejus recensio habetur in Actis Lips. anni 1701 m. Decemb.; miror quod non videris. Quod notulae meae ad Hugenii Phoronomica Tibi placuerint, multum gaudeo; putavit Cl. Volderus me errasse una cum Hugenio iu calculo incrementorum velocitatum per interpositionem corporum, sed ei ostendi se ipsum errasse, falsam regulam pro vera sumentem. Metaphysicas quas addis speculationes jam olim, ni fallor, maxiuam partem mecum communicasti. Quod autem subnectis, Hugenium ideo propositionem primam separatim demonstrasse a secunda, quia nondum satis tunc in usu fuerit ratiocinatio ex Tua lege continuitatis, putem ego, quemlibet potuisse deducere primam ex secunda, etiamsi non attenderit ad legem istam continuitatis, et quantum ad ipsam hanc legem, credo neminem esse qui eam ignoret, licet non semper de ea cogitet, natura ipsa enim eam quasi dictat; Tibi autem debetur, quod peculiari nomine continuitatis aliis cognitionem ejus non tam facere, quam refricare vel excitare volueris.

Ut nunc ad posteriores Tuas literas aliquid reponam, miror Tibi tam facile excidisse, quae Tecum jam diu communicavi, nempe cogitata mea de conficiendis speculis causticis sine magno et labore et sumtu; lignea enim illa auro foliato obducta jam diu mihi erant cognita, sed sumtibus non satis vires respondere videbantur. Dixi Tibi, inventum meum consistere in eo, quod ope plumbaginis ovi albumine subactae lignum tam eleganter poliri possit, ut etiam politissimum chalybem et colore et politura mentiatur, unde hujusmodi speculum ad radios reflectendos multo aptius censui, quam inauratum, praeterquam quod etiam viliori pretio et labore minori parari possit. Hoc Tu probasti et simul mihi respondisti, Te accepisse librum ex Anglia a nescio quo anabaptista, cujus foliorum margines (vulgo sectionem vocant) plumbagine erant obductae et exquisitissime politae.

Legi cum voluptate methodum Tuam, qua confici posse putas problema Parisino Diario insertum, quae consistit in coëvolutione curvarum (fig. 153) A B (B) et L (L), quarum illa est data, haec quaesita, quae determinatur per oppositionem curvae alicujus algebraicae F (F) tanquam speculum consideratae, in quam incidunt tangentes B F, (B) (F) et per reflexionem formant curvam alteram algebraicam L (L), quae cum priore B (B) facit vel differentiam vel summam algebraice rectificabilem. Quamvis haec methodus per se sit elegans, quippe per quam ad datam curvam possum invenire infinitas alias curvas algebraicas, quae omnes cum proposita faciant aliquid rectificabile, duo tamen sunt, quae in ea pro nostro problemate desiderantur. 1. Fateor quidem differentiam inter B (B) et L (L) esse algebraice cognitam, sed non ostendis modum construendi curvam F (F) algebraicam et quae faciant, ut illa differentia sit nulla; forte hoc ipsum non est minoris operis. Dicis aliquam parametrorum vel situm etiam speculi F F sic assumi posse, ut in casu proposito haec filorum differentia sit nulla, imo data; sed quomodo hoc algebraice fieri possit, vellem ostendisses. Et posito hoc Te praestitisse, demonstrandum est 2. curvam L (L) non fore eandem nec ejusdem speciei cum proposita B (B). Subvereor enim, ne, quemadmodum plerumque accidere solet, in identicam incidas. Caeterum vellem haec omnia exemplo aliquo illustrares, si vis in Ellipsi, cui aliam algebraicam aequalem assignes ejusque naturam per aequationem more solito exprimas. Mea utique methodus id facile potest, et alia multa praeterea habet in

potestate, ex. gr. duas pluresve curvas algebraicas in unam algebraicam mutare, id est, construere curvam algebraicam, quae pluribus algebraicis datis et simul sumtis sit aequalis, idque modo perfacili, neque enim indiget consideratione osculi in curvis, ut Tuam video indigere. Verbo, methodus mea perficitur differentiis tantum primis. Vale etc.

Groningae d. 15. Jan. 1704.

CLXVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum literae Tuae, quas duo Angli attulere, jamdudum scriptae sint, spero ex eo Tibi redditas meas cum inclusis ad Volderum. Nuper Tibi iterum scripsi, ut inquirerem de earum fato.

Si Dn. Craigius Librum Dni. Cheynaei laudat, non miror; laudatus ab ipso et Scotus loquens de Scoto.

Caeterum non video quomodo Dn. Craigius dicat methodum, qua in Quadraturis utitur, etiam a Cheynaeo adhiberi, ita ut methodus calculi differentialis inversa inde incredibili cum incremento sit promota. Nam, ni fallor, diversa est methodus Cragii et Cheynaei, et non memini videre in Cheynaeo soluta problemata aliqua difficilia conversae Tangentium. Ego vero non puto, Te aliquid didicisse ex libro Cheynaei. Sin erro, rogo Te ut Tui luminis me quoque participem facias.

Si Dn. Gregorius satis Graece scit, poterit utilis esse Reipublicae literariae edendis et recensendis Mathematicis Graecis, in quo sane operae pretium faciet. De caetero non memini aliquid ab ipso videre magni momenti. Opus ejus Astronomicum, si qua nova habebit, erunt paraphrastica Newtonianorum. Mensuratio figurarum erat exigui momenti. In Dioptrica sua meam doctrinam de Circulis osculantibus curvarum osculatarum succedaneis extenderat in Librum, ne mentione quidem mei facta; quod ne reprehendi posset, praevenire Lectorem voluit, dicendo se multis ante annis haec praelegisse. Cheynaeus ipsius popularis vix eo se adduci patietur, ut aliquid contra ipsum Tibi communicet, et sententiam Newtoni vel eliciat vel perscribat Gregorianae Demonstra-

tioni Catenariae adversam. Interim tentatum id a Te non nocet, vel ideo ut intelligat ipse Gregorius, nihil aliud se lucratum demonstratione sua ejusque Apologia, quam intelligentium grave ipsi judicium, tanto magis quod monitus non resipiscit et errores pertinaciter defendit. Gratum mihi est, quod Newtoniana colorum Theoria prodit. Vellem etiam ut daret Newtonus novam suam Theoriam Lunae, quam apud me laudavit Halleius, in Angliam nunc, ut mihi scribitur, ab Adriatico mari reversus, et ut ipse mihi narravit, mox in mare pacificum navigaturus, ut perficiat Theoriam declinationis magneticae. Laudandum est indefessum Viri studium juvandae scientiae. Vale.

Dabam Hanoverae 15 Januarii 1704.

CLXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Paulo post scriptas meas literas penultimas Angli duo ad me venere cum Tua epistola proxima, cui statim respondi. Novissima a Te veniens Brunswigae me deprehendit. Huic iterum respondeo statim, quia in eo sum, ut excurram Halberstadium aliaque vicina ad loca, venatum Historica Manuscripta, ubi otium ad nostra non erit, ubique enim amicorum numerus non exiguus me obsidebit. Non vanus, sed justus fuit de literarum amissione metus,

iterum potest accidere, quod semel potest.

Hermannum quod Ultrajectinis commendas, recte facis.

Non redierant in mentem, quae de apta Speculis plumbagine scipseras. Unde aestimare potes, quam avocer a studiis, quibus maxime delector et quibus potissimum operam darem, si mei essem juris. Liber plumbagine perpolitus in superficie communi paginarum terminatrice transmissus fuerat a celebri illo Wilhelmo Penn, qui Pensilvaniae nomen dedit, et nunc quoque esse puto in scriniis Serenissimae Electricis.

Habet refractio suas ad comburendum commoditates, quibus motus Tschirnhausius specula deseruit, et verum est, in majora objecta commode speculo non agi, nam radios intercipiunt, nisi specula multiplices. Cogitavi olim annon loco ingentium Vi-

trorum, quae et difficulter parantur et non commode moventur, posset adhiberi compositum ex duobus vitris concavis, concavitatem sibi obvertentibus, si modo haberetur liquor interfundendus bene perspicuus, qui magnam satis refractionem daret, et refractioni vitri multo viciniorem, quam est refractio aquae. Sane refractio spiritus vini major quam aquae est, et memini notare olim ex aliorum observatis, quanta sit, sed nunc non occurrit. Tibi non ignotum puto; quod si meministi aut facile reperire potes, perscribe quaeso, cogitaque an alius liquor aptior sit. Pro microscopiis exiguis itidem plus solito praestari posse cogitavi, si pro vitro adhibeatur frustillum adamantis, cujus maxima refractio est.

Placet quod methodus mea curvae datae aequales infinitas exhibendi a Tua (quam non explicas) diversa est, ita enim augetur scientia. Putem et pluribus curvis datis mea methodo aequalem dari posse per plurium coevolutionem. Miror autem, quod non perspexisti id, quod aequale est differentiae (fig. 153. 154) curvarum B(B) et L(L) datum, vel nullum fieri posse in casu speciali seu dati certi arcus B(B). Nam generaliter est $+$ arc. B(B) $\mp$ arc. L(L) multipl. per $r = + BF \mp FL \,.\, r - (B)(F) \mp (F)(L) \,.\, r$, posito r esse rationem refractionis vel mutatae reflectionis, quae in casu vulgaris reflexionis est ratio aequalitatis, uti in casu differentiae $\mp$ est $-$. Jam assumta pro arbitrio curva FF seu aequatione ejus locali situque, inde calculo derivabis curvam L(L) more noto, simulque ipsas extremas BF, FL, (B)(F), (F)(L), speciatim ob puncta extrema B, (B), F, (F), L, (L) data vel inventa: calculo habebis ergo et valorem ipsius $+ BF \mp FL \,.\, r - (B)(F) \pm (F)(L) \,.\, r$, in terminis mere algebraicis; ubi praeter simpliciter datas ex datis B et (B) calculo adhuc insunt constantes pro arbitrio sumendae, eae scilicet quae determinent curvam F(F) specie infima magnitudine aut positione, nempe longitudine parametrorum aut distantia verticis, aliorumque punctorum fixorum curvae FF a recta data, pro arbitrio assumtis. Itaque facillime fiet hic valor in casu posito speciali certi arcus dati, aequalis quantitati datae vel nulli, cum ita habeatur aequatio algebraica, in qua sunt arbitrariae, quarum una quaevis pro incognita assumi potest, caeteris pro arbitrio explicatis. Vides etiam, cum curva F(F) possit eligi speciei cujuscunque v. g. Ellipsis, Parabola, Conchoidalis, Cissoidalis etc. (cujus deinde situs et parametri arbitrio aut calculo determinantur) impossibile esse, ut ex sola hac deter-

minatione ad casum specialem unicum, nempe certae portionis datae curvae inter data puncta B et (B) fiat curva L (L) eadem specie ipsi B (B) similisque in omnibus punctis; idque ut aliquando obtineatur, raro et vix magna arte praestabis, possetque in id provocari confidenter maximus quisque Geometrarum. Sed si vellem ego efficere per unam eandemque lineam F (F) specie et magnitudine et positione eandem, ut non tantum in casu datorum punctorum B et (B), sed et aliorum ejusdem curvae BB quorumcunque, fieret quantitas paulo ante posita algebraica aequalis nihilo vel dato semper eidem, nimium e Republica Geometrica peterem; atque hoc modo rem a Te acceptam atque ita Te deceptum puto. Nunc vero nihil aliud postulo, quam ut in uno casu certi arcus formula aliqua algebraica, quam ingreditur recta arbitraria, fiat dato vel nihilo aequalis. Quod si alia puncta quam B, (B) in curva data assumas, vel saltem manente B aliud pro (B), tunc etiam vel speculum F (F) aliud orietur specie infima, alia assumta parametro (ut si pro Ellipsi, ubi $2ax - (a:b)xx = yy$, fieret $2ax - (a:2b)xx = yy$), vel saltem manente speculo, erit alia nonnihil positio ejus (ut si Ellipseos prioris vertices, centra vel foci aliam a coaxibus datae curvae BB distantiam acciperent). Curva igitur tota FF, ut et LL, pro variatis partibus ejusdem curvae BB, ordinatim variatur natura vel positione. Ut in exemplis rem tentes (vel refutandi animo si velis, quanquam eum, si quid judico, nunc retinere non facile potes) ego potius a Te petere audeo, quam ut ipse aggredi ausim; adeo nunc sum calculis omnibus etiam levissimis ineptus. Caeterum vides me proprie loquendo nec osculis indigere, quia nec dx nec ddx in calculo occurrunt.

Metaphysicas de motu cogitationes meas Tibi bonam partem notas puto, Dno. Voldero non aeque: itaque rogarem, ut ei communicares, quod et factum literae ipsius indicant.

Lex continuitatis, quam voco, omnibus, si animum advertissent, facile nota esse poterat, sed non fuit etiam praestantibus Viris. Vides enim Cartesium et Malebranchium et alios complures, praesertim extra Geometriam, in eam peccasse. Et si qui animadvertere, vix satis tutam putavere, ut uterentur. Et ad summum nota fuit olim haec Lex, ut regula consequentiarum hominibus, antequam Logica conderetur, et plebi nunc quoque. Hugenius, sat scio, etsi eam observasset, non fuisset ea usurus in demonstrando.

alia demonstratione ad vulgarem magis formam suppetente: quod nec ego improbo.

Cum Dno. Voldero, ut vides et fortasse miraris, confabulari pergo, quia id mihi jucundum et utile etiam ad res aliquando diligentius recognoscendas. Vale etc.

Dabam Hanoverae 20 Januarii 1704.

CLXIX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Binas Tuas postremas uno die accepi, et quas dedisti ad Cl. Volderum, expedivi statim. Responsionem ampliorem in aliam occasionem differo; nunc ut promissa mea solvam, mitto excerpta ex literis meis ad Cheynaeum et annotationes meas in ejus librum *). Rogo ut aliquantulum curatius perpendas, quae objeci, praesertim ubi illum paralogismi postulo aliquot in locis commissi, ut pag. 11, pag. 65, pag. 81, pag. 103 etc. Et haec quidem perfunctorie tantum legenti mihi occurrerunt; forte si studiose inquisivissem, multo plura annotare potuissem. Ex meis vero ad illum literis videbis, me non multum ipsi blanditum esse, sed aperte potius indignatum, quod meritorum Tuorum non debitam habuerit rationem. Hactenus nondum respondit, num quia offensus an quod forte literae meae fretum trajicientes, quod hoc belli tempore saepius accidit, interierint, id equidem nescio: si per occasionem liceret, percontari posses ea de re Anglos illos duos, qui Tibi penultimas meas literas tradiderunt, alter enim eorum, qui alterius Ephorus est, frequentius commercium habet cum Cheynaeo.

Didici ex relationibus publicis, Wallisio defuncto successisse Hallejum, qui proinde iter, quod meditabatur in mare pacificum, exequi non poterit.

Ad reliqua Tuarum binarum epistolarum, ut ante dixi, proxima occasione respondebo; hac vice non licuit esse prolixiori, omnia quippe quae mitto describendi onus mihi incubuit, cum

*) Diese Anmerkungen sind gedruckt in Joh. Bernoull. op. omn. Tom. IV.

amanuensi imperito talia confidi ob analyticorum multitudinem non possint. Hoc tantum addo, methodum meam curvae datae aequales infinitas exhibendi, a Tua non tantum esse diversam, sed ab eodem toto coelo differre; mentem Tuam non satis intellectam antea, nunc melius capio. Sed de his plura proxime. Vale etc.

Groningae d. 9 Febr. 1704.

P. S. Lator harum est Filius Hottingeri, Professoris Tigurini, et Nepos Hottingeri, Theologi inter nostros non incelebris. Eum Tibi commendo.

CLXX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nuper mihi gratissimas Tuas attulit pereruditus juvenis Helvetius Dn. Hottingerus. Doleo quod laborem describendi, quae Cheynaeo miseras, Tibi accersivi imprudens; sperabam enim esse inter discipulos Tuos, qui posset. Mea certe habeo qui describat, homo in Analyticis plane ἀναλφάβητος, id est, qui plane non novit, quid a et b sibi velint.

Rectissime mones Dn. Cheynaeum, posse fieri ut, quemadmodum quaedam Dn. Newtonus reperit ante me, ita etiam quaedam ego repererim ante ipsum. Certe ipsum Calculum Differentialem vel aequivalentem ei ante me fuisse notum nullo indicio comperi.

Verissime etiam mihi notare videris, quae Cheynaeus habet p. 15 et aliquot seqq. ex Tuis promanasse, quidquid dissimularit; idem dicendum ad pag. 52. Et quod, quemadmodum ad pag. 37 observas, ex Newtonianis apud Wallisium etiam vitia calculi et Typographica exscripsit, industriam ipsius non valde commendat. Ad pag. 50 observo methodum Tuam Seriei infinitae per differentias diversorum graduum reductam ad differentialium notos ex problemate valores, non dare Seriem magis implicitam, quam alias Serierum methodos, sed regulariter eandem. Elevationem ad potestates indeterminatas (de qua pag. 56) etiam mihi dudum cognitam fuisse non ignoras, et in iis, quae Dno. Fatio opposui, extractionem valoris ex aequatione duarum incognitarum, factam per Seriem, generalius, opinor, complexus sum quam antea quisquam.

Errores ab Autore admissi pag. 10, 67, 68, ex defectu ani-

madversionis nati videntur. Sed gravis est ille, in quem incidit pag. 65, inque ipsa impignit principia, ostenditque Auctorem magis in Serierum computo, quam in Geometria nostra infinitesimali versatum esse.

Erravit etiam, dum suo Canone pag. 71 determinare voluit, utrum summatrix algebraica sit possibilis, ut optime ostendis in exemplo. Fateor possibile esse, ut per Methodum Serierum infinitarum determinetur, utrum curva quaesita sit possibilis in Algebraicis. Sed nisi prius Serierum tractatio reddatur facilior, quod ab Autore non est factum, imo nec tentatum, res immensi plerumque laboris foret. Atque hinc etiam est, quod mihi Liber ejus parvi momenti visus erat, quia rem Serierum, cui totus innititur, non promovet, nec reddit elaboratiorem.

Generalia certe dudum novimus, sed in praxi multis sunt obnoxia difficultatibus, ob prolixitatem inprimis. Quoties res ipsi successit, apparet non quaesita aut aliunde proposita Problemata solvisse, sed jam cognita suae Methodo applicuisse, quod parvi momenti est. Etsi ipse in enucleandis suis Canonibus studium posuisset, quod Tu in examinandis, saltem dixisset aliquid utile. Sed apparet famam exiguo studio sibi parare voluisse, quod aequum non est. Speravit etiam neminem facile sua excussurum ea qua factum a Te est diligentia.

Certe praeclarae sunt Annotationes Tuae, et optarem ut aliquando inspiceres atque examinares Librum Dni. Parent Galli, quem inscripsit: Elemens de Mechanique et de Physique, sed in quo tantum leges motus ex Hugeniano Principio (Navis scilicet) deduxit; sed subinde problemata attigit Canonesque, in quibus vereor ne semper recte processerit. Quantum autem ex Varignonii literis observavi, scribit *μετὰ πολλῆς φαντασίας*.

Vellem ut viveret adhuc Wallisius, nec morte sua Hallaei iter in mare Pacificum non parvo rei magneticae cognoscendae adjumento futurum abrupisset. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 25 Martii 1704.

P. S. Scotus, Gubernator juvenis Angli Dno. Cheynaeo amicus, qui Tuas ipsi misit, redditas ex ipsius Cheynaei ad se literis judicat, et putabat ipsum Tibi jam respondisse. Id enim fuisse pollicitum, nisi forte ei bis scripsisti, ut fere ex exemplo Tuarum suspicor. Anglus ille cum suo Gubernatore mox Berolinum ibit, ibique per aliquot septimanas morabitur.

CLXXI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Manu adhuc tremente ad Te primum do literas, nondum plane restitutus a gravi morbo, quo laboravi. Febris continua primo me corripuit per sex septemve dies durans tanta cum vehementia, ut Medici desperare de vita mea inciperent et per urbem jam dicerer mortuus; postea remisit nonnihil febris et degeneravit in duplicem tertianam, quae tandem in tertianam simplicem mutata post aliquot hebdomadas me reliquit, sed ita tamen, ut nunc quotidie adhuc lentas quasdam febriculas et intercurrentes phlogoses incertis horis sentiam; quibus adde vigilias continuas mihi valde molestas, nam saepe mihi accidit, ut aliquot dies noctesque successive insomnes transigam. Quibus omnibus vires mirum in modum absumuntur mihi. Nihil hactenus efficere potui, quo somnum naturalem mihi conciliarem, quamvis jam longo tempore ante morbum de hac somni carentia conquestus fuerim. Si quid consilii mecum communicare posses, gratissimum id foret. Ex praescripto medicorum abstineo a studiis intentioribus et inprimis meditationibus mathematicis, donec vires reviguerint et ad perfectiorem sanitatis statum me perduxerint. Hac de causa uxor mea mihi non tradidit, nisi ante paucos dies, literas Tuas postremas, quae appulerunt, cum maximis flagrarem febrilibus ardoribus.| Impense gaudeo, quod observationes meae ad Cheynaei librum Tibi adeo placuerint, quamvis non tanta cura et diligentia, ac Tibi videtur, eum examinaverim, alioquin plura adhuc et graviora haud dubie animadvertissem: nescio vero an acceperit Cheynaeus annotationes meas, saltem hactenus mihi nondum respondit. Ipsi non bis scripsi, sed adjeci literas eas, ex quibus excerpta nonnulla Tibi transmisi, adeoque nescio, unde suspiceris me ei bis scripsisse, nisi forte putes alteram illam epistolam, quam non Cheynaeo, sed Scoto illi Trajectum scripseram, continentem judicium meum de libro Cheynaei in generalioribus, quam epistolam postea cum Cheynaeo communicavit et hic ad me ejus mentionem fecit. Quicquid sit, si Cheynaeus animadversiones meas sibi non acceptas affectat, quod forte ad eas responsionem non habeat in promptu, Tuum est judicare an non censuram publicam mereatur ejus liber, ut videat et se et Anglos suos aliquando caecutire.

Nosti forte quod intra hoc primum hujus anni quadrimestre respublica literaria magnam mathematicorum insignium stragem passa fuerit. Occubuit primo Wallisius Anglus, hunc secutus est Marchio noster Hospitalius Gallus et sub idem tempus Viviani Italus, atque tandem nuperrime abreptus est Ampliss. Huddenius Batavus, Consul Amstelod. Ego vero, qui jam pedem unum in cymba Charontis habui, cum non multum in me situm sit, superstes evasi. Prout audio, Marchio Hospitalius simili fere morbo, quo ego, conflictabatur; per aliquot tempus febre cum laborasset, quamvis non adeo periculosa uti videbatur, conjuncta tamen etiam cum nimiis vigiliis, tandem die 2. Febr. apoplexia correptus eodem die sub vesperam animam reddidit.

Librum Dn. Parent Galli, quem inscripsit: Elemens de mechanique et de physique, quem mihi examinandum commendas, nondum vidi neque Amstelodami reperire est; memini enim me eum ibi quaerere. Vale etc.

Groningae d. 29 April. 1704.

P. S. In Viviani locum in Acad. Regia Scient. cujus membrum fuit, surrogatus est Chymicus aliquis Romanus, sed cujus nomen mihi non scribitur. Nihil hactenus literarum accepi a Voldero Nostro; quae sit hujus silentii diuturni causa, somniare non possum. Forte Tibi separatim scripsit.

CLXXII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

O factum bene, quod Te intelligo periculo exemptum, antequam scivi aegrotum. Ita molestia metuque carui, et gaudium sentio, mihique et Reipublicae literariae gratulor. Dabis interim hoc Tibi et nobis, ut Tui curam geras et a meditationibus abstineas, donec sentias nullum amplius ab illis incommodum metuendum esse. Restitutus sane suadeo ut, horis subsecivis, curam cogitationemque ad rem Medicam convertas, non ut Medicum Clinicum agas praxinque exerceas, quae cura (ut nunc se res habent) cum diligenti naturae inquisitione parum consistit, sed ut in scientia tanti momenti promovenda labores, cujus ignoratione,

ut Clarissimus Varignonius ad me scribit, praeclarissimum Virum Marchionem Hospitalium miserabiliter amisimus, quem Medici occidisse creduntur. Quanquam temperamentum Tuum mihi notum nondum sit, cavendam tamen Hecticam puto, inque id curam dirigendam: non quod adsit, sed sequi posset, praesertim cum vigiliae adsint pertinaces. Balneum aquae dulcis memini et contra Hecticam et pro somno conciliando laudari, ita duabus indicationibus satisfaciet. Pedum lotiones peculiariter ad somnum commendant, capitisque inunctiones. Novi vigiliis laborantem, quem odor aceti juvit; et sane odor hoc loco multum potest, et minus periculi habet, quam per os assumta. Victus maximam rationem habendam putem, qui refrigerans et humectans esse debet, itaque pruna laudarem, et subinde acidum citri succum cibis aptis mistum non dissuaderem; sed noscenda de Te multa essent recte judicaturo, idque Tute poteris facere rectissime, etiam cum alios in consilium adhibebis.

Objectiones Tuas Cheynaeus recte accepit, quod ipse significavit amico, sed ad respondendum videtur spatium sumsisse non quidem male.

Mirarer Tibi ignotum librum Dn. Parent, Academiae Regiae Gallicae Socii, inscriptum: Elemens de Mathematique et de Physique, Parisiis 1700 editum, ubi tamen nonnisi de motus Legibus agit ex Hugeniano plane principio quod suspicor ipsi innotuisse ex iis, quae Hugenius forte Parisiis olim communicavit Academiae et Parentius reperire potuit in Academiae Schedis, aut ex relatu habere. Mihi valde jactantiae se suspectum reddit Praefatione sua, idemque apud me olim tum Hospitalii, tum Varignonii literae confirmarunt. Varignonius etiam significabat, vanitatis ei plurimum inesse, et apparet iniquiorem in nostra visum. In Diario Parisino 4 Maii 1699, legem quamdam motus generalem tradiderat, quae ita habet: In omni concursu in linea recta, corpora conservant legem aequilibrii, respectu puncti immensitatis, quod post ictum eadem procedit celeritate, qua Centrum commune massae ante ictum. Sed quid opus est illo nescio quo Centro immensitatis, cum ipsum centrum gravitatis ante et post ictum feratur. Sed ista non sunt jam tempestiva Tibi, itaque Parentem illum in alia tempora commodiora differamus.

Dn. Volderus fortasse suboffensus est quibusdam a me dic-

tis liberius, quod animo non satis adhibito scripsisse, nec satis se docilem praestitisse videtur, quae vereri me fecerant, ne frustra litigaremus.

Sed si quid in eo genere offendimus, id alii melius nobis ipsis perspicere solent. Itaque cum novissimam meam responsionem legeris, Tuum velim judicium intelligere, an talem fuisse putes, quae potuerit offendere Virum aut a continuanda disputatione absterrere. Mihi facilis nec injucunda doctis cum Viris, ingenio judicioque praeditis, concertatio esse solet. Cum enim rationes bene subductas in his dudum habeam, vix quicquam mihi facile occurrit, in quo sit haerendum.

Quod superest, cura ut valeas, et me ama etc.

Dabam Hannoverae 2 Maii 1704.

CLXXIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quod valetudo mea adversa animum Tuum tantopere tetigerit, non sine summa voluptate ex literis Tuis gratissimis intellexi, unde nunc demum recte percipio, quam carus et quam in pretio Tibi sim. Laetaberis mecum, si sciveris quod nunc frui incipiam secundiore valetudine, quae de die in diem (per Dei gratiam) magis magisque corroboratur, ita ut intra breve me penitus restitutum iri sperem. Incipio etiam suavitatem somni degustare, quod vires meas mirum in modum reficit, quae antea per continuas quibus cruciabor vigilias adeo erant prostratae, ut non parum anxius essem de imminente Hectica, quam cavendam probe mones, eoque magis quod per lentas istas febriculas, quae post fugatum morbum remanserant, carnes meae jam sensim depasci et consumi viderentur; nunc vero cum ad meliora vergant omnia, modo recidiva emaneat, nihil restat nisi ut reliquias morbificas ex corpore expellam, quod per lenem diaphoresin, quae mihi singulis noctibus supervenit, sponte peragetur, quamvis ut video longiusculo tempore opus sit. Maximas gratias ago pro suppeditatis Tuis consiliis medicis, quaedam non sine fructu adhibui. Temperamentum meum nec mihimet ipsi satis adhuc notum est propter variationem, quam subiisse videtur; eram olim plethoricus et pancraticus et ut vide-

batur calidae constitutionis, cum adhuc in patria agerem; nunc vero me phlegmaticum putant medici, constitutionis satis temperatae, et corporis potius macilenti, quam obesi. Si aër patrius magis ad firmandam meam sanitatem conduceret, quam Groninganus, sique id scirem, facile animum mihi subire posset, ut in patriam remigrarem, hac praesertim occasione, qua proceres ad academicam aliquam stationem me invitarunt, quam autem cum tanta laude non possim adimplere, quanta sedem mathematicam; hactenus nondum acceptavi vocationem.

Nuper scripsi iterum ad Dn. Volderum, quem serio exhortatus sum, ut Tibi mihique respondeat, sed ne nunc quidem adhuc rescripsit, adeo ut ne aegrotet valde verear, praesertim cum sciam, eum fere quotannis ictero laborare. Nisi forsan nunc gravius decumbat, icterus enim eum a scribendo non impediret. In novissimis Tuis ad eum datis literis nihil omnino legere me memini, quo jure ille potuisset offendi, adeoque hinc saltem causam non habebit abstinendi a continuanda disputatione. Cur enim et mihi scribere desineret?

Nondum etiam mihi respondit Cheynaeus, nisi forte navis, quae responsionem vehebat, ex Anglia in Belgium per piratas hostes, quod frequenter accidit, fuerit intercepta.

Parentei liber non quidem mihi erat ignotus, sed tamen eum nondum vidi, quoniam in Belgio non reperitur. Quod quae scripsit de legibus motus ex Hugenianis hauserit, facile mihi persuadere possum, nam Hugenius cum Parisiis degeret, multa non tantum in Academia Regia, sed et apud amicos deposuit, quemadmodum ipse testatur in opusculis posthumis nuper editis. Parenteum esse hominem valde vanum, partim ex literis Varignonii, partim ex propriis scriptis colligere potui, ut et quod sit in nostra iniquior, non quod displiceant, sed quod ea ipse non invenerit primus. Quod habet de lege aequilibrii et de centro immensitatis, idem legi in Diario Parisino, et memini me jam tum risisse centri immensitatis appellationem loco centri gravitatis, unde statim vidi, Parenteum oportere esse hominem valde novaturientem et molientem multa, sed parum efficientem; ibidem legi, quod voluerit refutare Hugenium circa oscillationes pendulorum, sed infeliciter, quod statim observavi in literis ad Hospitalium nunc defunctum rogavique ut moneret Parenteum ad palinodiam publice cantandam, sin minus, me ineptam suam refutationem et crassos

paralogismos in honorem beati Hugenii propalaturum. Id nunc factum est a Cl. Voldero in praefatione opusculis Hugenianis posthumis praefixa, ubi Parenteo nimis quidem civiliter, sed tamen solide respondet et asserta Hugenii impugnata defendit.

Nescio an videris Nova literaria Helvetica collecta a Joh. Jacobo Scheuchzero; non est res magni momenti, quia nullum ibi delectum video, et maxime frivola colligit aeque ac ea quae nonnullius pretii sunt. Inter haec inveni Jac. Hermanni Animadversiones quaedam circa Novissimam regulam ducendi perpendiculares ad Curvas ex focis descriptas, in secunda Medicinae mentis Editione Lipsiae facta publicatam, ubi Tschirnhausio novos errores ostendit, quos in correcta sua Medicina mentis denuo commisit, et quidem pag. 100 et 101, ubi agit de curvis ex focis descriptis et de earum normalibus ducendis. Equidem neutrum adhuc examinavi, nec Tschirnhausii regulam nec Hermanni refutationem, sed tamen de errore Tschirnhausii non dubito, quem toties errantem comperi. Noluit, credo, Hermannus suum schediasma communicare ad Acta Lipsiensia, quoniam scit Cl. Menkenium nimis partibus Tschirnhausii addictum, prout meo exemplo expertus est. Quod superest, vale et favere perge etc.

Groningae d. 31 Maji 1704.

CLXXIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum silentio Tuo metum aliquem mihi injecisses, ne valetudo parum ex sententia procederet, responsione tandem ea me cura liberasti. Gaudeo igitur naturam malo superiorem paulatim ad pristinum vigorem redire, quod praestat lente ac tuto fieri, quam, morbificis reliquiis per medicamenta pulsis, novas turbas cieri. Si a Plethorica constitutione ad eam transisti, quae magis ad maciem inclinat, non putem id aëri Frisio adscribi posse, qui ni fallor crassus potius, quam tenuis habetur. Nec somni defectus et febriles ardores phlegmatis, sed potius bilis praedominium testari videntur,' ut adeo ipsa bilis exaltatione a statu plethorico ad prae-

sentem venisse videaris; atque opponenda malo sit diaeta, quae bilem temperare possit.

Etiam Icterus a bilis praedominio est, et credo a ductus fellei oppilatione quadam. Itaque duo indicari videntur, tum quae bilis vim et acrimoniam, aut etiam lentorem in sanguine minuunt, tum quae obstructiones dispellunt. Sed non dubito Volderum nostrum, Virum meliore valetudine dignissimum, habere ad manum praeclaros Medicos, quos consulat. Interim id mihi observo in plerisque Medicis, quod in morbis chronicis, quibus annumero διαθέσεις ad morbum, malunt medicamentis, id est, per vim tentare curam, quam diaeta, id est naturali modo. Ad diaetam autem refero etiam illa medicamenta, quae lente atque insensibiliter operantur.

Optem Tibi licere per otium cogitare diligentius de tota praxi medica, in qua licet certas eorum, quae fiunt, rationes non assequamur, putem tamen eum, qui accuratis ratiociniis sit assuetus, inspectis iis quae crebra experientia sint constituta, multa praeclara et in publicum profutura colligere. Mihi ab aliquot annis prodagra videtur minari; etsi enim nondum se totam ostenderit, nunc tamen in genibus, nunc in pedibus praecursores quosdam suos, dolores scilicet, parum quidem acres et parum durabiles, nonnullos tamen misit. Quo in statu putem malo adhuc caveri posse, si quis rectam procedendi rationem teneret; qua de re judicium tuum mihi gratum foret. Constitui vinum in posterum magis, quam hactenus aqua temperare, et rarius ad convivia ire, in quibus amicis praeter aequum obsequi necesse est.

De Parentio plane ex re judicas. Hospitalio defuncto res Mathematica in Gallia retro sublapsa feretur. Nam Varignonius, unus contra caeteros omnes, aegre meliores methodos tuebitur.

N o v a l i t e r a r i a H e l v e t i a e nondum vidi. Sed laudo tamen institutum. Ignoscendum est iis, qui talia colligentes etiam quae minoris sunt momenti inferciunt, ne quem offendant et ut diversi generis Lectoribus satisfaciant, modo ne meliora omittant. Facile credo Dn. Tschirnhausium non satis accurate constituisse perpendiculares ex focis, et Dn. Hermannum, quod deprehenderet, invenisse. Sane jam ante meum Italicum iter, puto circa annum 1688, significaveram ipsi habere me modum ex focis generalem, quem postea publicavit Fatius. Mihi quidem non ex calculo, sed ex tendentiarum compositione in tendentiam centri gravitatis in

mentem venerat, quem publicavi olim in Diario Parisino *). Sed tunc Dn. Tschirnhausium haec frustra monebam: videbatur enim sibi habere multa meliora et generalia, quorum spes facit, ut ne animum quidem adhiberet monitis meis.

Si quid adhuc circa Parabolicorum arcuum relativas mensurationes post Tschirnhausiana monendum haberes, eadem via Novorum Literariorum Helvetiorum uti posses. Nam verissimum est quod ais, Dn. Menkenium aegre talia admittere, quamquam si in veritatis explicatione aut vindicatione nuda consistant, nec quicquam habeant, quod offendere merito possit, nemini aequo judici displicere debeant. Itaque nunquam mihi ingratum fuit refutari, quoties rationibus nihil admistum fuit, quod in personam ipsam iniquum videri posset. Vale ex sententia et fave etc.

Dabam Hanoverae 6 Junii 1704.

CLXXV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

En hic tandem responsionem Volderi jam diutule scriptam, mihi tamen nuperrime acceptam. Videtur Volderus, uti verebaris, nonnihil offensus, idque in meis expressius ostendit quam in Tuis; ita enim ad me habet: „Quaeris cur siluerim tam diu? quia haesitavi admodum, num Illustri Leibnitio responderem. Habent enim „ejus posteriores literae quaedam, quae mihi persuadent, illum magnorum Virorum more, non aequo animo ferre contradicentem. „Nec velim quidpiam agere, quod ipsi ingratum sit, praesertim cum „ex hac concertatione nostra fructum non adeo magnum sperem. „Tota enim res huc redibit, ut pro demonstratione substantiae natura sua activae accipiam nomen ἐντελεχείας, unitatis, virium „primitivarum, quae omnem in se contineant mutationem, de quibus tamen nihil intelligam, nisi in quantum vires derivatas, sive „quantitatem et velocitatem perspectas habeam. Unica ratio, propter quam tantopere desideravi, scire omnem substantiam natura „sua esse activam, ea fuit, quod in causis actionum quidpiam in-

---

*) 1693 Septembr.

„veniebam non satis perspectum, nec illud per ἐντελεχείας notius „fieri apparet. Rescripsi tamen utcunque, ut vides, quia ita velle „videbaris; absque tuis enim literis haereo, an tam cito ex hoc „dubio, rescribendumne, an non foret, emersissem, praesertim „cum ab aliquot hebdomadis languor me invaserit, qui omnem „tollit animi vigorem. Nec aegroto nec bene valeo, qui status eo „pejus habet incommodi, quo minus in eo prospicere licet finem.“ Et haec quidem Volderus; sed rogo cures, ne ex responsione Tua suspicari possit, quod ea Tibi transscripserim. Vereor ne languor, de quo ille queritur, morbum aliquem graviorem minetur, etenim et mihi diu ante morbum membra tristi quodam languore gravabantur. Non tam promte mihi redeunt vires, quam ante aliquot hebdomadas sperabam, saepius atque per intervalla nonnullas adhuc turbas in corpore meo persentisco, et vigiliarum contumacia nondum omnino cessat; unde etiam Tecum putarem bilem habere praedominium in corpore meo, nisi phlegmatis abundantia contrarium indicare videretur. Consuluerunt mihi quidam usum acidularum Pyrmontanarum, quas ipsi similibus affectibus laborantes mirae utilitatis se expertos esse depraedicabant; haud dubie earum virtus Tibi notior erit, quam ulli alii, utpote qui ipsis vicinior es, ideoque quid de iis sentias et an mihi convenire putes, gratum erit intelligere, quamvis hoc anni tempore acidulae usurpari non soleant, nisi forte etiam ineunte autumno.

Non magna mihi spes affulget de promovenda praxi medica, quemadmodum enim fere semper abhorrui ab iis, quae certis rationibus stabiliri nequeunt et meris conjecturis nituntur, ita tanto magis fui alienus ab excolenda medicina practica, quod non tantum crebram experientiam et proprias multas observationes, sed etiam felicem memoriam (quibus omnibus ego destituor) requirat, et interim ratiocinando nihil vel parum efficiatur.

Podagram per bonam diaetam et abstinentiam ab acrioribus et calidioribus praecaveri posse certum est. Novi hic virum, qui postquam per complures annos intensissimis doloribus podagricis singulis fere bimestribus recurrentibus cruciatus esset, ab iis liberatus est sola vini abstinentia vel potius moderatiore ejus usu; nam non adeo ab eo abstinet, quin inter epulandum bis vel ter, sed modice bibat; laudavit etiam aristolochiam longam et usum saponis Veneti, cujus circiter drachmam unam singulis mane cum potu caffé absorbet: nunc a tribus jam annis in tantum podagra

eum deseruit, ut toto hoc tempore propter eam nunquam decubuerit, et vix bis vel ter nonnihil doloris senserit, loco quod antea perpetuo fere lecto fuerit affixus. Dolores illi obtusiores, quos modo in genibus, modo in pedibus persentis, possunt provenire ab arthritide vaga, sed quae facile in podagram abire queat, nisi convenientibus remediis ei obviam eatur; quae vero ex diaeteticis petuntur, haud dubie meliora sunt et tutiora, quam quae ex pharmaceuticis. Libera imprimis sit transpiratio insensibilis, et juvetur potius ad sudorem usque quam ullo modo impediatur, nam ab hac impedita plerosque morbos chronicos originem suam trahere putem.

Quid nunc defuncto Hospitalio in re mathematica peragatur in Gallia, non equidem scio; certe hoc tempore neminem ibi novi, qui in profundioribus excellat, si unum excipias Varignonium, a quo ipso tamen haud adeo magni progressus expectandi sunt: intelligit inventa aliena et excolit, sed ipse ad inveniendum non videtur factus: diceres esse eum bonum commentatorem, non vero Auctorem.

Examinavi quae habet Tschirnhausius de ducendis perpendicularibus ad curvas ex focis descriptas, sed pro more ejus omnia falsa deprehendi, excepto solo canone pro ellipsi ordinaria. Observo tamen Hermannum non satis percepisse mentem Tschirnhausii, hic enim errat, sed ille tanquam aliter errantem corrigit. Non e re esse judico, veterem camarinam movere circa parabolicorum arcuum relativas mensurationes, nisi simul totam ejus historiam una cum literis, quae Te inter Tschirnhausium, Menkenium et me hanc materiam spectantes volitarunt, in lucem edere velim, ut qua fide mecum actum sit, cuilibet innotescat; quod an consultum sit facere, ex Te libenter audire velim. Vale et fave etc.

Groningae d. 21 Junii 1704.

CLXXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non injustam plane fuisse quaerelam meam, Dn. Volderus noster, pro excellenti suo ingenio et animi aequitate, ipse credo

sibi dicet, ubi mea haec novissima, quae nunc transmitto, cum animi attentione legerit. Et mirum est sane, quam saepe Viri etiam egregii, dum aliud agunt aut in mente habent, in conferrendo in diversum abeant ab eo, de quo agitur. Tria quatuorve argumenta plus semel adhibui, quibus nunquam directe respondit, ut quod omnis realitas aggregatorum in simplicibus consistat; quod extensio sit relativum quoddam, seu alicujus extensio sive diffusio; quod vis aut actio non possint esse modificationes rei per se mere passivae. Et nunc ipse aliis verbis sub fundamenti virium nomine agnoscit, quod toties inculcavi. Quid ergo a me demonstrari postulat? An unde sit in rebus hoc fundamentum? Sed ita profecto novo fundamento indigeret. Et perinde id mihi videtur ac si quis numeri, spatii, temporis altiores origines quaereret, quam quae insunt notioni ipsorum. Ut ergo spatii et temporis ultimas rationes explicui, ex ordine nimirum existendi aut simul aut successive, ita et fundamentum illud virium explicui per analogiam ejus agendi principii, quod experimur in nobis, ut scilicet nihil aliud contineat, quam perceptionem et appetitum. Ulteriora in rerum natura nec evinci nec cognosci possunt, praeter Rationem Supremam et communem omnium percipientium substantiarum, harmoniaeque inter ipsas, quam Deum appellamus, et cujus hinc nova et clarissima demonstratione elucet. Non ergo nuda nomina ingessi pro rebus, quemadmodum ipse in suis ad me literis bis insinuat. Certe illa mea argumenta, quae dixi, nec facile alibi inveniet, nec facile irrita reddet. Et nescio an his conferenda alia passim sint obvia, et quae magis penetrent in interiora rerum. Entelechiae quoque et Virium derivatarum, et Monadis nomina convenire rationibus, quibus significata nominum eruuntur, res ipsa, ni fallor, ostendit.

Haec quae hucusque scripsi, communica, quaeso, Dn. Voldero, si placet, tanquam id faceres sponte Tua, quo melius intelligat non omnino intempestivam fuisse admonitionem meam.

Scripsit ad me Dn. Witsen, Consul Amstelodamensis, Huddenium Schedas suas Mathematicas Testamento reliquisse nepoti ex sonore, puto Domino Dedée (sic enim lego) unde credibile est hunc eo esse ingenio, ut uti iis possit. Forte Tibi aliquid de eo notum. Eras aliquando in Commercio cum quodam Batavo in munere judiciali, si bene memini, posito, qui aliquid praestiterat

in Mathematicis. Dominus Nieuwentiitius silet; et puto recte facit, donec aliquid melius praestet quam hactenus.

Amico cuidam meo Germano, qui apud Dominum Legatum nostrum Londini agit, quaerenti Dominus Cheynaeus misit schedam, quae accepta Tua refert et responsionem pollicetur.

Non miror vires nondum plane refectas, post tantum morbum. Pyromontanae acidulae purgant satis valide. Itaque hoc anno Tibi eas convenire vix putem. Tempus iis utendi sunt aestivi menses; autumnales potius calidis aquis apti habentur.

Gratias ago pro monitis circa arthritidem. Ut bellum Domino Tschirnhausio denunties, auctor esse nolim. Abiturit cursor. Vale et fave etc.

Dabam 1 Julii 1704.

CLXXVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Paucula haec in eum tantum finem Tibi exarata volo, ut commendem Nobilem hunc Juvenum Anglum ejusque Ephorum Gallum eruditum et moribus suavissimis praeditum, quod alioquin in Gallis rarum est. Erat mihi jam olim familiaris, cum hic aliquamdiu ageret et postea Ultrajecti de me bene meruit in vocationis illius negotio, adeo ut de eo vicissim bene merendi omnem captem occasionem; quapropter quicquid favoris in eos contuleris, id tanquam in me collatum accipiam.

Accepi nuperrime postremas Tuas cum adjuncta responsione ad Cl. Volderum, ad quem etiam eam jam dimisi, una cum eo, quod ad me habes et quod cum Voldero communicandum petis. Quam primum rescripserit, curabo ut quantocyus ad Te perveniat. Quis ille sit, cui Huddenius scripta sua mathematica per testamentum reliquerit, ego non novi, sed rogavi Volderum, ut quid de ea re sit, nobis perscribere dignetur. Gaudeo, quod certa habeas indicia, Cheynaeum meas observationes in librum suum accepisse; sed nullam hactenus responsionem ab illo accepi. Audivi Moivraeum turpi et infando morbo laborasse periculose. Vir iste Batavus in judiciali munere positus, cum quo per aliquot annos mihi commercium intercessit, cujusque nomen erat Dierquensius, ante semestre

circiter diem suum obiit; reliquit autem filium in nostris studiis se ipso versatiorem, sed qui mecum non permutat literas. Vale et fave etc.

Groningae d. 14 Juli 1704.

CLXXVIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Miror tam diuturnam Tuam in respondendo moram; jam plures elapsi sunt menses, quod per Latreillium Gallum, Angli cujusdam nobilis Ephorum, Hanoveram petiturum, literas meas ultimas ad Te miserim, ad quas tamen nihil responsi in hunc usque diem accepi. Ne sola iret Cl. Volderi epistola, paucula haec adjicere volui; multa enim quae scribam non habeo. Respondit mihi Cheynaeus simulque transmisit schedam suam, quam post acceptas meas animadversiones in librum suum typis evulgavit: sed non quo decet candore mecum egit. Nam praeterquam quod multa, quae ipsum monueram ut corrigeret, in nos iniquius dicta, plane intacta dissimulavit in scheda sua, et multa etiam, quae paralogismos ejus indicabant, ita pervertit, ut lectori persuadeat, eos nihil nisi vel calculi vel praeli errata fuisse; hoc insuper malae fidei commisit, ut in praefatiuncula Schedae isti praefixa diceret, se non scripsisse librum suum pro tyronibus, quibus relinqueret curam et diligentiam expiscandi errores calculi et praeli, si minutias non attendere, se tamen post jam impressum suum librum multa de novo animadvertisse et nunc adjecisse notatu digna, una cum calculi et praeli erratis, quorum quaedam secum essent communicata ab amicis suis, inter quos me nominat: ut verbo dicam, postquam aeruginem suam effudit in nescio quos tyrones, qui minutias et leviora sphalmata tantum carpunt, rem totam eo dirigit, ut persuadeat quidquid in ea Addendorum et Annotandorum, ut vocat, scheda continetur, alicujus momenti et notatu dignum, id sibi ipsi, reliqua vero nullius momenti, deberi amicis suis, quibus speciatim sphalmata tantum calculi et praeli observata tribuit, quae ipse tanquam attentione sua indigna neglexerit, cum tamen omnes illius schedae Additiones et Obervationes

cujuscunque momenti sint, paucissimis exceptis, ex Animadversionibus meis verbotenus fere excerpserit; de suo vero nihil vel parum addiderit, ut Tibi facile constabit, eas cum Addendis illis conferendi quondam occasionem habituro. Ergo tandem hoc me honore mactavit Cheynaeus, ut me, sub titulo amici, traduceret pro tyrone, suum vero plagium in me commissum celaret. Ne tamen popularem suum Craigium, quem inter amicos suos mecum nominat, mecum etiam in tyronum classem referre videretur, eo humanitatis erga ipsum descendit, ut ipsi tribueret certam aliquam regulam integrandi differentialem binomialem, quae tamen etiam ex integro mihi debetur, utpote de verbo ad verbum ex Animadversionibus meis desumpta. Credo Cheynaeum fuisse mente captum, cum schediasma suum, in quo multis adeo modis me offendit, ad me mittere in animum sibi induceret. Ei nuper respondi: quo stylo usus fuerim facile conjecturabis: certe non habebit, quo multum de epistola mea glorietur, uti fortassis de praecedentibus meis fecit. Jam procul dubio nosti, quod Cl. Moivraeus singulari libello refutaverit Cheynaeum: refutationem uterque ad me misit, hic ut ex me intelligeret meam de ea sententiam, sed quam rotunde denegavi meis tam male utenti, ille ut amicitiam, ut ait, mecum iniret et rationes suas refutandi exponeret. Animadverto Moivraei libellum nonnihil acerbe scriptum, in quo tamen multa solide et docte objecit Cheynaeo: interim ut verum fatear, quaedam etiam incaute carpsit, et multis in locis erravit ipse, id quod in nupera mea responsione non dissimulavi, ut videret me cuique suum tribuere. Captavi tunc occasionem narrandi ipsi, quibus artibus erga me usus sit Cheynaeus. Quid nunc uterque ad responsiones meas replicaturus sit, tempus docebit. Accepi quoque Newtoni opus recens editum, continens tres partes: 1. Opticam de coloribus, Anglice scriptam; 2. Enumerationem linearum tertii ordinis, Latine; 3. Quadraturas Curvarum Geometricarum, etiam Latine. Nondum mihi vacavit ea perlegere. Vale etc.

Groningae d. 6 Decembris 1704.

CLXXIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literae, quas cujusdam juvenis Angli Ephoro Gallo credidisti, accepi paulo serius, quod absens essem domo. Puto me tamen respondisse. Cheynaeum vides esse qualem praedixeram, laureolam quaerentem in mustaceo. Moivraei Scriptum nondum vidi, sed puto esse multo peritiorem. An aliquid attulit novum aut scitu dignum? Id significa quaeso, aut potius librum, cum bis habeas, mitte. Erit enim credo perbrevis, aut certe poterit dividi in partes. Craigius, Cheynaei popularis, longe alterius animae doctrinaeque est. Theorema quoddam pro quadraturis ordinariis Actis Lipsiensibus *) inseruit, quod dignum esset accurata consideratione.

Ego de analyticis vix cogitare soleo, nisi cum Tuis literis excitor, per quas fere solas disco, quae in hoc studio gerantur.

Doleo Dominum Marchionem Hospitalium nihil aliud, quam Conica reliquisse, cum posset certe dare alia majoris momenti. Interim fortasse tractaverit Sectiones conicas universaliori more, quam hactenus factum.

Ex Anglia mihi scribitur, Flamstedii observationes 30 annorum editum iri. Hinc fortasse facilius aliquando perveniemus ad Theoriam Lunae absolutiorem; Newtonianam quidam in ipsa Anglia Phaenomenis satisfacere negant, sed ipse Newtonus quaedam adhuc determinanda reliquit.

Vidi nuper, quae David Gregorius contra meam sententiam de vorticibus scripsit. Certe, si quid judico, licet forte vortices Planetam deferentes negare possimus, non poterimus negare gravificos. Neque quisquam evertet, quod pro fundamento sumsi, nihil movere nisi a contiguo et moto, attractionemque adeo Solarem, sine motu materiae circumsolaris, in qua sunt Planetae, intelligi non posse.

Opus Newtoni de coloribus profundum videtur; sed nondum satis examinare licuit, an ejus ope spes sit explicandi colores fixos, quos vocant. In Tractatu de Quadraturis Curvarum ordinariarum,

*) Specimen Methodi generalis determinandi Figurarum quadraturas. Act. Erudit. 1704. Jul.

nihil puto esse, quod nobis sit valde novum aut arduum. Determinatio numeri Linearum tertii gradus et, ut credo, recta est, et habenda est pro incremento non contemnendo Geometriae; et placet imprimis quod de diametro observat ordinatam curvae altioris secante in plures quam duas partes, servata utrimque aequalitate.

Adjunctas rogo, ut ad Dominum Cuperum et Dominum de Volder, insignes in suo quemque genere Viros, mittas, et priorem, si videtur, lectam claudas.

Dabam Berolini 25 Januarii 1705.

CLXXX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Literas Tuas ad Cuperum et Volderum curavi recte; hic nihil adhuc responsionis ad me misit. Scriptum Moyvraei contra Cheynaeum nihil peculiare continet, praeter Theoremata quaedam pro comparatione et reductione arearum, quae ipse quidem magni facit, nobis tamen jam diu familiaria, imo latius extensa, quam a Moyvraeo factum. Libellus commode mitti non potest per tabellarium publicum, continens (praeter praefationem) 129 paginas; mittam tamen Tibi per Gallum aliquem, quem olim jam vidisti, cujus nomen Magnavillius, qui cum nobili Anglo ex Boylaei familia, cujus Ephorus est, fortasse brevi hinc proficiscetur, aulam vestram visitaturus. Cheynaeus respondit ad objectiones Moyraei, uti hic mihi scribit, sed responsionem ipsam nondum vidi. Ea a Moyvraeo ita describitur: „Figurez vous, inquit, un homme qui est dans „des accés continuels de folie et de rage, qui me charge d'injures „grossieres et ridicules à chaque ligne, voyla l'image de Cheynés „dans la response qu'il me fait. Figurez vous d'un autre coté „toute la foiblesse de raisonnement, toute l'impuissance, toute la „mauvaise foy, et vous aurez une juste idée de son livre. On dit „que Craige y a grand part, je le croirois bien; il est digne de „Cheynés et de Craige, ces deux grandes lumieres de l'Ecosse" etc. Moyvraeus parat replicationem, et forte serra diu reciprocabitur.

Non legi opus Astronomicum Davidis Gregorii; habui id per biduum tantum in aedibus meis, perlustrando tamen obiter vidi

omnia fere ex Newtono et nihil ex se praeter superflua habere. Mihi etiam displicuit, quod vortices absolute negare velit, qui licet se non habeant ex mente Cartesii, putem tamen eos eleganter satisfacere phaenomenis, prout concipiuntur a Chr. Hugenio in suo Cosmotheoro, vel fere similiter diu ante a Keplero. Tecum enim sentio absurdum esse, in physicis statuere attractionem solarem citra motum aliquem materiae circumsolaris, qui causa sit planetarum gravitatis solem versus. Moyvraeus crassum paralogismum observavit in Gregorio asserente Ellipsin Cassini habentem rectangula linearum ex focis ad puncta circumferentiae ducturum aequalia, esse eandem cum illa altera ellipsi, quae ductis lineis ex focis faceret angulos circa unum proportionales areis circa alterum. Hoc si dixit Gregorius, fateor magnam in eo fuisse inadvertentiam; Ellipsin enim Cassinianam algebraicam esse, per se patet, alteram autem non tantum transcendentem, sed ne quidem construibilem suspicor. Sed Gregorium paralogizare non est novum; audio interim quod monitus jam errorem recantaverit in Transactionibus Philos.

Newtoni liber de Coloribus latine versus propediem lucem videbit. Verum est, nihil me vidisse in ejus tractatu de Quadraturis, quod nobis valde arduum vel novum esset. Curiosa magis est determinatio numeri linearum tertii gradus; sed optassem demonstrationes; vereor enim ne quae de diametro ordinatim applicatas secante asserit, conjecturae sint potius, quam demonstratae veritates, eoque magis, quod talia affirmet de omnibus superioribus linearum gradibus, quae interim si vera essent, fateor, elegantissima forent, sed simul, ut praevideo, difficillimae et abstrusissimae demonstrationis.

Porro scribit Moyraeus, Hallaeum habere sub praelo versionem suam Latinam omnino novam manuscripti alicujus Arabici ex Bibliotheca Oxoniensi, continentis tractatum aliquem Apollonii De Sectione Rationis; item Hallaeum sperare se restituturum tractatum Apollonii De Sectione Spatii; item eundem detexisse celebre Guldini theorema de circumferentia descripta per centrum gravitatis etc. in praefatione Pappi ad 7. librum; eum nactum esse manuscriptum graecum antiquum, in quo hoc theorema clare sit expositum; item Cheynaeum edidisse in vernacula sua lingua Principia philosophica Religionis naturalis, sed nihil aliud esse quam rapsodiam ex aliis compilatam.

Nostine, quaeso, an liber hic extet: Eberhardi Schilt Topographia Romae 1589 dedic. Duci Brunswigo-Luneburgensi, aut an forte reperiatur in Bibliotheca vestri Principis. Aliquis amicus habet hunc librum manuscriptum, scire autem vellet, utrum non typis sit excusus. Legi nuper in relationibus nostris publicis, Regem Prussiae fundaturum Berolini novam Academiam pro Principibus et Nobilibus tantum, et jamjam Professores ad eam invitari; haud dubito, quin Tuum hac in re consilium fuerit expetitum. Scire itaque gestirem, quemnam pro professore Matheseos commendaveris aut adhuc commendaturus sit. Vale etc.

Groningae d. 18 Aprilis 1705.

P. S. Meus Collega Cl. Braunius commentarium suum in Epistolam ad Hebraeos nuper in lucem emisit, cujus exemplar unum etiam Tibi mitti curavit, ut scilicet judicium Tuum de hoc opere, ut et de unione facienda inter Reformatos et Lutheranos pro cujus successu multa in dedicatione disserit, ex Te expiscetur

CLXXXI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex literis maxime Reverendi Viri Johannis Braunii intellexi Te discessum parare, et in Patriam redire constituisse. Haec ut Tibi feliciter eveniant, ex animo opto. Caeterum cum penes Te sint, ni fallor, responsiones meae ad objectiones clarissimi Baylii in novissima Dictionarii editione contentas ab ipso remissae, rogo ut eas obsignatas mihique inscriptas relinquas apud amicum, ut, data occasione, ad me transmitti possint.

Plura nunc non addo, incertus an hae Te Groningae sint inventurae; tum veritus ne occupationes domicilium transferre molientis aliis cogitationibus locum relinquant. Certe occupatissimum Te esse, vel ex ipso silentio Tuo judico; alias enim nuntium consilii Tui a Te ipso exspectassem. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 22 Junii 1705.

CLXXXII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quod consilium meum de remigratione in Patriam, ad quam me jam paro, nondum Tibi aperuerim, non tam occupationes in causa sunt, quam quod abste ipso prius expectaverim responsionem. Ut enim verum fatear, verebar fere, ne quid humanitus acciderit Tibi, diu adeo silenti. Nunc vero Te rivere et valere, ex novissimis Tuis intelligo quidem et gaudeo, sed nihil in iis reperi quod responsionis loco esse posset, ad quaedam quae Te in postremis meis rogabam, ut vel eas ad Te non pervenisse vel potius Te earum oblitum esse credam. Quaerebam aliquid de nova illa Academia Berolini fundata; quisnam ibi fungatur Professione Matheseos, aut forte num adhuc vacua sit, et an-non consilium Tuum de vocando idoneo Viro sit expetitum. Quaerebam etiam rogatu alicujus amici, an Tibi innotescat liber aliquis, cujus titulus: Eberhardi Schelii Topographia urbis Romae; amicus ille habet hunc librum manuscriptum, quem aestimat, et si sciret nondum editum fuisse, forte ederet. Iter quod in Patriam meditor, aggrediar bono cum Deo intra quinque vel sex hebdomadas, ita ut sufficiens tempus respondendi Tibi suppetat, si qua responsione ante discessum me dignari volueris. Responsiones Tuas ad Objectiones Baylii (uti petis) apud Amicum obsignatas Tibique inscriptas relinquam, data occasione ad Te transmittendas, nisi ea forsan ante discessum meum se offerat. Misi Tibi nuper per Dn. Massonum, Eruditum Gallum, Moyvraei Animadversiones in librum Cheynaei: illas recte traditas spero. Per postremum cursorem accepi literas a Dn. Cheynaeo, nihil nisi continuam invectivam continentes, atque me objurgationibus, contumeliis et omnis generis injuriis tam horrendum in modum obruentes tam barbare tam rustice afficientes, ut certe legendo nescire, utrum somniarem an vigilarem. Nihil enim minus ab isto homine, quam tam indigne tractari expectabam. Quantum conjicere possum, suspicatur me suum adversarium ex eo, quod Cl. Moyvraeo perscripserim, qua ratione et qua fide erga me usus sit in edendis suis Addendis et Adnotandis, et quod postea Moyvraeus meam epistolam circumgestaverit multisque suis amicis monstraverit: neque etiam satis concoquere potuit, quod apud se de suo modo agendi conquestus

fuerim, verbis non affectatis, id est rotunde scapham vocando, quam meam sinceritatem vocat ille stylum modestis viris insolitum. Ut verbo dicam, 'urit illum, quod suae impudentiae, arrogantiae et stolidae vanitati applaudere noluerim. Constitui inepto huic homini non respondere, sed hoc ipso die mittam ad Dn. Moyvraeum descriptionem rerum praecipuarum, quae Cheynaeum inter et me peractae sunt, ut si opus ille censuerit, meas ipse (tanquam me inscio) partes tueri possit.

Accepi literas a Cl. Varignonio, quibus intelligo Dn. Saurinum aegre ferre, quod Regulam illam de determinando valore fractionis utrumque suum terminum certo casu evanescentem habentis, mihi arrogaverim in Actis Lipsiensibus superioris anni; quam tamen ipse in aliquo Diario Paris. attribuerit Marchioni Hospitalio. Sed miror hujus Galli audaciam, tam inqua a me exigentis, quasi quae mea sunt, mea esse desinerent, ex quo Hospitalius ea suo libro inseruit. Dicit Saurinus, se quidem credere, Regulam illam a me esse inventam, non tamen honeste factum esse, quod demum post fata Hospitalii eam mihi vindicare velim. Equidem non veritus fuissem, eam mihi vindicare, vivente Hospitalio, si scivissem, ut postea scivi, Saurinum eam Regulam tanto cum elogio Dno. Hospitalio adscripsisse: nam ut verum fatear, pati non potui, ut quae mea sunt, tam proterve mihi eriperentur et ad alium derivarentur. Est igitur ipse Saurinus, qui vindicias illas a me extorsit; si siluisset, et ego siluissem. Quod si vero putet, falso a me arrogari, et vel parum me irritare pergat, habeo literas Hospitalii ad me scriptas, quas si edidero, docebunt non hoc tantum, sed alia pleraque a me habuisse Hospitalium. Cl. Varignonius etiam Tecum, ut mihi scripsit, communicavit suam meditationem de vi centrifuga, quam putat a Nob. Hugenio aliisque duplo justo minorem fieri. Sed ostendi Varignonio, quod erraverit ipse, et quod recte sit aestimata vis a Dn. Hugenio: meae tamen demonstrationi quantumvis geometricae nondum omnino acquiescit. Vale etc.

Groningae d. 11 Julii 1705.

CLXXXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non memini videri epistolam, qua de Professore Berolinensi quaesiveris. Non est haec prima epistola, quae mihi interciderit; itaque cum praeter morem sileo, ubi ratio est respondendi, aequum est, ut me vivum potius quam mortuum, et literis potius fraudatum, quam Tui negligentem credas.

Fundata est Berolini Equestris Academia, in qua adolescentes etiam Elementa Matheseos docentur. Sed quantum hactenus intelligo neminem aliunde accersiverunt huic muneri obeundo, utunturque Domino Naudaeo, Viro docto, qui dudum illic tum in collegio literario, tum in Pictorum sculptorumque Academia docet. Nam Director Academiae hujus jussus est sumptibus parcere, quantum ejus fieri potest, dareque operam, ut quamminimo res Aulae constet.

Eberhardum Schelium ignoro; Radbodii Schelii quaedam vidi olim politica et militaria.

Chynaeum doleo eo processisse; malo inter Eruditos exemplo, in quibus vellem plus quam in aliis humanitatis. Nam nisi scientia meliores nos reddat, proderimus aliis potius, quam nobis.

Crediderim nonnullos ...... urere, quod in quadam menstrua 'in Batavis edita relatione de rebus literariis, de Tuis in Hospitalianum opus meritis dictum est. Ipse utique vir modestissimus plurimum se Tibi debere professus est, cui aditum ad Methodos nostras suum in solidum transcripsit, cum Parisiis Tua consuetudine uteretur.

Diu apud me fuit Dni. Varignonii meditatio de vi centrifuga, sed per alia omnia distracto satis expendere non vacabat. Tuam censuram videre gratissimum erit.

Moivraei libellum accepi, Tibique ago gratias. Video non esse spernendum ingenium Viri, expectoque ab ipso aliquid ad Scientiae augmentum, quemadmodum et a Juvene illo, cujus aliquam meditationem inseruit circa Series infinitas.

Sed vellem ego Viros in Anglia ad laudem in his studiis aspirantes Problemata aggredi; is demum lapis est Methodorum Lydius. Dnus. Fatius hoc praecavit in Libro suo, denuntians semel in universum nolle se vexari Problematibus: istud quidem sapere est.

Nisi maxime Reverendus Braunius significasset mihi abitum Tuum imminentem, elapsus eras mihi nihil minus cogitanti. Responsiunculam ad Baylium meam relinque, quaeso, obsignatam apud maxime Reverendum Braunium; nolo enim mihi mitti, quia forte ad Batavos remittenda erit. Antequam prorsus abeas, aliquas adhuc literas a Te expecto. Dominus Frater Tuus valde desiderat Schediasma olim a Pensionario De Witte typis editum circa reditus ad vitam. Habeo, sed in mole chartarum invenire non possum. Tibi ex Batavis nancisci eique adferre facile erit. Itaque rogo hanc mihi gratiam facias. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 14 Julii 1705.

CLXXXIV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Doleo penultimam meam Epistolam ad Te scriptam intercidisse; memini unum alterumve novum continere. Miror saepe contingere, ut literae Tibi inscriptae non tradantur, cum illud malum vix semel mihi contigerit. Spero me hinc profecturum medio circiter Augusti, ita ut saltem semel adhuc hic a Te literas expectem, si quid mihi perscribendum habeas. Responsionem ad Baylium, uti petis, obsignatam deponam apud Rev. Braunium, qui ad jussum Tuum de ea disponet. Occupato nunc mihi et aliis cogitationibus distracto non vacat explicare hic ad longum meam censuram in Varignonii meditationem de vi centrifuga: ubi ad quietiorem statum pervenero (utinam!) omnia fuse exponam. Hoc equidem dicere possum, quod Varignonius non recte consideret vim centrifugam, sumendo ejus particulam infinitesimam pro integra, elementum pro toto: error ex eo habuit originem, quod curvas tanquam polygona rectilinea consideraverit, id quod in hoc negotio non procedit. Sunt enim curvae considerandae tanquam conflatae ex arculis parabolicis osculantibus, ita ut (Fig. 156) vis centrifuga non sit aestimanda per lineolam BC, recessum momentaneum a tangente AF, sumta scilicet AC tanquam lineola recta, ut Varignonius facit, sed aestimari debeat per DE recessum momentaneum a tangente, sumpta scilicet AE tanquam arculo parabolico

osculante curvam AEH in AE; neque obstat, quod et ipse arculus AE, licet infinite parvus respectu curvae AH, sit tamen ex rectis lineolis infinities minoribus compositus; nam et hoc ipsum ostendit, quod BC sit nonnisi elementum verae vis centrifugae; plane enim judico, rem se habere ut in gravitate, quae non ictu, sed infinitis ictibus, quamvis tempusculo infinite parvo producitur: alias enim vires centrifugae non forent in duplicata ratione velocitatum, sed in simplici, quod est contra experientiam. Haec tamen et alia non poterant satisfacere Varignonio pertinaciter inhaerenti suo errori, et quod magis mireris, cum ipsi adducerem demonstrationem more Veterum adornatam, in quam scilicet nulla infinite parva ingrediuntur, et qua apodictice demonstrabam communem sententiam, quod grave agitatum in circumferentia circuli horizontalis celeritate aequali illi, quam acquireret cadendo ex altitudine semiradii illius circuli, habiturum sit vim centrifugam aequalem suae gravitati; et cum in illa demonstratione supponerem, tanquam axioma, quod mobile aliquod agitatum super curva aliqua, in quolibet ejus puncto eam habiturum sit vim centrifugam, quam haberet si agitaretur aequali velocitate super circumferentia circuli curvam in eo puncto osculantis, Varignonius suppositum hoc, praeter omnem expectationem, mihi negavit, asseruitque vim centrifugam super circulo osculante duplam esse ejus, quam mobile habet super curva in puncto osculi; cujus rei falsitatem ego protinus refutabam (quod factu facile mihi erat) alia nova demonstratione, qua apagogice ostendi manifestam sequi contradictionem, si dicatur vires illas duas centrifugas, super curva et super circulo osculante, esse inaequales, per consequens unam non posse esse duplam alterius; ad hanc demonstrationem novam nihil aliud reposuit Varignonius, quam se multa dicenda videre, se vero velle ea reservare in reditum meum in Patriam. Quid vero habeat, ne vel divinando assequi possim: sunt enim demonstrationes meae ejus roboris, ut vel Euclidaeis vel Archimedaeis cedere non ausint. Id quidem effecerunt, quod Varignonius suam meditationem, quam jam ad praelum parabat, in scrinia recondiderit, forte omnino supprimendam, ubi fascinum ab oculis absterserit. Quando vacabit, ut jam dixi, communicabo Tecum binas illas demonstrationes, quarum prior praeferenda videtur Hugenianae aliisque, quod cum hae omnes per infinite parva procedant, quae etiam iis, alioquin infinitesimalibus satis assueverunt, tamen negotium facessunt,

ut Varignonio contigit, mea nihil nisi ordinarias quantitates contineat.

Schediasma Pensionarii de Witt circa reditus ad vitam vix putem reperire posse. Agnatus aliquis meus, qui nuper ex Batavis venit, se illud ibi reperire non potuisse mihi retulit. Inquiram tamen et ego, ubi ea transivero.

Ultrajectini, de futuro meo abitu certiores facti, me de novo in suam Academiam pellicere conantur, oblatis conditionibus non spernendis, neque prior a me lata repulsa in tantum eos absterruit, quin ad me Legatum mitterent ex ipsis Professoribus unum, qui sua suada, si fieri posset (est enim Eloquentiae Professor) impetrato meo assensu abiret Exorator, qui venit orator; sed nec dedi manus, nec rejeci omnino oblatum, omnia deliberationem cum Parentibus reservans, atque me statim post reditum in patriam responsum daturum promittens. Miror quid in me videant boni Viri, quod sibi adeo placeat, et vereor ubi aliquando me possederint, ut tum de me dici possit: minuit praesentia famam: sed sibi imputent, si expectationi, quam de me fovent, non satisfecero, utpote qui me non obtrusi illis.

Ad Acta*) nuper communicavi Methodum meam transformandi curvas in alias longitudine aequales, occasione mihi data per schediasma Dn. Craigii, quod in iisdem Actis reperi continens solutionem hujus Problematis, quam vero mere paralogisticam censeo, quippe quae supponit aliquid, quod ipsa quaestione difficilius est. Ut cuique interim suum tribuam, feci mentionem modi Tui Problema solvendi per coevolutionem curvarum, addito tempore, quo illum accepi; quem etiam breviter recenseo, ut si forte Tibi non vacaverit, Lector illum perficere possit. Quid Tibi visum fuerit de novo illo motu meo reptorio, qui multa non spernenda mihi suggessit circa proprietates curvarum, sane lubenter intellexerim. Vale et mihi favere perge etc.

Groningae d. 25 Julii 1705.

---

*) Act. Erudit. 1705 August.

CLXXXV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non raro quidem mihi aliquot centenas literas annuatim scribenti et accipienti contingit, ut aliquae pereant, idque hac vice eo facilius suspicabar, quod nuper aliquis ex famulis postae abjectus est, quia deprehensus est fasciculum literarum, quas reddere neglexerat, in flumen projecisse. Nunc tamen cum Tuis se res aliter habuit, nam dum alias evolvo schedas atque suis locis dispono, ecce Tuae apparent, apertae quidem, sed nondum lectae, quod forte interruptus de manibus posuissem recens acceptas, nec occasio aliqua statim memoriam earum refricuisset. Ibi ergo legi Schildium an Schelium, quem memoras, Duci Brunswicensi cuidam, an Julio, dedicasse opus suum; sed memini quod sciam ea de re apud nos quicquam compertum, ut adeo prodiisse unquam non putem.

Hodie mane literas Tuas accepi, cum in Aulam irem, quae in proxima urbi villa est: legi in itinere, reversus domum, quod alia negotia inchoare serum esset, expendi naturam vis centrifugae, seu conatus recedendi a centro circulationis. Usus autem sum (fig. 157) lineis rectis EA, AG, latera polygoni circularis infinitanguli constituentibus, et motu uniformi in tali latere ejusque continuatione AF; quin et usus sum motu uniformi per rectam FG, cujus velocitas est infinite parva, quam pono ab attractione impressam, quovis momento temporis elementum incipiente, et durare per totum hoc elementum, quo peraguntur motus simplices AF et AH et compositus ex iis AG. Ita, licet pro motu gravis jam continue crescente introducantur infiniti motus uniformes, idem tamen prodit in ipsis assignabilibus effectus, qui motus continue mutati suppositione, idemque conatus recedendi a centro; et revera reperio, si aequales sint, conatus qui imprimitur a gravitate, et conatus recedendi a centro, altitudinem, quae gravi dat velocitatem circulationis, esse radii circulationis dimidiam.

Licet autem in Dni. Varignonii meditatione multa sint pulchra et ingeniosa, veritatique optime consentientia, in eo tamen ivit in diversum, meo judicio, quod motum in lineola infinities infinite parva FG (in ipsius figura dicitur LP) sumit ut acceleratum, quod etiam Tu facis, et sane in potestate est, quoniam attractio centralis velut gravitas quaedam concipi potest; verum enimvero,

hoc posito, lineola FG vel LP, non repraesentat conatum centrifugum (vel contrarium ejus attractorium ad centrum, quo ipse destruitur) quia in motu accelerato velocitates non sunt ut altitudines. Conatus autem iste paracentricus ut velocitas quaedam consideratur. Mihi vero, motum per FG ut uniformem spectanti, eam lineolam pro conatu paracentrico assumere licet, breviqne ratiocinatione omnia constant, ita ut opus non sit ad arcus Parabolarum osculantium confugere: quamvis facile intelligam earum quoque ope ad eandem conclusionem debere perveniri. Interim gratiae Dno. Varignonio agendae sunt, quod rem hanc discutiendi occasionem dederit, quae non inutiles considerationes praebet. Et fieri potest, ut nonnulli alii inter ratiocinandum rem tetigerint, uno errore alterum corrigente. Haec igitur ipsi Dno. Varignonio prima occasione significabo: nolim enim Virum egregium in suspenso manere. Gratum aliquando erit accipere considerationes Tuas, et inter alia demonstrationem more Veterum adornatam.

Gregoriani Operis Astronomici pauca legi, quod appareat, quae bona habet fere ab aliis esse descripta. Ex quo vidi enim noluisse agnoscere errorem manifestum, quod ingenui erat (de quo non dubito, quin aliquid ad Moivraeum scribens tetigeris) valde apud me imminuta est ejus existimatio. Nescio an videris Libellum ejus opticum. Totus nititur meo principio in Actis indicato, quod circuli osculantes in praxi pro succedaneis assumi possint Parabolarum, Hyperbolarum et Ellypsium: id tamen dissimulat, aitque haec a se ante multos jam annos fuisse conscripta. Sed cum videatur proclivis ad paucula, quae forte invenit, protrudenda in publicum, credo hanc meditationem non spernendam, non (ut nos solemus) nonum in annum pressisset.

Mirum quod adduci possit, ut errorem retractaret circa lineam Cassinianam: forte fecit, quia adversarium habuit in Anglia imminentem, ita non ausus est repugnare, ne Cheynaei conterranei fato uteretur. Rectius credo animum adjiciet ad Graecos Mathematicos edendos.

Lineam, quae angulos circum unum focum habeat proportionales areis circa alterum focum, omnino possibilem puto, neque desperem ad eam pervenire, si res tanti esset.

Ad promovendas quadraturas ultra limites, quos hactenus habemus, ipseque reliquit Newtonus, aliis artibus opus putem.

Angli affectant puncta adhibere pro nostra litera d; quod etsi nullius momenti in communi usu discrimen sit, sunt tamen usus singulares, ubi puncta non sufficiunt, nempe cum differentiae gradus ipse generaliter sumitur et per literam exprimitur, ut gradus potentiae solet.

Avidus sum discere, an Sectio rationis Apolloniana aliquid commune habeat cum Logarithmis.

Jam dudum mihi dictum memini ab aliquo, regulam Guldini esse apud Pappum. Oportet ejus rei vestigium sit in jam editis. Jam venit in mentem Dn. Tschirnhausium mihi dixisse, hoc se didicisse a Dno. Regnier, qui erat insignis, pro suo tempore, Mathematicus Lugdunensis, etsi paralogismum commiserit, cum vellet mensurare superficiem sphaeroidis pro fornicibus arcuum, nostris scilicet artibus tunc parum exploratis. Etsi enim, et Hugenius et alii, veram dimensionem ejus superficiei invenissent, id tamen pauci intelligebant, et Bulialdus credere nolebat. Sed ego me video aliis alia innectere, Te vero otio non abundare. Itaque felix iter precatus finio.

Dabam Hanoverae 28 Julii 1705.

P. S. Motus reptorii noscendi curiosus sum. Non ingratum est, quod meam indicationem modi solvendi Problema Tuum publicasti. Etsi perfacili calculo exequi liceat, vix tamen in animum inducere possum ut faciam, quae alius facile suppleat, hac scilicet aetate.

CLXXXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postquam in Patriam redii cum tota familia mea exacto itinere periculi, curarum et taedii pleno (utpote quo durante duo ex liberis meis morbillis correpti graviter et non sine vitae discrimine decubuerunt) Tu inter primos es, cui scribendum esse censui. Jam forsan nosti, quid nobis et mihi inprimis mali acciderit per inexpectatum Fratris mei obitum, cujus tristem nuncium Amstelodami agens cum stupore accepi, et simul intellexi ipso quo ejus exequiae celebrabantur die me Groninga discessisse, illo Patriam coelestem, me terrestrem repetente. Mirabile fatum! sine

quo Trajectum me nunc teneret, ita enim cogitabam, ut nimirum visis Parentibus, cognatis et amicis post aliquot menses ad Batavos reverterer amplecterer que Professionem Trajecti, nam quae sub abitum meum ex Groningiana statione jam altera vice cum lautissimis conditionibus offerebatur, non obstante prima, quam Proceres a me tulerunt, repulsa. Injecit vero Patria mihi vincula et compedes, volunt ut succederem Fratri defuncto: sedem vacantem obtulit mihi Senatus Academicus more extraordinario et perquam honorifico, collegialiter ut vocant me convenit aedibus meis atque me precibus et promissis luculentissimis obstrinxit, quibus adde quod Magistratus, ut sua interposita Auctoritate me retinerent, compellavit, qui proin praeter salarium ordinarium aliquod augmentum mihi decreverunt. Hisce aliisque agendi modis, inprimis vero Parentum et amicorum solicitationibus aures tandem praebui, spretis eorum in gratiam tot tantisque Extraneorum oblationibus, quae non me tantum, sed et Uxorem mihi superstitem meosque liberos post fata mea fuissent beaturae, quippe quibus singulis promissa sunt facta non contemnenda. Etiam Leydensem rejeci vocationem, quam Cl. Volderus, cum Trajecti nuper essem, jussu Ill. Obdamii reliquorumque Academiae Leydensis Curatorum mihi obtulit, sibique ut succedere vellem impense rogavit; voluit enim (ut me in Batavis retineret) consensu Curatorum Professionem (quam per 35 annos cum laude summa obivit) deponere et in me transferre. Ecce me ergo tandem Professorem Math. Basiliensem. Ut novam hanc stationem eodem quo priorem successu eodemque applausu tueri possim, omnes meos Deo adjuvante nervos intendam. Nunc variis cogitationibus distractus multisque negotiis impeditissimus, rebus mathematicis animum advertere nequeo. Vale etc.

Basileae d. 10 Octob. 1705.

P. S. Commendavi ego Trajectinis et Leydensibus Hermannum nostrum. Si de illo consulereris a Voldero, meae quaeso commendationi suffragare: post meum enim abitum ex Batavis neminem novi, qui studia nostra in oris illis cum fructu excolat, et certe nisi Hermannus aliusve ea excitet, neglecta ibi jacebunt. Vidisti nunc sine dubio meum motum Reptorium; quid de eo censeas, libenter intelligam.

CLXXXVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Salvum Te cum Tuis advenisse ex animo gaudeo. Quod vero Dn. Fratrem vivum non invenisti, dolere me fateor. Sperabam enim a vestro colloquio et conspiratione plurimum fructus Reipublicae literariae et Vestrum utrique. Sed quoniam Deo aliter visum est, convenit Divinae voluntati nostram accommodare.

Velim quae reliquit conservari et in publicos usus transferri. Tibi gratulor Patria et amicis jam fruenti, et, quod auguror, diu fruituro. Nec dubito, hunc gratum rerum Tuarum habitum incitamento Tibi fore ad prosequendos laudatissimos labores.

Cl. Hermanno paratissima semper officia mea fuere. Itaque si consulor a Cl. Voldero, vel si qua alia se offert ratio ejus rebus commodandi, non deero. Responsum ab ipso ad meas expecto, quas ei scripseram de dolore, quem in Societate Berolinensi, ex denuntiata morte clarissimi Fratris Tui percepimus, deque exhibendo ejus nomine officio consolatorio apud Dominam Viduam, liberos et proximos, quod ad Te utique inprimis refertur. Id jussu Societatis repeto, quod excellentis Viri memoriam sibi semper commendatam habebit. Elogium ejus conscribi e re erit, quod Actis Eruditorum inseratur.

Quantum intelligo, vacant Groningana et Ultrajectina Professio Matheseos, et Leydensis semivacat, quando, quem memoras, animus Cl. Volderi erga Te fuit. Sed vereor, ne idem in alterius gratiam sit facturus.

Mirum est in Germania nostra vix quemquam vel paulum in nostra Analysi proficere. Juvenis ille Suevus, qui me Berolini salutavit, Tibi quoque non ignotus (Jenichio nomen erat, ni fallor) curam aliquam hujus scientiae habere videbatur, magnos progressus non fecerat. Nescio an multo majores progressus fecerit Dnus. Wolfius, qui Lipsiae dissertationem de nostro Calculo edidit. Hunc tamen crediderim longius progresssurum, quia prior, ni fallor, se praxi potissimum dabat.

Medicus Scotus doctus ad me attulit Cheynaei Librum pro veritate Religionis ex natura, et ejusdem responsionem ad Moivraeum. Neutrum expendere vacavit. Spero meliora pro Religione, quam de Analysi attulisse.

Nescio, unde judices, meam Methodum curvae datae exhibendi infinitas aequales perplexo admodum calculo indigere. Si ex eo, quod calculum non aggressus sum, colligis, adhibes non causam pro causa omissionis meae. Saepe enim etiam facillima declino, quia in hac multitudine eorum, quae adhuc agere vellem, necessaria praeferri debent. Constructionis Tuae per motum reptorium nullum adduxisti exemplum, nec minus quam ego in generalibus mansisti, quod me minus promtum ad rem attentius considerandam reddidit. De Dno. Craigio merito mones, non satisfecisse, etsi aliquid fecerit nimiumque aggressus sit.

Puto etiam meas priores Domino Hermanno redditas, in quibus ei demonstrationem misi, quod omnes series Arithmeticae non tantum, sed et potentiarum ab Arithmeticis, et conflatarum ex his quantitatum habeant columnas periodicas, si dyadice exprimantur.

Nuper legi in Actis Academiae Regiae Scientiarum, dubios adhuc esse de Tuo Phosphori Barometrici experimento, utrum quando lubet confici possit. Vellem nosse, an nondum scrupulum sibi exemerint. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 30 Octobris 1705.

CLXXXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Pro benevolentia Tua et voto pio, quo adventum meum in hanc urbem novamque stationem gratulari voluisti, nec non pro testificatione doloris ex praecoci fratris morte Tibi percepti, gratias ago maximas. Velit Deus in hujus jacturae compensationem Te quam diutissime salvum sospitemque conservare magno Reipublicae Literariae et inprimis Orbis mathematici commodo meoque singulari solatio. Nudius tertius defuncti fratris mei manibus justa persolvit noster Eloquentiae Professor publica Parentatione, quam Vidua imprimi curabit cum annexis Fautorum et Amicorum epicediis, quare si et Tibi volupe erit defuncti memoriam honorare versibus nonnullis, rogo eos mature transmittas; curabo ut obtineant locum eminenti Tuae dignitati convenientem. In parentatione audivi creberrimam et honorificam Tui mentionem. Inchoavi meam profes-

sionem XVII. hujus mensis a solenni Oratione *) in frequentissimo Auditorio; materiam dicendi ex adjuncto hoc programmate videbis. Facile cogitabis me ea occasione Tuorum meritorum non esse oblitum. Virorum enim egregiorum, per quos profeci, memoriam mihi gratam esse non utique hac prima vice publice testatus sum, sed extant, uti nosti, jam alia testimonia multo priora. Quod Societas Berolinensis dignata fuerit dolorem ex nuncio fraterni funeris perceptum testatum dare et officium suum consolatorium exhibere, omnibus defuncti consanguineis et proximis fuit pergratissimum et honorificum.

Cl. Volderus, uti mihi scribit, reapse jam se abdicavit munere suo professorio, retento tamen salario mille flor. Holland. omnibusque honoribus et emolumentis academicis sub Titulo Professoris emeriti. Si praevidisset me suam Provinciam non amplexurum, non putem eam tam cito depositurum fuisse, sed cum mentem suam festinanter nimis declaravit, postea honestatis causa eam retractare non potuit. Interim surrogatus ipsi est Dn. Bernhard, Gallus, qui scribit: Les nouvelles de la republique des lettres, non quidem ut Professor perpetuus, sed ut Lector Provisionarius, uti vocant, donec de Professore aptiori porro vocando constitutum esset. Sperant enim Lugdunenses etiamnum, oriturum forte illud tempus, quo de me feliciori cum successu cogitare queant, mutato hic rerum mearum statu. Ut enim verum fateor, prurit mihi animus adhuc in Belgium, quod Cl. Voldero non adeo obscure significavi; nihil autem impedit, quominus desiderio meo satisfaciam, quam quod viventibus nonnullis nondum omnino sim mei juris: ideo gaudeo januam in Batavis mihi apertam servari.

Juvenem illum Suevum Jenichium, de quo loqueris, non memini me videre. Dni. Wolfii Dissertationem de nostro Calculo videre optarem. Mirari non debes, quod judicaverim methodum Tuam curvae datae exhibendi infinitas aequales perplexo calculo indigere; nosti enim, quam longa plerumque expressione radii caustici, imo et radii osculi, quibus illi indigent, determinentur in curvis etiam simplicioribus. Sed quod primarium est, non video, quomodo calculus sit instituendus ad inveniendum situm, parame-

*) Sie handelte: De altioris Geometriae nova Analysi ejusque usu et necessitate ad studium physicum.

trum, aliudve simile curvae assumtitiae speculi vices agentis; praevideo enim hujusmodi inquisitiones insolitam aliquam et nondum satis perspectam calculandi rationem requirere. Quod vero dicis, etiam me motus mei reptorii nullum particulare exemplum adduxisse, verum utique est; sed videris non satis attendisse ad scopum meum: animus mihi erat constructionem tradere universalem, quae in praxi posset applicari ad omnes casus particulares sine ullo praevio calculo, quod utique effectui dedi per motum meum reptorium, quippe cujus beneficio curvam datam (modo descripta supponatur) nullo interveniente calculo in alias ejusdem longitudinis geometrice transformo; cujusmodi effectionem tetragonismi etiam Tu per motum tractorium exhibuisti. Quantum vero ad methodum Tuam transformandi curvas per coëvolutas, per eam problema solvere vel construere non potes, nisi primo curvam pro speculo adhibendam per calculum definias, et hoc est quod quomodo commode fiat, nondum perspicio, et cujus processum vel in unico exemplo a Te desiderarem. Mea interim constructio utut nullo indigeat calculo; si tamen problema analytice solvi deberet, nihil facilius est effectu, ratio enim ad aequationem perveniendi oppido patet ex ipsa motus reptorii natura.

Quod quidam Parisienses adhuc dubii sint circa phosphorum meum mercurialem, causa est ipsorum minus perfecta in experimentis instituendis dexteritas; obtuli illis me paraturum phosphorum elegantissimum ex ipso illo mercurio, in quo frustra laborarunt, si ejus copiam mihi facere vellent; sed hactenus non fuit transmittendi occasio. Res ergo huc rediit, ut eos experientia convincam, quod facere paratus sum quando libuerit. Vale etc.

Basileae d. 25 Novembr. 1705.

CLXXXIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nescio an Tibi perinde ac Dno. Hermanno, qui prior postulaverat, jam transmiserim Distichon, quo inclyti Geometrae Domini Fratris Tui memoriam utcunque celebravi; id ita habet:

Infinita Tibi terris lux fulsit in ipsis,
Bernoulli, et quisquam Te superesse neget?

Scio Philosophos inter alia ex infiniti cognitione pro animae immortalitate argumentari, et quidem non male. Spero accipere aliquando quae honori ejus edentur; commode enim in vernas Lipsiensium Nundinas transmitti poterunt.

Fortasse Orationem quoque Tuam interim edes de Laudibus Analyseos novae, quam eadem occasione sperabo.

Non satis noveram doctrinam Dni. Bernardi, Editoris Novellarum literariarum, Galli; atque ideo ignorabam tantum in Physicis praestitisse, ut Volderi vices subire posset.

Domini Wolfii Dissertatio de nostro calculo non procedit ultra elementa seu Algorithmum meum. Si Problema aliquod reducatur ad determinationem Causticarum, utique pro soluto haberi debet. Ita autem solutum a me est Tuum.

Ut vero videas non requiri aliquam, ut scribis, insolitam et nondum satis perspectam calculandi rationem, ecce Tibi exemplum, sed generale et cuivis curvae infinities per aequationem exhibendae suffecturum, ubi debitus speculi situs sine ullo calculo determinatur. Nempe adhibeo speculum Ellipticum et duo extrema arcus dati puncta colloco in foco Ellipseos et circa hos focos describo Ellipsin quamcunque seu filo quantocunque, et posito arcum datum radiare per tangentes in speculum Ellipticum, erit imago ejus catacaustica, reflexione radiorum incidentium formata, arcus quaesitus priori aequalis et semper dissimilis, prout major minorque eisdem focis manentibus assumitur Ellipsis. Sit (fig. 158.) arcus datus ABC; circa focos A, C describatur Ellipsis FLG, et A per tangentem arcus radians in F, habebit punctum corradiationis seu catacausticum respondens in altero foco C, et C per tangentem arcus radians in G habebit punctum catacausticum respondens in altero foco A ex natura Ellipseos. Cumque per naturam Catacausticarum sit filum AFCIA (seu birecta AFC + arc. CIA) aequale filo ABCGA (id est arcui ABC + birectae CGA) et AFC et CGA birectae sint aequales ex natura Ellipseos, erit arcus ABC aequalis arcui CIA. Vides ergo nihil plane insolitum hic requiri, cum tantum de duobus punctis extremis agatur, ut birecta ad primum punctum aequetur birectae ad ultimum punctum eumque ad scopum speculi situs accommodetur; quamquam id in aliis lineis non aeque facile ac in speculo Elliptico aut Hyperbolico praestari possit. Omnia autem specula, concava scilicet, huic scopo inserviunt, excepto plano et sphaerico. Dato speculo cujus-

cunque figurae, quaerenda est Ellipsis vel Hyperbola lineam speculi osculans in duobus punctis. Hoc habito, facile est arcui dato talis figurae speculum accommodare, ut praestetur quaesitum. Facile etiam vides per diacausticas, debita refractionis mensura assumta, praestari posse, ut curva sit in ratione data ad datam, atque ita id quoque infinities infinitis modis. Agnosces etiam (quod dudum obtinuisse videbas) judicium sequius de meis non adeo promptum esse debere. Quod superest, novum annum Tibi cum multis aliis faustum et felicem precor. Vale etc.

Dabam Guelfebyti 27 Decembr. 1705.

Beilage.

Das Folgende scheint Leibniz zur Bekanntmachung durch die Act. Erudit. bestimmt zu haben:

Ingeniosissimus Vir, Dn. Johannes Bernoullius, ante annos aliquot problema proposuit: Dato arcu curvilineo cuicunque infinitos alios inter se dissimiles exhibere aequales. Hoc cum ipse mihi significasset per literas, statim inveni solutionis Methodum ope imaginis catacausticae per speculum rite adhibitum, Tangentes arcus dati reflectens, formatae, quae imago Archetypo fit aequalis, eamque methodum ipsi in responsione paucis verbis indicavi. Cumque mihi evidens appareret et objectioni itidem per literas satisfecissem, de re amplius non cogitavi, quod mihi talibus ingenii exercitiis nunc incumbere parum vacaret aut conveniret. Sed cum fortasse mentem meam non satis percepisset, et ex omissa a me ob dictas rationes executione Methodi nescio quam in ea difficultatem suspicatus esset, scripsit nuper in Schediasmate Actorum mensi inserto, solutionem meam, etsi meliorem alia, quam refutat, tamen perplexo admodum calculo indigere videri addiditque in literis praevidere sese, opus fore calculi genere insolito nec satis perspecto. Ea res fecit, tum ut ab ipso vicissim impeterem methodi suae executionem (cum vereri liceat, ne motus reptorius quem proposuit dicto loco, arcum dato congruum adeoque non novum aut priori dissimilem reddat) tum etiam ut resumerem problema, nec difficulter exemplum methodi, sed per se universale excogitarem, in quo quaesita speculi apti determinatio nullo calculo indiget, resque de caetero ad simplicem catacausticae determinationem reducitur.

Sit cujuscunque lineae curvae arcus datus ABC, quaeruntur quot quis voluerit arcus ei aequales, sed dissimiles inter se, qualis KIH. Id per speculum concavum rite collocatum cujuscunque formae (excepto plano et circulari) praestari potest. Exemplum dabimus in Elliptico, cujus collocatio commodissime determinatur: Arcus dati extremis A, C, tanquam focis, et fili vel axis transversi longitudine quacunque DACE describatur Ellipsis DFEG; dico Arcus ABC per suas tangentes radiantis ad partes E imaginem catacausticam speculi Elliptici FEC reflexione formatam KIH, id est hoc loco CIA fore arcum quaesitum ipsi ABC aequalem.

Et primum quidem ob Ellipsin, punctum causticum K respondens ipsi A est alter focus C, et punctum causticum H respondens ipsi C est alter focus A; deinde ex natura Catacausticae manifestum est Filum AFCIA aequale esse filo ABCGA, seu esse $AFC + CIH = ABC + CGA$. Denique ex natura Ellipsis est birecta AFC aequalis birectae CGH; ergo fiet arcus CIH aequalis arcui ABC. Mutata autem circa eosdem focos Ellipsi, prodibit alius arcus CAH, priori aequalis, sed dissimilis, infinitis modis, quod desiderabatur. Idem quod Ellipsi praestitimus, ope Hyperbolae praestabimus, si birectae primae AFC et postremae CGA latera non summam, sed differentiam faciant eandem.

Ita vel solius Speculi Elliptici sive Hyberbolici ope habetur quaesitum; sed idem praestari tamen potest Speculo alio (si planum vel sphaericum excipias) quocunque, etsi aliquando per constructionem impeditiorem, cujus tamen commodissima in universum ratio hoc fundamento nititur, quod duae curvae in puncto, ubi se osculantur, eidem in hoc punctum radianti (sive puncto sive magnitudini) reddunt eandem corradiationem seu imaginem catacausticam, ut adeo punctum osculi praestet speculi vicem, quod simplex punctum contactus non potest. Hoc loco autem sufficit puncto in locum osculi radianti idem ab utraque curva punctum corradiationis reddi. Itaque proprosita figura speculi assumatur linea aliqua ejusdem figurae, quam Ellipsis aliqua vel Hyperbola osculetur in duobus punctis; ita arcui tangentibus suis radianti, qui similis sit dato, sed cujus punctorum extremorum distantia sit eadem, quae focorum Ellipseos vel Hyperbolae osculantis, dabitur imago catacaustica aequalis. Si deinde huic imagini fiat alius arcus similis in ea ratione, quae est distantiae extremorum arcus dato similis ad distantiam extremorum arcus dati, habebitur quaesitum. Semper autem arcus dati

ABC obvolutione, arcusque quaesiti KIH devolutione, quae simul fiunt, describetur arcus speculi FG. Et ut in extremo, ita ubique et in medio erit filum ABLIH aequale filo AFKIH vel ABCGH, sed quia non est generaliter filum BLI aequale filo AFC, ideo nec dici potest, quicquid nunc obvolutum est, nempe arcus AB et IH simul, aequale esse ei, quod prius obvolutum erat, nempe arcui ABC, seu arcum IH esse aequalem arcui BC. Itaque non partes arcus quaesiti partibus arcus dati aequantur, sed totus toti, quia filum devolutum primum et filum devolutum postremum sibi aequantur. Interim cuivis parti separatim satisfieri posset. Ex his apparet, ad effectum quaesitum utique talem collocationem speculi investigandam esse, ut haec aequalitas fili primi devoluti cum postremo devoluto habeatur, quod semper infinitis modis obtineri potest. Quemadmodum et in Elliptico vel Hyperbolico res aliter adhuc infinities obtineri posset, si a commoda illa punctorum arcus dati extremorum in Focos collocatione discederemus. Quae persequi operae pretium non est. Utile interim erit considerare hoc loco Analysin Anagogicam, ut appellare soleo, adhibitam fuisse reducto problemate ad alia faciliora aut jam existentia in potestate, quae Analysis plerumque commodior est Analysi Anabatica, rem ab ovo aut certe a remotioribus problematibus per saltum repetente.

CXC.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Oratio parentalis in memoriam fratris habita praelum jam evaserat, cum distichon Tuum ad nos veniret, et ita reliquis epicediis adjungi non potuit, quod dolemus; aeque tamen Tuum in defunctum affectum hinc agnoscimus grati. Mittetur, uti desideras, oratio haec in vernas Lipsiensium nundinas ad Te porro mittenda. Mea vero inauguralis oratio in laudem analyseos novae lucem non videbit; heic enim non, uti in academiis Batavorum, orationes publice habitae publicis etiam sumtibus imprimuntur, sed privatum editorem requirunt, qui sumtus eroget, ego autem productiones meas non usque adeo amo, ut eorum causa vel teruncium erogarem.

Bernhardus, Gallus, Editor Novellarum literariarum, suffectus est Cl. Voldero non ut Professor Ordinarius, sed tantum ut Praelector (ut vocant) Provisionarius. Interim ne nunc quidem mihi valde difficile foret obtinere cathedram mathematicam et philosophicam vel Lugduni Bat. vel Ultrajecti, si vel tribus verbis gratam mihi fore ostenderem, necdum enim post ter latam repulsam me solicitare desistunt, licet interim Vriesio defuncto Trajectini jam vocaverint aliquem Serrurierium, Volderi discipulum, qui mihi depraedicatur tanquam insignis Mathematicus et Philosophus, quo vero merito nescio. Ut verum fatear, nondum omnem cogitationem ad Batavos revertendi abjeci, adeo eorum vivendi ratio mihi placuit; aliquando fortassis consilium in arena capiam.

Dni. Wolfii Dissertationem de nostro Calculo, qualiscunque illa sit, videre optarem. Forte commodiorem ordinem ad docendum studiosos observat, quam qui habetur in libro Analyseos infinite parvorum, praeterquam quod hic liber gallice sit conscriptus, quam linguam non omnes, qui mea manuductione utuntur, intelligunt.

Nunc demum agnosco problema meum de transformandis curvis plene a Te solutum; non enim certe mihi in mentem venerat usus Ellipsium, quas ad hoc negotium commode adhibes, eas vero ab initio nec Tibi statim animadversas puto, alias jam tum temporis monuisses. Interim pace Tua dixerim, modum Tuum solvendi cum indigeat concursu radiorum reflexorum a radiis circulorum osculantium i. e. a differentialibus secundi ordinis dependente, uno gradu magis esse compositum, quam is est, quo ego utor per motum reptorium, qui nihil praeter tangentium descriptionem postulat, id est, differentiales primi ordinis. Praeterea non video, quomodo methodus Tua ad praxin facile applicari possit ad habendam constructionem geometricam, quemadmodum mea procedit per motum continuum et facile ad praxin applicabilem. Deinde non assentior Tibi dicenti: omnia specula concava huic scopo inservire excepto plano et sphaerico, nam non recte excipis sphaericum, quia potius in certis casibus ex ipso Tuo praescripto necessarium est; finge enim arcus dati et transformandi ABC (fig. 158.) subtensam AC evanescere, hoc est, arcum datum esse curvam in se redeuntem, vides utique tunc ellipsin FLG (coëuntibus scilicet focis A et C in unum punctum) degenerare in circulum, et catacausticam hinc formatam CIA fore etiam curvam in se re-

deuntem. Rectissime interim mones, rem in aliis lineis non aeque facile ac in speculo Elliptico aut Hyperbolico praestari posse; quando vero subjicis: dato speculo alterius cujuscunque figurae, quaerendam esse Ellipsin vel Hyperbolam lineam speculi osculantem in duobus punctis, ut scilicet per talis figurae speculum aeque ac per Ellipsin vel per Hyperbolam praestetur quaesitum, mihi videtur verba Tua restringenda esse, nam non sufficit Ellipsin vel Hyperbolam osculari lineam speculi in quibuscunque punctis duobus, sed oportet ut oscula illa duo fiant praecise in illis duobus punctis, in quibus occurrunt Ellipsi vel Hyperbolae rectae duae tangentes arcum datum in extremitatibus seu ex focis ductae. Quomodo autem Ellipsis vel Hyperbola talis sine longo calculo inveniri possit, ut scilicet osculetur lineam assumtam speculi in duobus illis punctis, nondum video: mallem itaque in Ellipsi et Hyperbola (quae problema jam plene solvunt) acquiescere, quam praeter necessitatem aliis lineis et operoso calculo intricari. Caeterum ut curva sit in ratione data ad datam, superfluum omnino est id praestare per diacausticas; inventa enim (vel Tua vel mea methodo) curva B aequali curvae datae A, fac per modum jam ubique cognitum curvam C ipsi B similem et quae ad eandem habeat rationem datam, habebit ergo etiam C ad A rationem datam. Unum est, quod monendum restat; possum scilicet demonstrare possibile esse, ut arcus datus radians A B C (fig. 158.) sit non tantum similis, sed prorsus idem cum inventa catacaustica C I A, et ita non esset satisfactum problemati, quod curvam curvae dissimilem postulat. Ut igitur methodum Tuam et ab omni parte perficias, incumberet Tibi ostendere modum, quo hi casus identitatis dignosci et evitari possent, ut quis securus esset se invenisse curvam et specie et numero a data diversam. Vale etc.

Basileae d. 30 Jan. 1706.

XCCI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Monebo ut Tibi mittatur Wolfiana Dissertatio.

Tecum sentio, Analysin infinitesimalem in Hospitaliano opere non satis methodice tradi.

Satis intelligo, cur consilium reditus ad Batavos nondum commode exequi possis.

Omnino de Ellypsi et Hyperbola cogitaveram dudum, et in antiquis Schedis notaveram. Statim enim Problema ut consideravi, solvi: sed plane ex animo demiseram, ut soleo, cum praestet mihi per alia distracto oblivisci istorum, quae magis necessariis cogitationibus obstarent, retento tantum principio inventionis; sed ita fit ut aegre ad talia absolvenda redeam, praesertim si vetus scheda non adsit statim, quo casu ego malo rem iterum quaerere, quam Schedam, si modo res non minus impedita sit. Interim, ut verum fatear, talia vix amplius agere vacat.

Itaque nec objectiones quasdam Tuas ad secundaria quaedam dicta mea satis discutio, praesertim cum videantur captare magis verba, quam monere quod in rem sit.

Etsi, inventa aequali, facile demus similem in data ratione, an ideo monere vetabimur per diacausticas, lineam, quae in data ratione sit, statim et immediate exhiberi.

Si opus esset quadraturis quadraturarum seu aequatione differentiali secundi gradus soluta, posset solutio proposita altioris aequo gradus ;censeri. Nunc radiorum concursus serviunt ad inventionem et demonstrationem, non ad constructionem; lineae enim sunt ordinariae. Quid vetat etiam modum innuere, etsi impeditiorem, aliis etiam speculis utendi? cum possit aliquis etiam desiderare hoc, scientiae causa.

Postremo nihil facilius est, cum infinitas in promptu habeam, eam evitare, quae datae lineae congruit.

Quod speculum sphaericum utile fore putas, contra quam dixeram, rogo ut adhuc semel consideres. Vereor enim ex eadem curva redeat. Nunc neque figuram ad manus, neque rem in animo habeo. Si sphaericam prodesse comperias, hoc monitum Tuum laudabo. Caetera non aeque, qualibus ego certe uti non soleo, quippe quae neque me neque aliis digna censeo, ne censorium supercilium praeter rem affectare videor.

Diu est, quod a Dno. Hermanno nostro nihil vidi, ut adeo ignorem, an adhuc Venetias cogitet, an consilium illuc eundi plane deposuerit? Me sane haec nosse aequum est. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 11 Februarii 1706.

P. S. Indica quaeso interdum, quid in Mathematicis Physicisque geratur: ego enim haec serius disco, praesertim ex Gallia et Italia, quae vobis vicinae sunt regiones.

CXCII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Dedi Affini meo ad Nundinas Francofurtenses hodie proficiscenti, fasciculum Parentationum Lipsiam mittendum ad Cl. Menkenium, in quo continentur duo exemplaria Tibi inscripta, adeo ut non dubitem, quin recte ad Te perveniant. Gratum mihi feceris, si ut promittis, Wolfianam Dissertationem mihi mitti curaveris. Video non sine aliquo dolore, Te quaedam monita mea circa solutionem Tuam pro transformatione Curvarum non eo animo accepisse, quo ego ea scripsi: nescio sane quid fecerim, quod acriorem eum, quo uteris, stylum extorserit: olim non erat sic; ferebas objectiones meas, non benigne tantum, sed et quandoque gratias agebas, ubi Te praecipitantiae alicujus monitum videris. Nunc vero me censorii supercilii redarguis et dicere sustines, Te talibus quae amice obmovi, ne quidem in Adversarios uti solere; si quaedam Tua publice sugillassem, non certe potuisses acerbius exprobrare.

Nesciverim cui rei attribuam impatientiae Tuae causam, nisi quod forte putaveris, scrupulos meos ex mero contradicendi studio fuisse profectos, quod tamen a me fuit semper alienissimum. Ita quemadmodum nolebam vetare monitum Tuum de linea in data ratione per diacausticas immediate exhibenda, nec Te pariter vetiturum spero moneri, quod idem praestari possit facilius per catacausticas ordinarias, inventam scilicet aequalem in similem aliam in data ratione mutando. Porro vetare nolo innuere modum impeditiorem aliis etiam speculis utendi; hoc utique saltem Scientiam auget, quod minime vituperandum est. Sed an ideo vetamur innuere, quod pro praxi praestet, adhibere specula Elliptica vel Hyperbolica, quam alia, et quod illa, cum problema universaliter solvant, pro ipsa constructione jam sufficiant. Sed haec transierint; nollem enim vel hilum tangere, quod Tibi ingratus esset,

quamvis praeter omnem meam opinionem, utpote qui semper in omnibus Tibi placere studui. Ob hanc rationem nunc nihil dicam de iis, quae nuper observavi in Schediasmate Tuo, Actis Erud. Januarii inserto, ubi agis de motu radente etc. quae Te edidisse dicis occasione invitante; fuit illa haud dubie suppeditata ex iis, quae de motu reptorio scripsi; hoc unicum innuere volo, aut me non recte capere mentem Tuam, aut approbari non posse quod dicis, per motum radentem moveri motu parallelo rectam aliquam in plano curvae radentis assumtam. Caeterum cum monitum meum de Speculo Sphaerico unice laudes, meque ideo exhorteris, ut adhuc semel considerem, Te enim vereri ne eadem curva redeat, ea de re nunc certum Te reddere possum. Quare mittas quaeso metum supervacaneum; si vel tantillum attendere velles, videres statim speculum sphaericum non minus utile posse esse, quam omne aliud ellipticum. Fateor casum posse occurrere, quo per speculum sphaericum eadem curva redeat; sed idem etiam contingere posse per speculum ellipticum, jam in praecedentibus monui; ad quod respondisti, eum casum posse evitari mutata tantum ellipsi; idem nunc dico, fieri posse mutata tantum sphaera, id est, majori minorive Sphaera adhibita: curvas autem per specula sphaerica ordinarie diversas esse a datis, vel hinc patet, quod aliquando curva in se rediens pro catacaustica sua habere possit curvam asymtoticam, id est, in infinitum abeuntem, quod idem etiam in speculis ellipticis, imo in quavis Curva contingere posse facile perspicio.

Sit enim (fig. 159.) speculum sphaericum AGD: Curva aliqua CNB radians secundum tangentes NG; ejus catacaustica LK, quae nimirum formatur per intersectiones radiorum reflexorum GK: pro hujus formatione dico sumendam esse $GK = \frac{NG \times GF}{4NG - GF}$. Et generaliter, si speculum sit concavum qualecunque VGX, et quaeratur longitudo radii reflexi, describendus est circulus osculator in G, qui secet radium incidentem NG (si opus est) prolongatum in F, et erit semper $GK = \frac{NG \times GF}{4NG - GF}$, quod novum est theorema hactenus nondum cognitum: unde apparet, qualecunque sit speculum sive sphaericum sive aliud, et qualiscunque Curva data CNB etiamsi in se rediens, modo eo propinquitatis accedat ad speculum, ut NG tandem aequetur $\frac{1}{4}$ FG, fore tunc GK infi-

nitam: id est catacausticam LKP habituram asymtotum SR, et postea evadente NG minore quam $\frac{1}{4}$FG, mutari catacausticam LKP in oppositam OT. Hinc vides, quod pace Tua dixerim, solutionem Tuam pro transformandis curvis hac nova conditione et cautela restringi, ut scilicet Sphaera vel Ellipsis, ex qua fit speculum, sufficientis sumatur magnitudinis, ut NG ubique major sit quam $\frac{1}{4}$GF. Ita enim curvam datam finitam CNB in aliam finitam aequalem LKP transformatam habebis, et quidem si illa fuerit in se rediens, etiam haec in se redibit. Secus enim, si Speculum ejus esset magnitudinis, ut alicubi NG non esset majus quam $\frac{1}{4}$GF, proveniret Curva nova constans duabus partibus infinitis, una affirmativa LKP, altera negativa OT, quae utique valde incongrue dici posset aequalis ipsi propositae CNB. Huic ergo inconvenienti medeberis, si speculum ex majori sphaera vel sphaeroide paraveris, quod monuisse, ut spero, saltem non displicebit; eoque minus quod, Te hortante, rem de novo consideraverim, atque adeo, Te velut auctore, hanc fecerim annotationem.

Ab Hermanno acceperis literas; se enim nuper Tibi scripsisse mihi asseruit. Vereor ne ejus spes et consilium Venetias eundi simul in spongiam incubuerint. Ex quo redii in Patriam, nihil mihi innotuit, quid in Mathematicis Physicisque sit praestitum. In Batavis cum degerem, citius et frequentius ad me pervenerunt Nova Literaria ex Gallia et Italia, quam nunc in iisdem multo vicinioribus. In Physicis Experimentalibus quaedam ipse promitterem, sed instrumentis hic careo, neque ea ex sumptibus publicis (ut Groningae obtinui) hic aeque facile comparare spero; tentabo tamen. Ex Gallia habeo quod Saurinus finaliter (ut loquuntur) responderit Rollio provocans ad decisionem Academiae; legi ejus Responsionem quae satis placuit. In Memorabilibus Academiae reperi La Hirii Specimen pro determinatione curvaturae radii medium continue difforme transeuntis, quam tandem concludit esse Cycloidem, sed omnia ejus ratiocinia sunt meri paralogismi et palpabiles, adeo ut mirer Academiam pati ejusmodi absurditates et ineptias sua auctoritate in lucem protrudi. Vale etc.

Basileae d. 13 Martii 1706.

CLCXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quam Te aestimaverim semper, atque omni etiam benevolentia complexus sim, puto Tibi multis argumentis a tot annis fuisse perspectum. Itaque cum nuper in objectionibus quibusdam Tuis aliqua minus nobis convenire putassem, idque verbis, ut par est, temperatis admonuissem, spero Te, pro prudentia Tua exploratoque animo, sedata jam mente facile agniturum, nihil a me actum, quod non admitteret, imo quod non postularet officium amici. Verissimum enim arbitror, ne in adversarios quidem utendum hoc genere animadversionum. Vides etiam me unum monitum Tuum, quo revera docebas aliquid, ex merito laudasse, nihilque adeo affectui dedisse. Itaque spero Te animo ejecturum omnem opinionem acerbitatis candoremque meum potius benevolentiae imputaturum, cum aetas ususque eorum, quae ad judicium congrui pertinent, aliquam mihi monendi fiduciam in hoc genere dare potuisse videantur.

Limitatio Tua, quam solutioni meae adhibes, mihi non minus grata est, quam si a me profecta esset atque observata. Ego enim animum ab his abstrahere cogor meditationibus, fereque in generalibus consisto, contentus viam reperire, qua rem in potestate habeam. Utile videtur esse Theorema Tuum ex Circulo osculatore, idque continet comprobationem quandam suimet. Nam si producas G K (fig. 159.), dum circulo eidem occurrat in H, cum utique linea corradians per tangentes et corradiata sint sibi mutuo catacausticae, erit $\left\{ \begin{array}{l} \text{ut } G, N, F, \\ \text{ita } G, K, H, \end{array} \right.$ adeoque uti est $KG = NG . GF : , 4 NG - GF$, ita erit $NG = KG . GH : , 4 KG - GH$. Sed ob circulum semper $GF = GH$, itaque si pro GH ponas GF, ambae aequationes concidont.

Quod transitum Ellipseos in Circulum attinet, bene habet quod res succedit, nec redire oportet eandem curvam. Itaque saltem hoc modo ope Circuli cuivis lineae in se redeunti aliam lineam aequalem commode exhibere possumus, focis (fig. 160.) B et N coëuntibus in C. Totum negotium de motu repente aut radente, Tuo attento examini committo.

Dn. Varignonium periculose decubuisse mihi Parisiis scribitur nunc paulatim convalescere. Litem vero inter Saurinum et Rollium decisam ajunt utcunque, sed ita, quantum ex iis, quae Bernardus Menstruis suis literariis inseruit, apparet, ut circa summam rei nihil actum videatur. Bernardus enim haec tanquam Parisiis scripta refert: Monsieur Saurin a été renvoyé à son bon coeur, et Monsieur Rolle admonesté de dire les choses avec ménagement. Quae fateor me non satis intelligere. Abbatem Gallosium pro Rollio omnia conatu egisse ajunt, et Saurinum, quod pendente lite nescio quid imprimi curasset, indignationem Bignonii et periculum pensionis incurrisse. Ipsum Gallosium et La Hirium, indulgente Saurino, inter judices sedisse ajunt, vel, si mavis, judicii assessores, quorum consilium Bignonius pronuntiaret Sed hi duo manifeste pro adversario stabant. Itaque Bignonium arbitror rem utcunque sopire maluisse.

Mira sunt, quae de la Hirio narras, Cycloidalem Curvaturam radii in medio difformi, paralogismis in speciem demonstrationum adornatis, in ipsis Academiae Commentariis confirmare voluisse: credo, ut calculo differentiali carere posse crederetur. Fortasse, ut apud Gregorium, duo paralogismi se mutuo destruentes in veritatem desinunt. Tomus ille nondum ad me pervenit. Admoneri talium Bignonium Abbatem, e re profecto Academiae et Reipublicae esset.

Dn. Hermanni negotium Patavinum putabam non male procedere. Nam scripsit ad me Dn. Guglielminus V. Cl. se sententiam rogatum, Viro merito favere; ipse Dn. Hermannus visus est in nuperis de successu non male sentire.

Bernardus in Batavis suis Menstruis nuper habuit aliqua, quibus pro merito memoria Dni. Fratris Tui laudatur; quaedem tamen insperguntur, quae Tibi profecto non probabuntur. Nempe: que quelques faibles lumières m'estant echappées de mon invention du calcul des differences, vous et Monsieur votre frère aviés pris la résolution de m'en enlever l'invention, et que vous y aviés enfin reussi. Sed neque propositum vestrum, quod sciam, fuit (quod utique justum non fuisset) mihi adimere vobisque tribuere laudem Calculi hujus inventi, cujus Elementa atque etiam specimina nonnulla jam in Actis erant proposita. Illud verissimum est, vos, vestro marte (sed te ante fratrem), applicationem ad difficilius Problema, nempe Catenarium, me tamen praemonente de successu,

reperisse, et inde aditu aperto ad laudem famamque inventi non minus contulisse quam me ipsum, me certe applaudente atque gaudente. Quis talia Bernardo suppeditarit, satis exputare non possum.

Ajunt Dn. Marchionem Hospitalium in posthumo Opere de Sectionibus Conicis et constructionibus per loca, omnia, in quae hoc genere hactenus publicata sunt, obumbrare. Quaestio tamen an materiam perfecerit. Sane si loca plana et Solida Veterum spectes a Pappo enumerata, velles perspicere principium, quo Veteribus ita venere in mentem. Nam Fermatius et alii et novissime Vivianus, qui loca illa Veterum explicuerunt et demonstrarunt, veritatem quidem comprobarunt, sed principium inventionis non dedere. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 15 Aprilis 1706.

CXCIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Gaudeo limitationem meam, quam solutioni Tuae adhibui, Tibi non improbavi. Theorema quod ea occasione inveni pro determinanda linea corradiata ex corradiante et circulo osculatore, facile demonstrari potest non uno tantum modo etiam citra calculum. Hinc porro inveni, si circulus ipse transformandus esset in aliam curvam algebraicam longitudine aequalem Tua methodo, quantae longitudinis oporteret esse radium circuli assumti pro speculo, ne scilicet curva nova abeat in infinitum, sed in se redeat; reperio enim, posito a radio circuli dati et x radio circuli specularis, sumendum esse x majorem quam $4a\sqrt{\frac{1}{3}}$, hoc est, omne speculum sphaericum habens radium ad radium circuli dati in majore ratione quam 4 ad $\sqrt{3}$, seu quam duo latera trianguli aequilateri ad ejusdem altitudinem reddere curvam catacausticam in se redeuntem, omne vero sphaericum speculum minus catacausticum dare asymtoticam; imo etiam, ubi radiorum ratio esset exacte ut 4 ad $\sqrt{3}$, foret nova curva ad asymtoton, sed hoc esset discriminis, quod partes haberet duas, unam affirmativam, alteram negativam, non oppositas instar hyperbolarum, quem admodum reli-

quae habent, existente scilicet ratione minore quam 4 ad $\sqrt{3}$, sed juxta se positas ad communem asymptoton.

Motum Tuum radentem quod attinet, Dn. Hermannus explicationem a Te datam eodem, quo ego, modo intellexit, sed neuter nostrum concipere potuit, quomodo dici possit lineam aliquam rectam determinatam in plano curvae radentis manere hoc motu sibi semper parallelam, cum tamen nobis manifeste appareat, situm illius rectae adeo non parallelum manere inter movendum, ut tandem plane pervenire possit ad situm priori oppositum, uti illud accidit semper, quando curva immobilis, quae raditur, est circularis vel elliptica vel quaevis alia, quae habet duas tangentes parallelas. Expectamus itaque ulteriorem explicationem, quoniam forte mentem Tuam non recte assecuti sumus.

Dn. Varignonius Lutetia profectus est ad usum aquarum Borbonnensium, rediturus ut scribit intra bimestre. Miror Saurinum voluisse in judicium admittere Gallosium et La Hirium, Viros ob imperitiam nostri calculi eidem infensissimos adeoque partium studio nimis addictos. Hinc vero non miror litem tam ridiculo quo refers modo decisam esse. Quae Saurinus pendente lite imprimi curavit, fuerunt testimonia nostra, Tuum nempe, Dni. Hermanni et meum; melius fecisset, si ante contestationem litis ea promulgasset, sed ea, credo, nondum habebat suppeditata. La Hirius in determinatione curvaturae radii in medio difformi nullo modo veram attigit curvam; ea enim non est cyclois, ut quidem credere videris. Nosti utique me ostendisse cycloidem tunc fore, si medium variaret in raritatibus secundum legem accelerationis gravium, ut nimirum ex illa ficta suppositione determinarem curvam celerrimi descensus, quam eandem cum illa oportere esse demonstrabam; ut vero cum reales medii raritates, hoc est, aëris quem radius penetrat consistentiae varient in longe alia ratione, nempe secundum applicatas logarithmicae, ut facile patet, erit etiam curvatura radii diversa prorsus a cycloidali; habet enim illa, ut inveni, asymtoton axi parallelam, cujus applicatae aequantur arcubus circularibus, quorum complementa habent pro sinubus applicatas logarithmicae super eodem axe constitutae, quod ubi monueram Dn. Hermannum et fratris mei secundi Filium *), juvenem quidem nondum octodecim annorum, sed tamen in hisce profundioribus jam

*) Es ist dies Nicolaus Bernoulli.

non mediocriter versatum, uterque, nulla quamvis communicatione facta, problema solvit et in eandem omnes incidimus solutionem. Quam etiam Dn. Hermannus me suadente ad Acta Lipsiensia misit, ut absurditas Ihreanae solutionis pateat, quam certe ubi lecturus es, vereor ne nauseam moveat, adeo quavis fere periodo peccat et in materia et in forma. Sed miror Te eam nondum vidisse, extat enim in Academiae Commentariorum Tomo 4to seu anni 1702, quem ad Te pervenisse jam non dubito.

Quousque negotium Patavinum Dno. Hermanno successerit, ex ipsiusmet literis percipies. Nunc in eo est, ut quotidie expectet vocatorias literas ab Academiae Curatoribus, a quibus se designatum Professorem jam ante aliquot menses intellexit.

Non sine stupore et indignatione accepi, quae dicis Bernhardum Batavis suis Menstruis inseruisse. Quisquis ille sit, qui ea Bernhardo suggesserit, nec Tibi nec mihi valde eum favere oportet. Maxime vero miror Bernhardum suggesta quaevis tam temere statim vulgare, quae potius supprimenda essent. Qui amabo! unquam sustinuissem adimere Tibi laudem inventi calculi differentialis, qui contra quavis occasione publice professus fuerim et posthac profitebor, Tibi maximam ejus rei gloriam deberi, atque adversus invidos obtrectatores Tuas partes semper pro viribus fuerim tuitus. Ex innumeris habeas exemplum, quod exstat in Actis anni 1701 pag. 139 circa finem, ubi sic loquor: „Quod in laudem incomparabilis differentialis calculi ejusque Illustrissimi Auctoris dictum esto, ut ipsi sua constet excellentia et vindicetur ab iniqua censura etc." Item in Dissertatione mea de Motu musculorum hic impressa a. 1694 exertis verbis pronuncio Tibi prima ejusdem calculi elementa deberi. Optarim itaque haec et alia Bernhardo commonstrari, ut quae tam imprudenter contra veritatem protrusit, incunctanter nunc revocet.

Observavimus nupero 12mo hujus mensis Eclipsin solarem coelo undique favente et sereno; erat illa totalis contra Ephemeridum Pariensiensium calculatorem Lieutaudium, qui eam posuit undecim tantum digitorum et octo minutorum. Non enim putem tantam esse differentiam locorum, ut propter parallaxim inducatur differentia unius fere digiti. In maxima solis obscuratione, quae accidit paulo ante decimam, multae visae sunt stellae, Venus et Oculos Tauri soli adstabant ad sinistram versus orientem. Insolitum hoc phaenomenum et orta hinc magna obscuritas, qualis per

aetatem hominum nunquam observata fuit, totam nostram urbem inprimis plebeculam terrore implevit. Vale et fave etc.

Basileae d. 22 Maji 1706.

P. S. Nostine aliquem Josephum Verzala Bononiensem? ab eo nuper literas accepi, ubi a me petit variorum nostrorum explicationem. De caetero videtur differentialem calculum et quasdam nostras methodos satis sibi familiares reddidisse.

CXCV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Multa incidere, quibus valde distractus sum. Res Anglicae inprimis, cum et expectaretur Legatio nova extraordinaria et postea praesens me quoque non perfunctorie occuparet. Supervenit et Rex Borussorum, cujus Filio desponsa est Filia Electoris, isque intra paucas septimanas cum Filio huc redibit ad nuptiarum apparatum. Sed ordinarii quoque labores mei et cogitationes (de multis antiquis collectaneis meditationibusque conservandis, ne quid de literis amicorum et conversatione Aulaque dicam, ita saepe dividunt, ut non semper mihi aliisque satisfacere possim.

Pergrata sunt, quae de cautionibus solutionis meae mones, peteremque ut ipsam aliquando Analysin communicares, nisi molestus esse vererer.

Vereor ne jure quaedam in mea motus radentis explicatione desideres; cum enim nuper tandem nonnihil animum adverterem, statim deprehendere mihi videbar, curva aliam curvam mere radente omnino mutari parallelismum rectarum, et nisi fallor, punctum (fig. 161.) quodvis determinatum rectae AB ad ambas curvas BB et CDB normalis, in mobilis curvae CBD plano ductae et cum eo procedentis, describere lineam AA, basi BB aequidistantem. De linea autem (fig. 162.) LL, quae a puncto certo L plani mobilis LMN describitur cum curva LNM in hoc plano posita, super basi immota BB ita incedit, ut recta quaevis ejus plani, ut LM, sibi maneat parallela, quem motum, ni fallor, repentem vocas; visus mihi sum reperire hanc lineam $_1L_2L$ ita descriptam aequari aggregato ex $_1B_2B$, arcu percurso basis, et N_1B, arcu percurso cur-

vae mobilis, ita omnes a diversis punctis descriptae, velut ab L vel ab M vel ab N aequabuntur. Haec meditanti breviter occurrerunt, dum ad distinctas delineationes venire non vacat, itaque malo Tuo examini rem submittere, quam diutius responsionem differre; neque omittam aliquando rem retractare in Actis.

Saurinum in Gallosii et la Hirii arbitrium consensisse arbitror, quod Abbatis Bignonii voluntatem intellexisset. Hic enim Judex sibi caeteros, velut consiliarios, adhibuit. Si vera sunt quae referuntur, Judicium magis morale quam mathematicum fuit. Putaveram La Hirium id, quod a Te circa Cycloidem per curvaturas radii prodeuntem inventum erat, demonstrare voluisse. Ita fortasse ipsi res melius successisset: aliena enim inventa non semel suis demonstrationibus dedit, quamvis nesciam an semper rectis. Sed cum aliquid per se assequi voluit super analyseos propriae captum, non miror si longissime a janua aberrarit: speroque Dn. Hermannum non tantum veram solutionem ad Acta misisse, sed etiam de falsa admonuisse, ut La Hirius errorem suum agnoscat.

Quoniam Lieutaudius, Parisini Calendarii annuus Calculator, rem non bene assecutus est, fortasse nec Tabulae Hirianae adeo exactae sunt quam creduntur; eas enim secutum puto. Nullas vult admittere hypotheses Hirius et ex solis observationibus construi Tabulas, sed ego putarem simul cogitandum de hypothesibus perficiendis, ope observationum. Puto eum in Tabulis condendis tantum continuasse, quae a multis annis in Parisino observatorio notata sunt: sed haec methodus, etsi utilis, nonnisi in paucos annos prodesse potest.

Flamstedius, homo paulo morosior, Newtono observationes suas negaverat, tunc cum is de perficienda Lunae Theoria cogitaret: si novissem, suppeditassem Kirchianas etiam diligenter factas et a multis annis. Nunc Flamstedius, sumtibus Amiralii Angliae, suas triginta annorum observationes edet. Sed Newtonus negat sibi animum esse redeundi ad hos labores. Cum eclipsis in summo esset, Venus etiam in his oris passim visa est, tametsi Eclipsis totalis non esset. Certe Berolini conspectam ad me relatum est.

Facile judicabam Tibi non probari, quae Bernardus, nescio unde accepta, Diario suo de Calculo nostro inseruit, itaque hominem admonebo ut corrigat. Non constat mihi de Josepho Verzalia Bononiensi, ejusdem Analyseos non experto. Alius quidem ex

Italia Monachus Benedictinus *) (si bene memini) Guido Grandius nomine, aliquando ad me scripsit de eo argumento, et Libellum a se editum **) misit, ubi quaedam nostra assecutus non male videbatur; nihil tamen dederat quod non ex illis prompte flueret. Si qua ex Gallia intelligis ad rem literariam spectantia, communica quaeso. Moivraei ad me literas attulit aliquis, qui cum Legato nuper huc venit. Nuntiat Hallaeum edere Libellum Apollonii ex Arabico versum de Sectione rationis, simulque partem jam publicam mittit. A Dno. Hermanno diu est quod nihil accepi; spero omnia jam confecta. Gaudeo esse Tibi, ex alio licet Fratre, Nepotem, quem Fraternarum laudum heredem sperare fas sit. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 15 Julii 1706.

CXCVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas acceperis, quibus quaedam notavi de lineis, motu quem repentem vocas descriptis, de quibus judicium Tuum expecto.

Nunc mitto Tibi quae Dno. Bernardo, Novellarum Literariarum Autori, destino, ubi prius a Te approbata fuerint ***). Si quid est, quod monere velis, facies ut mature intelligam. Non optima fide contexta fuit narratio, quam Bernardus Collectionibus suis inseruit, nec mihi tantum, sed et Tibi parum aequa videtur, cum non attingatur, quod verissimum est, Te ante Dn. Fratrem in difficilis Problematis Catenarii interiora penetrasse, eumque hac in re non parum Tibi debuisse. Id ego non plane dissimulandum putavi, ut cuique suum tribuatur. Interea me ad priores refero. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 20 Augusti 1706.

---

*) Guido Grandi war Camaldulenser-Mönch.

**) Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam etc. Auctore D. Guidone Grandi. Florent. 1701. 4.

***) Siehe Nouvel. de la Repub. des lettres 1706. pag. 121.

CXCVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nuper redux ex thermis responsionem jam paro ad postremas Tuas 15 Julii datas. Gaudeo Te tandem animadvertere parorama Tuum circa motum radentem; videtur ortum habere ex eo, quod motum illum cum motu meo repente quodammodo confuderis. Verissima nunc sunt, quae de hoc altero motu asseris, sed ipsissima etiam, quae jam in Actis Augusti anni superioris a me fuse sunt explicata, quaeque fundamentum faciunt solutionum mearum problematis de curvarum transformatione, cujus rei vero memoriam Tibi elapsam esse facile suspicor.

Analysin, quam desideras, pro determinandis cautionibus solutionis Tuae ejusdem problematis communicare non detrecto. Primo qui invenerim theorema illud, quod Tibi non displicuit pro longitudine radii reflexi, ita habe: Esto (fig. 163.) curva quaecunque VGX, radius incidens NG, reflexus GK, puncta corradiantia N et K. Jam concipe in puncto G circulum osculatorem GFH, radios illos si opus productos secantem in F et H. Concipe etiam duos alios radios quam proximos, incidentem Ng et reflexum gK, occurrentes circulo in f et h. His ita positis, habebis arcus aequales GF, GH, ut et gf, gh, adeoque arc. GF — arc. gf, hoc est $Gg - Ff =$ arc. GH — arc. gh, hoc est $Hh - Gg$; unde sequitur $Hh + Ff = 2Gg$. Porro ob similitudinem triangulorum NgG, NFf, ut et KGg, KhH, habes $GN . Nf\ (NF) :: Gg . Ff = \frac{Gg \times NF}{GN}$ deinde etiam $GK . Kh\ (KH) :: Gg . Hh = \frac{Gg \times Kh}{GK}$; quoniam itaque summa Elementorum $Hh + Ff =$ Elemento Gg bis sumto, erit, substitutis valoribus inventis, $\frac{Gg \times KH}{GN} + \frac{Gg \times NF}{GN} = 2Gg$: unde, elemento Gg utrobique per divisionem destructo, emergit aequatio in terminis finitis seu ordinariis $KH \times GN + NF \times GK = 2GN \times GK$, quae, quia $KH = GF - GK$, et $NF = GF - GN$ mutatur in hanc $GF \times GN = 4GN \times GK - GF \times GK$; adeoque $GK = \frac{GN \times GF}{4GN - GF}$, quod ipsum est Theorema, quod Tibi perscripseram, ob simplicitatem expressionis non parum utile futurum in Catopticis ad Catacausticas sine magno labore inveniendas, cum

alias formula ordinaria exprimens radium reflexum, ope radii circuli osculatoris, multo magis sit composita, quippe in cujus terminis reperias solida et plana, si non ulteriores dimensiones, quando nostra continet dumtaxat planum et lineas. Alii praeterea mihi sunt modi non minus elegantes, ad praedictam nostram formulam perveniendi, quorum unus petitur ex hac jam nota proprietate, quod summa angulorum binis radiis incidentibus proximis binisque item reflexis contentorum aequatur suo respective angulo ad centrum circuli osculatoris bis sumto, scilicet $N + K = 2D$, hoc est, quod tres anguli N, D, K sunt arithmetice continue proportionales. Ex quo vel in transitu concludere potes, radium reflexum GK pro diversitate horum angulorum tribus modis variare posse: angulus enim N aut minor est 2 ang. D, quo casu GK erit finita et affirmans, id est, versus concavam speculi partem sumenda; aut N aequalis est 2D, et tunc GK abit in infinitum; aut N major est quam 2D, id quod reddit GK finitam, sed negativam, hoc est, sumendam versus convexam Speculi partem. Ex hisce tribus casibus primus tantum est, quem admittit Solutio Tua, quam reliqui duo inutilem et irritam reddunt, ob rationem quam ex praecedentibus meis literis nosti.

Ut vero hanc cautionem quo pacto distincte determinaverim, nunc porro, quoniam petis, edoceam, consideres velim meam formulam $GK = \frac{GN \times GF}{4GN - GF}$, patebit utique oportere 4GN majorem esse quam GF, si velimus ut GK fiat affirmans et finita; alioquin certe aut negans aut infinita evaderet: unde jam constat Speculum Sphaericum ut pro transformatione curvae alicujus in se redeuntis utiliter adhiberi queat, tantae magnitudinis esse debere, ut ex quocunque curvae datae puncto N ducatur tangens, utrinque terminata in G et F pars ejus NG, quae pro radio incidente sumitur, semper major sit quam $\frac{1}{4}$ GF: secus enim curvam datam in se redeuntem in aliam, quae duas habebit partes in infinitum protensas mutaret, quod absonum esset. Ex his sequitur, Speculum Sphaericum tantae magnitudinis esse debere respectu Curvae transformandae, ut minima ex omnibus rationibus, quam habere possunt GN ad GF, tamen adhuc major sit quam subquadrupla: cui conditioni ut satisfiat, considero primo radium circuli Specularis tanquam datum, et postea quaero generalem expressionem pro $\frac{GN}{FG}$,

quae more solito differentiata et nihilo adaequata, dabit casum pro $\frac{GN}{GF}$ minima: hanc deinde porro aequando cum $\frac{1}{4}$ obtinebis aequationem, ex qua elicies valorem radii circuli specularis pro limite quaesito, citra quem radium illum diminuere non licet, sed ultra quem auctus multum parvumve semper utiliter adhiberi potest. Sit (fig. 164.) curva data transformanda ex. gr. circulus CNB, transiens per centrum C circuli specularis AGD, cujus diameter ACD transeat per centrum O circuli minoris, ex cujus puncto quovis indeterminato N ducta concipiatur tangens FG, et utrinque producta ad majoris circuli peripheriam. Si nunc ex Centro C demissa perpendicularis CL ad tangentem FG vocetur x; radius CD, a; et radius OC, r; reperietur $\frac{GN}{GF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2rx - xx}{aa - xx}}$; ut igitur $\frac{GN}{GF}$ evadat minima, inventa haec quantitas vel ejus loco tantum $\frac{2rx - xx}{aa - xx}$ differentietur, neglecto scilicet, quod constans est $\frac{1}{2}$, ut et signo radicali, res enim eodem recidit; invenienturque $x = \frac{aa \pm a\sqrt{aa - 4rr}}{2r}$, et ideo in hoc casu

$$\frac{GN}{GF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-a^4 + 4aarr \mp a^3 \mp 2arr\sqrt{aa - 4rr}}{-a^4 + 4aarr \mp a^3\sqrt{aa - 4rr}}},$$

hoc si aequetur ipsi $\frac{1}{4}$, prodibit $a = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ hoc est = lateri trianguli aequilateri, cujus altitudo est CB: eo igitur latere, tanquam radio, descriptus circulus est ultimus eorum omnium, qui inutiles sunt, quilibet quippe circulus eo minor, vel ei aequalis, reddit catacausticam circuli CNB infinitam et asymtoticam, per consequens inutilem: quilibet vero circulus, eodem illo termino major, dabit circulo dato CNB aequalem catacausticam finitam et clausam, adeoque talem qualis in problemate postulatur. Q. E. F.

Haec nonnihil fusius, quam par est, explicata dedi, quod non fecissem, nisi Tu ita desiderasses. Nunc ad reliqua literarum Tuarum pergo. La Hirii errorem circa curvaturam radii optici refutatum a Dno. Hermanno, cum hujus vera solutione substituta, non dubito Tibi nunc visum, utpote jam ab aliquo tempore in Actis editum. Quam misere soleat hallucinari la Hirius aliena inventa demonstrare volens, ostendit in sua Mechanica, ubi tauto-

chronismum Hugenianum probaturus concludit tempus descensus per cycloidem aut quemvis ejus arcum esse duplum temporis descensus per diametrum verticalem circuli generatoris, quod falsissimum; tempus enim descensus per curvam est ad tempus descensus per diametrum, ut semicircumferentia ad diametrum, adeoque non ut 2 ad 1. Paralogismum ejus dudum in Actis aperui. Et ego quoque accepi nuper literas a Moyvraeo, una cum inclusis literis Hallaei: nuntiant mihi se ad me misisse fasciculum aliquem continentem Apollonii Pergaei libellum de sectione rationis, ab Hallaeo editum, tum etiam Newtoniani Tractatus de Coloribus latinam versionem, ut et tandem Cheynaei responsionem ad Moyvraei libellum. Fasciculus autem iste ad me nondum pervenit. Guidonis Grandii nomen in Actis jam aliquoties occurrit; non videtur magna illum praestaturum, si ex iis quae dedit judicandum. Accepi binas Dissertationes Wolfii, quas ipsemet Auctor mihi misit cum epistola humanitate plena. Ut verum fatear, neque hic satis alte penetrasse videtur; communia et trita sunt quae pertractat et quaedam operosius multo quam opus est; mirum in modum se torquet in quadranda parabola ordinaria, pro qua plus quam integram paginam adimplet nec tamen sine paralogismo. Nollem autem hoc, quod Tibi soli scribo, ab Auctore rescisci, ne fervor ejus, quo haec studia prosequi videtur, iniquiori ut forte putaret judicio sufflaminetur, quem potius quoquo laudabili modo incitare convenit; quo fine hasce adjunctas ad ipsum scripsi. Spero occasionem Tibi fore eas porro Lipsiam mittendi.

Ante paucos dies literas accepi a Varignonio, ex quibus eum reducem intellexi ex thermis summo cum fructu melioris valetudinis. Significat mihi, Hamelium Secretarium emeritum in Academia Scientiarum Regia diem suum obiisse, eique successisse aliquem nomine d'Aleme, Mechanicum, atque hunc receptum esse inter Veteranos, qui novam instituant classem Academicorum supernumerariorum et qui non ita stricte teneantur interesse congregationibus.

Scriptionem hanc hucusque perductam interrupit Uxor mea, quae ex improviso et ante terminum quem sibi constituerat, peperit feliciter filiolam, et ita me jam sextae prolis parentem fecit. Credo thermas, ex quibus ante aliquot hebdomadas rediimus, nonnihil maturasse partum, quamvis et puerpera et infans nihilominus bene hactenus valeant Deo favente. Vides interim qualia nobis uxoratis negotia facessant familiae nostrae jam satis numerosae et subinde

adhuc accrescentes; non miraberis igitur, si studiis mathematicis non ea amplius qua desideramus assiduitate operam dare possumus. Mille sunt curae et sollicitudines, quae nos occupant, a quibus coelibes sunt liberi: habet matrimonium sua commoda et habet sua incommoda in variis vitae generibus, sed qui literis se totum dedere cupit, discat is prius vitam suam in coelibatu transigere, quo nomine Te felicem reputo. Vale et fave etc.

Basileae a. d. 11 Septembr. 1706.

P. S. Quod ad Dn. Hermannum attinet, oblitus eram dicere, quod in vocationis negotio nihil adhuc est confectum praeter id, quod a Curatoribus Academiae nominatus quidem fuit jam a longo tempore, ut nosti; confirmationem autem ab Excellentissimo Senatu Veneto in hunc usque diem nondum obtinuit. Cl. Fardella lentoris hujus culpam rejecit in importunitatem armorum Patavinas oras nimis molestantium; interim spem fecit felicis successus brevi secuturi, ubi belligerantes ex Venetorum terris exierint, quos cum nunc maxima parte jam Pedemontium ingressos et hinc Taurinum ab obsidione liberatum audiverimus, videbimus quousque tandem Dn. Hermannus optato fine potiri possit.

Cum in eo essem, ut has literas complicarem, novissimae Tuae mihi opportune traduntur. Legi animadversionem Tuam Novellis Literariis inserendam; placet ea mihi et propositum Tuum suum cuique tribuendi, quo Tua Tibi summo jure vindicentur, ego plane non improbo. Potuisses tamen etiam hoc non omittere, quod post publicatum Tuum algorithmum calculi differentialis modumque quantitates differentiandi, ego primus fuerim, qui proprio Marte cogitarim de altera calculi parte, qua a differentiis ad summas regressus quaeritur, cujus antea nec volam nec vestigium sive in Actis sive alibi videram, quem ideo cum commodius vocabulum nescirem, novo nomine calculi integralis nunc passim recepto insigniebam, et postea regulas plures eodem tempore pro eo calculo a me inventas partim cum fratre partim cum aliis communicavi. Mihi enim tum temporis persuadebam, nemini ante me in mentem venisse cogitationem de inversione methodi differentialium ejusque inversionis modo et usu, ut itaque ego, quanquam et Te et Newtono sim posterior, nihilominus tamen quantum ad calculum integralium spectat, aliquo modo in inventionis gloriae partem jure merito vobiscum venire possem.

De problemate curvae catenariae quod dicis illud a Fratre

Tibi fuisse propositum, non addis quod id fecerit ex meo instinctu; considerabam enim eam curvam ante fratrem, nescius tamen uterque eandem illam jam a Galilaeo fuisse tentatam. In hoc vero problemate solvendo cum ille frustra desudasset, ego vero primum usum regularum mearum pro calculo integrali feliciter adhibuissem et solutionem meam Fratri ostendissem, inceperat meas regulas pluris quam antea aestimare et excolere. Hoc modo calculus iste paulatim incrementa nova et perfectiones accepit, dum alter alterum deinceps continuo exerceret. Lutetiam tandem profectus, communicavi cum Hospitalio omnes nostras regulas duplicis calculi differentialium et integralium; pro opere autem Hospitaliano postea edito, certe non tantum fundamenta, ut innuis, sed materiam ipsam totam ego suppeditavi, ut per manuscripta et literas bene multas etiamnum apud me asservatas atque jam a multis Viris doctis et fide dignis saepe visas planissime constat, ut ita non minori jure, quod Virgilius olim de versibus suis ab alio usurpatis, id ego de hoc opusculo dicere possem:

Hunc ego codiculum feci, tulit alter honores,
Sic Vos non Vobis etc.

Caeterum nihil aliud praeterea in schediasmate Tuo monendum reperio, nisi ut quantocyus lucem videat. Illud non remitto, ne literarum fasciculus nimis intumescat, ejus enim autographum Tibi superesse non dubito. Nunc iterum vale.

CXCVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratias ago, quod labore me sublevasti inquirendi in meae constructionis limites, per quam datae curvae quotlibet aequales exhibere doceo. Cum alia peragenda magis magisque urgeant, fit ut talia vix possim tractare, qua vellem, attentione.

Nuper cum Epistola Tua excitatus considerarem motum repentem, contentus fui primariam eruisse proprietatem dimensionis; Tua autem tunc ad manum non erant. Quod si in Schediasmate ad Acta olim misso, hinc clare duxisti Tuam constructionem arcus

dato aequalis, bene habet; sin minus, cogar eam a Te petere. Et optarem aliquod exhiberi exemplum, veluti pro curva Elliptica.

Dn. Fratrem Te suggerente de Catenaria quaesisse ignorabam: quia vero indicas, non dissimulabo.

Quem integralem Calculum appellas, ego Summatorium dicere solitus sum, et Integralem appellabam eum, qui docet Problemata Arithmetica in integris solvere, quando id fieri potest. Semper autem opposui differentias et summas, d et $\int$, ita ut $\int dx$ sit x et $d\int x\,dx$ sit $x\,dx$. Ita $\int$ et d conjuncta se mutuo tollunt. Imo summae me differentialis Calculi admonuere, eaque Methodi meae clavis fuit, cum in seriebus numericis hanc reciprocationem deprehendissem, eaque arte summassem multas series antea non summatas. Re igitur ad lineas seu series inassignabiliter differentes traducta, animadverti tangentes respondere differentiis, quadraturas summis. Et quod in Numericis feceram, multo magis in Geometricis faciebam, ut de variis regrediendi seu summandi artibus cogitarem, non sine multiplici jam tum successu, ut specimina etiam comprobarunt. Et quod de rationalibus Quadraturis nuper edidi, jam tum habui; reductione enim fractionum compositarum ad simplices pro seriebus numericis inventa, pronum fuit idem adhibere figurarum quadraturis. Eaque omnia jam triginta annorum aetatem habent.

Si qua in summando vel integrando artificia detexisti, quae me fugerint, gratus agnoscam pro eo candore, quem semper ostendi.

Apollonianum Fragmentum ab Halleio editum nondum accepi totum.

Etiam ego Dno. Wolfio statim ostendi, parabolae quadraturam non ex Theorematibus aliunde mutuatis, sed ipsius calculi visceribus esse petendam. Et postea series numericas longe aliter tractandas admonui.

Quidam nuper ad me scripsit, nostram Methodum maximae et minimae non pertinere ad casum talem: Sit (fig. 165. 166.) Curva ABCD, quae a C reflectatur, sitque CE portionum tangens communis; hinc ille non putabat hic locum habere, ut BF existente y, quaeratur GC, ubi $dy = 0$. Respondi etiam hoc locum habiturum, si concipias curvam, quasi saccum regressu faciat, qui in hoc casu evanescat in punctum. Vale.

Dabam Hanoverae 3 Octobr. 1706.

CXCIX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non est quod gratias agas pro tenui labore, quo Te sublevavi, inquirendi in Tuae constructionis limites, per quam datae curvae quotlibet aequales exhibere doces: certe enim fuit labor tenuis, mihi tamen, qui dubia semper valetudine utor, satis molestus, ut nesciam an aliena Tua negotia Te magis, quam corporis mei infirmitas me excuset, quominus talia pertractem debita attentione. Id saltem rogare Te ausim, ut ne imponas mihi in posterum aliquid oneris, ad quod ubi responsionem dedero, quantum per vires licuit, eam tamen postea attente perlegere et examinare vix Tibi vacet. Cui enim bono, ut impleam literas longis calculis (hoc praesertim valetudinis meae statu) quas si Tu non legis, nemo mortalium unquam leget. Possum subinde colligere, ignoscas candide loquenti, ex iis quae a me petis, quod literas meas olim ad Te datas vel plane non vel admodum perfunctorie legeris, vel saltem lectorum facile nimis obliviscaris: nam quandoque petis, quae dudum dedi. Petis ex. gr. constructionem meam arcus dato aequalis, ex Schediasmate meo ad Acta olim misso ductam, quam tamen ex iis omnibus, quae Tecum per aliquot annos circa hanc materiam communicavi, jam perspectissimam esse nullus dubitavi. Sed quomodo eam nunc clarius exhiberem, quam in Actis habetur? Impende, quaeso, semiquadrantem horae, ubi vacaverit, lectioni attentae illius Schediasmatis: extat in Mense Aug. 1705; forte nec temporis nec operae poenitebit. Hermannus noster legit et examinavit illud serio, lectumque impense probavit laudavitque.

Ut tamen Tibi morem geram petenti, exemplum pro Curva Elliptica in aliam aequalem transmutanda dabo. Sit (fig. 167.) Ellipsis data ABDE, cujus axes conjugati AD et BE. Fac igitur aliam Ellipsin datae aequalem NPMQ, tangantque primo duae illae Ellipses se mutuo in verticibus conjugatis A et P, ita nempe ut in directum cadat axis major AD cum minore PQ. Hoc in positu repere facias PMQN, hoc est, moveas eam motu parallelo super immobili ABDE, servato interim semper contractu mutuo ellipsium, quo fiet ut Ellipsis PMQN transferatur post primum circumlationis quadrantem in situm $P_1M_1Q_1N_1$, post secundum in $P_2M_2Q_2N_2$, post tertium in $P_3M_3Q_3N_3$, et post quartum redeat

in primum P M Q N; atque interim vertices quatuor A, B, D, E, successive excipiant suos respective conjugatos P, N, Q, M. Hoc motu punctum quodvis in plano curvae repentis centrum O describet curvam $OGO_1HO_2IO_3KO$, quae, secundum ea quae demonstravi in Actis, erit dupla curvae Ellipticae A B D E adeoque illius dimidia OGO_1HO_2 erit aequalis propositae curvae Ellipticae. Quod si magis desideres, ut integra descripta Ellipsi datae sit aequalis, oportet prius assumere loco Ellipsis datae aliam Ellipsin similem, habentem axes conjugatos datorum dimidios: ita enim ambae Ellipses A B D E et P M Q N simul sumtae aequant propositam, huicque adeo aequalis erit integra curva descripta G H I K. Habes ergo (ut desiderasti) constructionem per motum continuum, certe non minus geometricam, quam ea est, quam per motum circini describitur circulus. Forte tamen ei non acquiesces, sed petes aequationem algebraicam pro determinanda natura curvae ejusque punctis inveniendis; talem exhibere aequationem si intelligis per c o n s t r u c t i o n e m d a r e, etiam in hoc me obsequentem habebis: Sit igitur semiaxis major $AC = a$, semiaxis minor $BC = b$, abscissa indeterminata in Ellipsi $CR = x$, adeoque applicata in eadem $RS = \frac{b}{a}\sqrt{aa - xx} =$ (brevitatis gratia) $\frac{by}{a}$; ex his fiant ordinatae CT, TF hac conditione, ut abscissa CT sit $= x + \frac{b^3 x}{\sqrt{a^4 yy + b^4 xx}}$ et ordinata $TF = \frac{by}{a} + \frac{a^3 y}{\sqrt{a^4 yy + b^4 xx}}$; dico curvam hoc modo determinatam fore quaesitam, nempe illam ipsam, quae per motum repentem puncti O fuit delineata. Notes hic obiter puncta F et S ita sibi respondere, ut ubi O processit in F, mutuus Ellipsium contactus tunc semper celebretur in S, quae omnia demonstratu sunt facilia.

Sed ad aliud nunc progredior, quod moneri alicujus operae pretium duco, quamquam alias, ut videtur, haud adeo magni meum inventum hactenus aestimaveris. Idque hoc est, quod haec me a Methodus transformandi curvas simul doceat lineas ellipticas, ceterasque ellipticarum formam habentes, imo omnes curvas comprehendere intra limites pro arbitrio coarctandos duorum circulorum, quorum unus majorem, alter minorem circonferentiam habeat, quam data curva elliptica, quod quantum usum habere possit in

praxi ipse perpendas, licet tale quid nemo hucusque praestiterit, nemo enim hucusque sine serie in terminis finitis et geometrice reduxit ex. gr. ellipsin ordinariam intra duas circumferentias circulares, quae vel tantum centesima, nedum millesima, vel minori adhuc sui parte, altera alteram excedat. Hoc tamen est, quod mea Methodus feliciter exequitur, en qua ratione!

Vides curvam rependo descriptam, quae ellipsi aequalis, habere quatuor sua puncta cardinalia O, O_1, O_2, O_3 aequaliter distantia a centro C; sed et demonstrare possum, intra quatuor ista puncta dari quatuor alia exacte intermedia G, H, I, K, itidem aequaliter distantia a centro C, sed hoc discrimine, quod illorum intervalla a centro C sint minima, horum vero maxima; id quod curvae nostrae peculiarem hanc formam conciliat, ut nempe habeat quatuor gibbos valde quidem obtusos in G, H, I, K, alternatim protuberantes inter quatuor puncta cardinalia O, O_1, O_2, O_3, ubi curva quatuor veluti compressiones patitur; unde clarum est, circulos duos ex centro C et radiis CO, CG descriptos tangere curvam in quatuor punctis, et unum interne in O, O_1, O_2, O_3, et alterum externe in G, H, I, K; adeoque illum tanquam inscriptum minorem esse curva, hunc vero tanquam circumscriptum eadem esse majorem. Est autem radius inscripti $CO = CA + CB = a + b$, et radium circumscripti CG inveni $= AB\sqrt{2} = \sqrt{2aa + 2bb}$. Hinc ergo concludo curvam nostram $O G O_1 H O_2 I O_3 K O$, hoc est, Ellipsin, cujus axes conjugati sunt $4a$ et $4b$, nempe duplo majores quam AD et BE, esse majorem, quam ambitus circuli, cujus radius $a+b$, sed minorem quam alium, cujus radius $\sqrt{2aa + 2bb}$. Sumamus exemplum hujus adjectae figurae, ubi tali Ellipsi sum usus, in qua semiaxes conjugati AC et BC sunt ut 5 et 4, unde radius circuli minoris erit 9 vel $\sqrt{81}$, et radius circuli majoris erit $\sqrt{82}$; assero igitur longitudinem ellipsis, cujus semiaxes conjugati habent partes 10 et 8, esse inter duas circumferentias circulares radiorum $\sqrt{81}$ et $\sqrt{82}$, qui numeri sibi propius accedunt, quam hi rationales 9 et $9\frac{1}{18}$, hoc est, quam 162 et 163, ideoque minor a majori minus differt, quam centesima sexagesima secunda sui parte. Hac occasione memini me legere apud nonnullos Practicos, quod pro comparandis perimetris Ellipsium cum circularibus jubeant describere circulum radio aequali medio arithmetico inter semiaxes conjugatos ellipsis propositae, cui asserunt aequalem

fore circuitum circuli ita descripti; revera hic circulus, cujus circuitum haud dubie ex sola sensuum aestimatione aequalem judicant lineae ellipticae, est ipsissimus minor ex limitibus a me hic assignatis; sed cum illi eum non nisi circiter aequalem aestiment, incerti tamen utrum, rem accurate sumendo, sit justo major aut minor, ego rei veritatem scientifice assecutus, ostendi nonnihil justo minorem esse. Sed haec de limitibus primis. Nunc limites secundos, multo quam primi propinquiores, et postea tertios propinquiores adhuc, et ita porro, invenio hac ratione: Finge scilicet curvam nostram prima operatione inventam GHIK se ipsam obrepere, et ita quidem ut ab initio vertex gibbositatis G tangat verticem compressitatis O, hoc est, ut recta longissima GC in curva mobili cadat in directum cum recta brevissima OC in curva immobili, plane ut factum est in ipsa ellipsi, ubi ab initio vertices conjugati A et P (qui sane nihil aliud sunt, quam id quod ibi voco vertices gibbositatis et compressitatis) se tangunt, et maxima minimaque distantia AC, PO in directum ponuntur. Hoc intellecto, levi attentione adhibita percipies, secundo hoc motu reptito, centrum C curvae mobilis vel quodvis aliud ejus plani describere curvam novam Octigibbam, hoc est quae habebit octo gibbos tantillulum prominentes alternatim inter totidem compressuras, et quorum vertices octo aequaliter a centro distabunt; curvamque ipsam octigibbam longitudine duplam esse curvae generantis quadrigibbae, uti haec ipsa dupla est ellipticae, ex qua fuit generata. Attendas igitur admirabilem generationem harum curvarum; Ellipsis, quae reapse est curva bigibba, generat sui duplam quadrigibbam; quadrigibba producit sui duplam octigibbam; et haec, simili motu et conditione, giguet etiam sui duplam sedecigibbam, et ita porro in infinitam. Sed quemadmodum curva quadrigibba propius ad rotunditatem circuli accedit, quam bigibba seu Ellipsis, ita quoque octigibba propius accedit ad eam, quam quadrigibba, et sedecigibba propius quam octigibba etc. ad instar polygonorum, quae quo plures habent angulos, eo magis circulo assimilantur, magno tamen discrimine ratione appropinquationis, nam per multiplicationem angulorum in polygonis diu multumque procedendum est, antequam perveniatur ad limites a Ludolpho van Cölln constitutos, sed curvae nostrae multigibbae incredibili adeo celeritate ad circulum convergunt, ut quemadmodum ex indiciis quibusdam mihi patet, institutis quinque operationibus jam perveniatur ad limites Ludol-

phinis arctiores, reperta nempe curva tantum 64 gibborum, loco quod Archimedi opus fuerit polygono 96 angulorum ad rationem suam 7 ad 22 diametri ad circumferentiam inveniendam, quae tamen a vera multum adeo adhuc abludit. Veritatem hujus aliquo modo percipies ex limitibus nunc tradendis, quos mihi suppeditavit curva octigibba. Hos ut inveniam, facile colligere est ex ante dictis necesse esse, ut quaeram illius curvae distantias a centro maximam et minimam: circulus enim, radio maximi intervalli descriptus, tanget curvam exterius in octo punctis, et erit per consequens longitudine major quam curva; sed circulus descriptus radio minimi intervalli tanget curvam interius in octo punctis, adeoque longitudine minor erit, quam curva. Quantum ad distantiam minimam, invenitur facile; est enim aequalis summae distantiarum minimae et maximae curvae quadrigibbae genitricis, quod per se patet, sed quod spectat ad distantiam maximam, demonstrare possum, quod sit illa aequalis perpendiculari CZ bis sumtae, quae demittitur ex centro C in rectam VX tangentem curvam quadrigibbam generaticem in Y, quae tangens supponitur facere cum CO et CG prolongatis basin trianguli isoscelis VCX. Et quidem pari modo distantiae minimae et maximae in sequentibus curvis multigibbis inveniuntur. Semper enim distantia minima aequatur distantiis duabus, minimae et maximae simul sumptis in praecedente multigibba generatrice, et distantia maxima aequalis est altitudini bis sumptae trianguli isoscelis formati per prolongationem distantiarum praecedentium maximae et minimae usque ad tangentem tanquam basin ejus trianguli. Ex hoc generali fundamento, si nunc lubeat eruere limites secundos, quos nempe suppeditat curva octogibba, advertendum primo est, cum octigibba sit dupla quadrigibbae, et quadrigibba dupla bigibbae seu ellipsis, fore curvam octigibbam longitudine quadruplam ellipseos, adeoque ut illa fiat aequalis ellipsi propositae, assumendam esse pro prima generatrice aliam ellipsin similem, cujus axes conjugati sint subquadrupli conjugatorum propositae. Sint igitur iterum (ut ante) axes conjugati ellipseos propositae 4a et 4b, adeoque nunc $AD = a$, et $BE = b$, inveni pro limitibus secundis, nempe radium circuli curvae octigibbae inscripti $= \frac{a+b+\sqrt{2aa+2bb}}{2}$, et radium circuli eidem circumscripti $=$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2aa+2bb+\overline{aa-bb}\sqrt{2}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2aa+2bb-\overline{aa+bb}\sqrt{2}},$$

vel quod tantundem est $= \sqrt{aa + bb + \frac{1}{4}\sqrt{2a^4 + 12aabb + 2b^4}}$. Ut applicationem faciamus ad exemplum nostrum, ubi semiaxes conjugati ellipsis propositae sunt partium 10 et 8, hoc est ubi $a=5$ et $b=4$, invenietur pro radio circuli minoris $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$, et pro radio circuli majoris $\sqrt{41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}}$, qui numeri sibi magis appropinquant, quam hi rationales $9\frac{2}{89}$ et $9\frac{1394}{40000}$; est enim $9\frac{2}{89}$ tantillulo minor quam $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$, et $9\frac{1394}{40000}$ tantillulo major quam $\sqrt{41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}}$, atqui numeri $9\frac{2}{89}$ et $9\frac{1394}{40000}$ paulo adhuc propius accedunt ad rationem aequalitatis, quam hi numeri integri 36562 et 36563; ergo a potiori, ratio inter limites inventos $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$ et $\sqrt{41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}}$ magis convergit ad rationem aequalitatis, quam quae est inter 36562 et 36563. Determinavi igitur hac secunda operatione duas circumferentias circulares, unam proposita ellipsi majorem, alteram eadem ellipsi minorem, quae tamen circumferentiae tam parum ab aequalitate recedunt, ut in plusquam triginta sex millibus partium ne quidem parte unica a se differant. Nunc quaeso perpende, si limites primos 162 et 163 excipiant statim limites secundi enormi adeo modo sibi propinquiores, quid fieret si instituerenus nunc tertiam operationem, postea quartam et quintam? Haud dubitabis, credo, de eo quod dixi, paucis istis operationibus posse pro ellipsibus coaequandis perimetris circulorum perveniri ad limites angustiores, quam quos Ludolphus multis concatenatis operationibus invenit pro ipso circulo rectificando. Fateor equidem ulteriores operationes nostras nonnihil difficiles et longas evadere propter complicationem signorum radicalium, quae in expressionibus limitum magis magisque coacervantur, sed qui hisce delectatur, operae pretium faceret, si inquireret, num qua certa lege limites progrediantur, quo casu sine calculo pro lubitu continuari possent; uti certe jam factum est pro definiendo limite minori, quippe qui, ut supra monui, semper est aequalis medio arithmetico inter limites praecedentes, modo nunc pari facilitate limes major ex praecedentibus erui posset, haberemus quod volumus. Interim quamvis nondum id laboris mihi dederim, ut instituta tertia operatione tertium limitem majorem definierim, potest

tamen conferendo tertium limitem minorem, qui tam facile invenitur, cum praecedente secundo majori perveniri ad rationem magis aequalitati accedentem, quam quae habetur ex utroque limite secundo; ita in praesenti exemplo, ubi limites secundi $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$ et $\sqrt{41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}}$, quorum ratio continetur intra **36562** ad **36563**, nunc habebitur pro limite minori $\frac{9+\sqrt{82}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}}$ et pro majori $\sqrt{41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}}$; hos limites reperio contineri intra terminos hujus rationis 56717 ad 56718, quos vides una tantum unitate differre. Ellipsis igitur nostra, cujus axes conjugati sunt ut 5 ad 4, eo jam proximitatis ad perimetrum circuli reducta est, ut exhiberi possint duae circumferentiae circulares, una ellipsi major, altera eadem minor, quae tamen in plusquam quinquaginta sex millibus partium ne una quidem a se differunt. An talia jam ab alio quopiam ante me fuerint tradita, nihil sane vidi unquam, neque quenquam de hisce vel somniasse tantum arbitror. Petiisti solum ut methodum meam transformandi curvas (quam sine dubio inapplicabilem credideras) ad ellipsin applicarem, quod feci; sed dedi insuper, ut cernis, quae a me non expectaveras, occasionem forte datura excitandi Tuam curiositatem, deque methodo illa mea paulo benignius quam prius sentiendi. Possem hic attingere alia, quae ea pro foecunditate sua mihi suppeditavit in ipsis cyclometricis profutura, sed justos literarum fines jam egressus ad finem properare jubeor.

Ut cetera Epistolae Tuae capita brevissime perstringam, memini jam olim me quaedam mea in summando vel integrando artificia Tecum communicare, ut adeo non vacet ea in adversariis meis hinc inde dispersa denuo recolligere et exscribere; nihil enim est quod magis fastidio, quam operam eandem bis peragendam, praesertim si nulla Tibi hinc nascitur commoditas, nisi quod literas meas olim ad Te datas paululum perlustrandi labore leveris. Conceptus quem habes de curvis, ut voco, bicornibus, quod nimirum quasi saccum regressu faciant, etiam mihi ante complures annos fuit familiaris, et de ea re multis literis egi cum Marchione Hospitalio, cui in exemplis quibusdam curvarum tam algebraicarum, quam transcendentium ostendi per calculum in sacculo illo seu puncto reversionis (point de rebroussement) revera omnes directiones

reperiri, hoc est quamlibet rectam per illud punctum ductam esse in numero tangentium, quod conceptum istum meum mirifice confirmabat. Cl. Hermannus, cui monstravi literas, de rei veritate testari poterit.

Forte adhuc nescio, communem nostrum Adversarium Rollium ad bonam frugem rediisse et tandem veritatem agnovisse; conversionem suam coram Varignonio, Malebranchio, Fontenellio aliisque palam testatus edixit se investigatione quorundam malevolorum scripsisse contra calculum infinite parvorum. Scire etiam convenit, aliquem Du Tal et alium Polinier Parisinos tandem didicisse imitari me in conficiendo meo phosphoro ex mercurio et quidem ex eo ipso, cum quo Hombergius aliique Academici frustra laboraverant. Prior ille Du Tal etiam in mei defensionem publice edidit aliquod scriptum, quod vidi in Menstruis Bernhardi praeterito Septemb. Sic tandem bona causa semper triumphat. Vale et transige novum hunc pluresque secuturos annos ex animi sententia etc.

Basileae a. d. XV. Januar 1707.

CC.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non mediocriter turbaverunt me literae Hermannianae, et mox Tuae, quae valetudine Te parum firma uti significant. Itaque valde suadeo, ut eam cures diligenter, et laboribus animi maxime abstineas, inter quos Calculi non sunt postremi. Potes ingenio prodesse, etsi non prosis labore. Neque gravius haec studia damnum sentire possent, quam a jactura Tua, quae adhuc Fratrem Tuum deplorant. Gaudeo interim alterius Fratris Filium vestigia vestra premere. Hunc poteris excitare, ut juvet meditationes Tuas, haereditariamque vobis laudem in posteros servet.

Nolim me Tuorum inventorum negligentem aut parcum aestimatorem putes, etsi praejudicio nescio quo, festinus circa repentem motum Te lapsum putarim: quamquam Tu quoque (patere ut hanc vicem reddam) meam problematis Tui solutionem initio negligentius tractaveris, quae res fecerat, ut nescio quas Tibi perplexitates fingeres, ubi nullae erant.

Scimus et hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Caeterum etsi pro poenitentia injunxeris, ut Tuas Gibbo-compressas (sic enim credo apte vocabimus) attentius legerem, legisse non poenituit. Pulcherrima enim visa profecto Tua meditatio de circulis duobus, uno extimo, altero intimo, circa curvam ad easdem partes cavam, adeoque uno majore, altero minore. Ita per curvas plus semper multigibbas eidem aequales indefinite huic acceditur per circuli circumferentias. Nec dubito, quin possis hoc artificio aliquo ad ipsius applicare dimensionem circularis circumferentiae et facili negotio superare Ludolphum.

De Sacco in curvae cornu evanescente Te non minus, quam me dudum cogitasse facile credo: monui tantum amicum, ut objectioni satisfacerem, quae hic regulas nostras maximo-minimorum locum non habere volebat. Plus gaudii est in coelo nostro Geometrico ex uno peccatore converso, quam ex decem justis: itaque Rollium ad bonam frugem rediisse impense laetor. Qui vero illi malevoli instigatores? Binos ex illis non difficulter divinare posse mihi videor; sed patiamur eos Heautontimorumenos esse.

Du Talius ille, quem memoras, Scapham Scapham appellavit, quantum ex Bernardinis vidi.

Aliquoties notavi Academicos nonnullos sua tantum curare, aliena negligenter, ne dicam inique. Nonnulli id habent, ut aliena, quantum possunt, sibi vindicent. Ita La Hirius pessime Romerum inventorem dentium Epicycloidalium dissumulavit; Parentius in Praefatione suorum Elementorum jactat, se, quae Varignonius de compositione motuum, imo etiam quaedam, quae Hugenius dudum dederat, per se invenisse, ne lectis quidem eorum scriptis, quae in omnium manibus versantur. Nunc Memorias Academicas suis quibusdam Calculis mechanicis (nescio quam bonis) implet, jactatque se primum de frictionum aestimatione cogitasse: sed quantum video, semper in abstractionibus subsistit; nunquam ad usum rerum venit, quod in Mechanicis inprimis desideratur.

Cogitavi inter scribendum, an tua per circulum appropinquandi ad curvam Ellipseos Methodus applicari appropinquationi rectae ad circuli circumferentiam possit. Sit (fig. 168.) linea Epicycloidalis ABCDE, descripta revolutione circuli cujusdam mobilis super circulo immobili AEF. Sit BD chorda maxima in dicta Epicycloidali, per quam abscindetur segmentum BCD, huic adjungatur aliud per omnia congruum BKD, et ita formabitur linea El-

lipsiformis BCDKB rectificabilis per viam communem. Haec tractetur, ut Tu tractasti Ellipsin, et habebis curvas ei aequales, vel in ratione ad eam data ad circulum in infinitum accedentes, adeoque lineam rectificabilem in infinitum magis magisque admovendo ad circulum, vicissim circumferentiam ejus magis magisque mensurationi admovebis. Suppono autem Epicycloidalem esse eam, cujus quaevis puncta per Geometriam communem definiri possunt. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Berolini 1 Febr. 1707.

P. S. Dum hic sum, id ago ut aliqua sub approbatione Societatis Scientiarum nostrae edantur Miscellanea. Observationes Astronomicas habemus non contemnendas, et non paucae, quae factae sunt a Parisinis Anno 1704 nuperque editae, poterunt conferri cum nostris, quas edi curabo. Si quid submittere nobis voles generis cujuscunque, libenter adjicietur. Etiam quae Dn. Hermannus forte dare volet, grata erunt; nam non contemnenda erunt, quae ab ipso proficiscentur et nos undecunque submissa, quae digna erunt publico, non negligemus. Iterum vale.

CCI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Te nunc liberatum a praejudicio illo, quo me lapsum putasti circa motum repentem, valde laetor, sed magis adhuc, quod quae hinc meditatus fui de curvis multigibbis, pro appropinquatione ad curvas ellipticas per circulares, legisse Te non poenituerit; nihil enim magis in votis habeo, quam ut aliquid Tua attentione dignum praestare possim. Rectissime interim cogitasti methodum istam appropinquandi per circulum ad curvam ellipseos applicari etiam posse lineae rectae: sed pro hoc ideo non opus est linea epicycloidali, quae pro calculo nimis esset composita; quaelibet alia linea rectificabilis huic fini inservire potest, etsi Ellipseos formam non habeat: hac de causa, jam in praecedentibus meis (nam tum de hac re jam cogitaveram) scripsi methodum meam non tantum ad ellipses, sed ad omnes curvas omnino extendi. Sit

enim (fig. 169.) BA arcus curvae cujuscunque ex. gr. parabolae: adjungatur ad B, versus partem alteram, arcus alius priori per omnia similis et aequalis BD, ita quidem ut in B (quanquam nec hoc absolute sit necessarium) habeant communem tangentem, hoc est, ut forment curvaturam continuam; jam duobus istis arcubus BA, BD, adaptentur duo alii prorsus similes et aequales EA, ED, ut hinc oriatur figura clausa ellipsiformis BAED, cujus tota circumferentia aequatur arcui BA quater sumpto, neque obstat quod in A et D arcus in angulos coëant, non vero, ut in B et E, abeant in curvam continuam. Jam si huic figurae BAED alia per totum congruens PNQM admoveatur, et altera alteram obrepat, ut feci in ellipsi, describet punctum O curvam quampiam quadrigibbam, quae erit arcus BA octupla, haec quadrigibba postea mutabitur in octigibbam et ita porro. Fateor equidem curvas illas multigibbas non esse uniformis naturae, ut sunt illae, quae generantur ex ellipsibus; constant enim ex arcubus diversis, qui tamen in continuam ubique abeunt curvitatem, et hoc jam sufficit pro approximatione ad circulum. Vides itaque, quomodo nunc parabolae arcus et quae ab eo dependet area hyperbolae per circulum quantumvis prope mensurari possit, quod sane hactenus nemo feliciter executus est. Hac enim methodo intra paucas horas pro illis arctiores limites invenirentur, quam quos Tibi misi pro ellipsibus. Interim, ut et hoc moneam, non necesse est ut arcus BA quater sumatur ad formandam figuram clausam ellipsiformen BAED, nisi eam omnino ad integram circumferentiam reducere velimus, nam quilibet arcus solus cujusvis curvae, per obreptionem subcontrariam continuo repetitam in infinitum, tandem abit saltem in arcum circuli. Voco autem obreptionem s u b c o n t r a r i a m, quando arcus aliquis se ipsum obrepit inverse, hoc est, quando in reptionis initio extremitates oppositae se mutuo tangunt: hoc enim modo arcus propositus per reptionem primam mutabitur in alium ejusdem, ut voco, amplitudinis, sed qui constabit ex duobus arcubus similibus et aequalibus, qui si nunc porro s u b c o n t r a r i e se mutuo obrepant, orietur arcus, constans quatuor arcubus similibus et aequalibus, adeoque ad rotunditatem arcus circularis magis accedens; per obreptionem tertiam subcontrariam formabimus arcum habentem arcus octo similes et aequales, et sic magis et magis ad ipsum arcum circuli, ejusdem cum praecedentibus singulis amplitudinis, perveniemus. Hoc unicum adhuc addam pro applicanda methodo ad

rectae appropinquationem ad circulum, sumi posse Ellipsin, cujus axis minor sit indefinite parvae longitudinis, quae utique nihil aliud erit quam linea recta duplicata. Hanc si more ellipsium per reptionem moveas, habebis loco curvae quadrigibbae quatuor latera quadrati; postea loco octigibbae ambitum octogoni, ita scilicet, ellipsi abeunte in rectam lineam, curvae multigibbae quoque abeunt in polygona regularia et haec tandem in circulum. Id quod mihi suppeditavit modum hunc facilem, exhibendi per constructionem continuo et celeriter appropinquantem arcum circuli aequalem lineae rectae datae. Esto (fig. 170.) data recta BG perpendicularis ad aliam rectam AC, ducatur ad arbitrium recta BA et angulo A fiat aequalis angulus ABC, ut habeatur triangulum isosceles BCA. Jam ducatur perpendicularis CD in AB, et ipsi CD capiatur aequalis CL; jungatur DL, in quam agatur perpendicularis CE, cui aequalis abscindatur CM. Jungatur EM, et ducatur perpendicularis CF, hocque continuetur in infinitum; et sit CR illarum perpendicularium ultima, dico arcum circuli RS radio CR descriptum fore aequalem rectae propositae BG. Atque hoc est, ad quod respiciebam, quando in praecedentibus meis dixi, me quaedam ex occasione illa invenisse in cyclometricis profutura; quamquam postea viderim puncta B, D, E, F etc. esse in quadratrice Dinostrati, quod quidem facile demonstrari potest, adeoque hoc nomine nihil novi me praestitisse, quatenus diu jam cognitum est rectificationem circuli dependere a determinatione intersectionis quadratricis et ejus diametri; in eo tamen aliquid singulare hic factum cernis, quod hic puncta in quadratrice D, E, F etc. ob perpendicularitatem CD, CE, CF etc. certius designentur, adeoque punctum ultimum R multo accuratius determinetur, quam per modum vulgarem, quo propter sectiones magis magisque obliquas puncta in quadratrice tandem valde incerta evadunt. Caeterum vero, quidquid de eo sit, elegans mihi videtur et minime contemnendum, quod hoc, quod ab aliis jam pridem inventum et ut singulare quid venditatum, idem tamen hoc nostrae inventionis nonnisi minimum tantum sit corollariolum.

Binos illos ex malevolis Rollii instigatoribus, quos Tu divinabis, et ego divinabo; nisi enim vehementer fallor, in mente habes Galoisium et La Hirium, calculi differentialis acerrimos hostes. Verissimum est quod de nonnullis Academicis notas, sua tantum curare, aliena negligenter; et sane quae a se habent, ple-

rumque sunt mediocria, ne dicam ridicula, ut omnino pudenda res sit ejusmodi nugas admiscere Memorabilibus Academiae scientiarum. Si quid boni subinde edunt, dubitare non licet, quin id ab aliis furati sint, ut recte judicas; possem dare exempla bene multa. Sed nesciveram Romerum esse verum Autorem inventorem dentium epicycloidalum, quorum La Hirius se inventorem praedicavit, aut saltem verum Inventorem dissimulavit; hoc quidem dicere audeo, quod statim ac elegantissimam inventionem illam apud La Hirium legi, mihi plagii suspicio suborta est ex consideratione ingenii La Hiriani ad tam sublimia pertingere non soliti.

Gratissimum fuit intelligere Te curaturum, ut quaedam sub nomine Societatis Scientiarum vestrae edantur Miscellanea. Sic enim Rempublicam Literariam, quam multis adeo modis jam demeruisti, de novo insigniter Tibi obstringes. Eoque magis gaudebit, quod quae Tuis auspiciis eduntur, nil nisi bonum et selectum continere sibi persuadebit: secus ac fieri solet in aliis ejusmodi Ephemeridibus, in quibus plerumque multa sunt mala mixta bonis. Si quae a me proficiscuntur, publico digna judicas, exempli gratia quae de curvarum comparatione et reductione ad circulos ope multigibbarum meditatus, aliaque quae ad Te scripsi in literis privatis et alias publice communicavi, libenter patiar ut edas; Tuo enim arbitrio ea relinquo. Interim dum aliquando vacabit, discutiam Adversaria mea, et quae invenero alicujus momenti, Tibi submittam. Significavi Dno. Hermanno Tuum propositum, eum hortatus, ut mittat quoque si quid edendum habeat, quod se facturum promisit. Miror vero quod ipse nondum in hanc Societatem sit cooptatus, cum tamen alii forte minus Tibi noti in eam jam sint recepti. De caetero libenter a Te scirem Theodorum Zuingerum, in hac Academia Medicinae Professorem, in numerum Sociorum, ut quidem jactat, fuisse relatum, et si sit, ex quo tempore.

Interim vale et fave etc.

Basileae a. d. 23 Martii 1707.

P. S. Accepto ante aliquot dies nuncio inexpectato de cessione Regis Galliarum, vi cujus Longobardia et totus Status Mediolanensis a copiis Gallicis evacuabitur, atque adeo etiam Venetorum Ditio ab exercitibus peregrinis liberabitur, spes de novo affulget Hermanno nostro Vocationis Patavinae diu promissae, nunc tandem submoto illo publicae calamitatis praetextu ex voto successurae.

CCII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum nuperas ad Clarissimum Hermannum scriberem, vix domum redux, nec Tuae nec ipsius novissimae mihi redditae erant. Gaudeo valere Te ex sententia, et ut valetudinem cures suadeo.

Gallosium obiisse ex Gallia scribitur; erat in Viro eruditio non vulgaris, sed aderat tamen et philautia et nescia cedere veritati pertinacia, quam impugnatione Calculi nostri omnibus patefecit. Ego Virum olim noveram familiariter, cum Colberti favore floreret. Forte agebam ipse apud Colbertum, comes generoso Chevreusio Duci. Offendi Gallosium, cum altero Colberto, cognomine Croissio, ad Tractatus pacis habendos profecturo, loquentem, atque id quaerentem ut risum nugosis verbis excitaret: miratus sum non mediocriter hominem haud incelebrem gratiam Magnatum pene scurrilibus dicteriis captare. Sed ajebant, Colbertum majorem hominis dicacitate delectari, quum a laboribus ministerii relaxat.

Romerum esse verum dentium epicycloidalium inventorem pro certo habeto. Nam ipse mihi monstravit Parisiis Theorema suum, ac simul demonstrationem, cum prius rem Hugenius mihi narrasset. Qua autem audacia Hirius viventi et sentienti inventum suum tantum non surripiat, mirari satis non possum.

Elegantissima sunt, quae de curvis multigibbis reptorioque motu habes, inprimis consensus cum Dinostrati Quadratrice. Si quid vel de his, vel de aliis in ordinem redigere velis, ut Miscellaneis Berolinensibus adjici possit, rem gratam facies, et a me curabitur libenter. Quae Hermannus noster de stationibus planetariis summisit, etiam locum illic invenient.

Dominum Zuingerum vestrum in nostram Societatem, commendantibus Virum amicis, quibus Berolini innotuerat, recipi memini; quam mature aut tarde non memini, neque apud nos quicquam refert. Ut Hermannus recipiatur, haud dubie curabo.

Videris in Bernardi Diario literario apud Batavos novas quasdam de Phosphoro Tuo Mercuriali observationes Parisiis institutas.

Fontanellus per amicum mihi significat, quae idem Diarium retulerit, tanquam a se dicta circa Historiam calculi nostri, quaeque refutanda mihi visa sunt, male relata fuisse ab Auditore forte aliquo imperito.

Parentium intelligo mire sua nescio quae in Mechanicis inventa jactare. Ego nihil animadverto, saltem circa res alicujus momenti, quod attulerit novum. Nec vacat excutere ratiocinia ejus, quae sese obscuritate tuentur. Vereor autem, ne accuratius inspecta erroribus scatere deprehendantur. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 24 Junii 1707.

P. S. Ozanamum et Saurinum nostrum in numerum Academicorum Regiorum Parisiis receptos intelligo, quod perplacet. Ozanamus in Diophantaeis maxime calculis excellit.

CCIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postremas Tuas me absente reseravit uxor mea, et inclusas tradi curavit Cl. Hermanno; ipsas vero ad me scriptas postea mihi misit in thermis Fabariensibus prope confinia Rhaetiae degenti, ex quibus, quae Dei est benignitas, satis vegetus et salvus redii nuperrime. Aquae illae pro potu et balneo usurpantur, ego vero potavi tantum. Hermannus ab itinere suo Patavino nonnihil deflectens earundem aquarum potus gratia ibi me convenit tribus quatuorve diebus ante meum discessum; ipsum vero ante finitum aquarum usum etiam brevi post, iter suum Patavinum versus prosecutum ob literas in thermis receptas quibus urgebatur, intellexi post reditum meum ab ejus Patre, qui mihi monstravit apertas literas suas recentiores ad filium suum jam tum profectum huc directas, adeo ut exhortatio Tua ad iter maturandum fuerit supervacanea; eas tamen Filio suo missurum se Patavinum mihi asseruit Pater, idque Tibi significare velle per literas, quod haud dubie fecit.

Audaciam Hirii theorema de Dentibus Epicycloidalibus vero inventori Romero viventi et sentienti surripientis ego, qui hominis genium novi, plane non miror; miror autem Romeri suum sibi inventum non vindicantis tranquillitatem.

Quod ea quoque Tibi placeant, quae de curvis multigibbis reptorioque motu prioribus meis meditationibus addidi, inprimis

quod probes, quae de consensu ostendi cum Dinostrati Quadratrice, qui tamen nihil est nisi levissimum tantum corollarium universalium meorum theorematum, habeo de quo mihi gratuler, praesertim cum ea digna judices, ut inserantur Miscellaneis vestris Berolinensibus. Non video autem, cur ea in ordinem de novo redigere me jubeas; id quivis amanuensis, cui literas meas excerpendas tradere volueris, praestare poterit, atque melius quam ego, qui jam haec praesentia nec habeo nec habere audeo, medicis interdicentibus mihi mathematicas meditationes ad aliquod tempus.

Diu est quod Hermannus problema de stationibus planetariis a Fatio Duillerio seniore, qui Genevae degit, sibi propositum, etiam mihi proposuerat, cujus non diu post ipsi dedi solutionem, quam agnovit elegantiorem et concinniorem esse sua et Fatiana; scire itaque vellem, an etiam meam cum sua Tibi summiserit, an vero eam reticuerit.

An aliquid in Bernardi Diario literario de novo prodierit de phosphoro meo mercuriali, praeter id quod a Du Talio vidi, plane ignoro; Diarium enim illud ordinarie ad me non pervenit, ideoque rem gratam mihi facies, si paucis indicaveris, quod observationes illae Parisiis institutae contineant.

Ozanamum audio nondum in numerum Academicorum pensionariorum, sed tantum inter subjunctos (élèves) relatum esse, sed aliquem Chevalierium successisse Gallosio. Hisce vale et fave etc.

Basileae a. d. 12 Aug. 1707.

CCIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo Dni. Hermanni res bene procedere, ut tum ipse, tum Dn. Fardella ad me scripsere. Hic certe spem suam aliorumque ab eo superatam testatur. Parabat se tunc ad stationem habendam, aliaque novo officio obeundo necessaria; itaque aliquamdiu a meditationibus divertetur.

Audio Dni. Marchionis Hospitalii librum de Sectionibus Conicis et Constructionibus inde deductis prodiisse. Credo virum egregium hunc laborem non fuisse tractaturum, nisi aliquid singularis

quod diceret habuisset. Videbo an, quod saepe fieri desideravi, non tantum ordinatas parallelas, sed et convergentes pro locis exprimendis adhibuerit. Id enim plurimum ad variandas perficiendasque Constructiones conferre notavi. Nescio an Dn. Marchio Hospitalius protulerit cogitationem ad altiores gradus. Velim nosse, an Tibi aliquando vacaverit examinare, quae de iis Dn. Newtonus dedit. Si regula ejus generalis de Diametris vera est, oportet ut non difficili calculo deprehendi possit. Puto Dni. Reynau Algebram vel Analysin tandem prodiisse. Haec Tibi Gallis viciniori omnia innotescent. Itaque si quid intelligis de rebus literariis ex Gallia, mecum subinde communicari peto. Ex Anglia mihi scribitur primum Tomum observationum Astronomicarum Flamstedi esse sub prelo. Vidi aliquando consilium ejus talia edendi peculiari scheda expressum, quod non exiguam spem fecit augendae hujus Scientiae.

Dn. Scheuchzerus in Alpium descriptione apud vos utiliter est occupatus. Vivitne adhuc Dn. Hollanderus, qui praeclara quaedam excogitaverat, etiam in studiis nostris; pergere posset utiliter, nisi negotiis impediretur.

De Te nobis in dies magis magisque praeclara promitto, ita tamen ut nolim id valetudinis Tuae incommodo fieri; eam spero nunc fore ex sententia.

Ego animi gratia, cum Serenissima Electrice Guelfebytum excurri, et inde Casselas ad Serenissimum Landgravium, qui rerum Mathematicarum et Mechanicarum est curiosissimus, et nunc Zumbachium in Aulam suam accivit (cujus Planetolabium Tibi notum esse puto) ut Mathematicum habeat (postquam Dominus Papinus discessit) et ab eo etiam Algebram discat.

Ante aliquot dies locutus sum cum Missionario ex China reduce, qui Medicum illic utcunque egit. Is mihi inter alia dixit Imperatorem Sinensem etiam Algebrae rudimenta a Patre Verbiestio didicisse, eaque re fuisse imprimis delectatum. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 12 Octobr. 1707.

CCV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex literis Tuis novissimis colligere non licuit, utrum acceperis necne praecedentes meas, quas ad Te scripsi statim post reditum meum ex thermis Fabariensibus; nullam enim earum mentionem facis, quare rogo ut me ea de re certiorem facias. Scripsit etiam mihi nuperrime Dn. Hermannus, qui omnia ex voto sibi procedere dicit; Dni. Abbatis Fardellae, apud quem hospitatur, eruditionem et comitatem satis depraedicare non potest, ut adeo pro magna sibi felicitate reputare possit, tantum in illo Viro reperisse Patronum, praesertim in ea qua nunc ipsi degendum regione, ubi nemo peregrinus incolarum astutiam et insidias facile evitabit, nisi a Viris probis et auctoritatem aliquam habentibus protegatur.

Librum Hospitalii de Sectionibus Conicis ab ejus Vidua mihi dono missum percurri, sed nihil tale, quod a Te desideratur, in eo reperi, praeter ordinatas parallelas, nullas nec convergentes nec alias pro locis exprimendis adhibuit; neque etiam protulit cogitationem ad curvas altiorum graduum, uti Newtonus fecit in sua diatribe de Enumeratione Linearum tertii ordinis, cujus regulam generalem de diametris, elegantem certe si vera est, nondum vacavit examinare; mallem autem ab ipso Newtono demonstrationem videre, vereor enim ne quod pro regula venditat, mera tantum sit conjectura. Caeterum quod attinet librum Hospitalii, eum in decem divisit partes, quarum sex priores agunt de tribus sectionibus tam in genere, quam in specie, ubi affectiones et proprietates plerasque jam cognitas et vulgares algebraice pertractat; quatuor reliquae agunt de Locis geometricis et resolutione aequationum et problematum determinatorum et indeterminatorum. Liber hic maximam partem jam fuerat compositus, antequam Hospitalius quicquam de calculo differentiali novisset, quae causa est, cur ibi haud reperias multa extraordinaria, si pauca quaedam excipias, quae longo post tempore demum adjecit, veluti ex. gr. de sectione angulari, pro qua formulas meas generales in Actis Lips. traditas quamvis sine demonstratione, ille nunc fuse explicat, demonstrat et extendit, sed pro more suo alte silet, quod illas demonstrationes ex literis meis privatis edoctus fuerit. Num Dni. Reynau

Algebra vel Analysis prodierit, plane ignoro; sed alia prodiit, quam habeo, Auctore Guisneo; nihil autem nisi mera trivialia continet. Adeo Gallos vexat scripturiendi cacoëthes, ut parum curent, bonine an mali quid scribant, modo audiant Auctores apud imperitos.

Ex Anglia interim intellexi, Newtonum recentissime in lucem dedisse Algebram aliquam sub titulo Arithmeticae universalis; libellum esse parvi voluminis, sed tanto majoris momenti, ut in illo a Gallis quidem superetur, in hoc vero eosdem immane quantum superet. Ejus libri copiam mihi promissam ut nanciscar, avide expecto.

Scheuchzerus junior, scilicet Frater ejus qui hebdomadariam Alpium descriptionem edit, aliquod etiam opus meditatur pro Graminum in Helvetia nascentium Historia, quorum, ut mihi scribit, jam aliquot centenas species collegit; sperat se Rajamam graminum methodum multis naevis laborantem mirifice emendaturum. Agnoscit autem in physicis saepe sibi aquam haerere, quod in Geometria praesertim sublimiori nostra non satis versatus sit; hanc partim ob causam, partim etiam ut propositum suum de graminum collectione promoveat, proximo ineunte vere ad nostros hosce lares se conferre vult, meo ductu ut sperat ampliorem sibi comparaturus supellectilem in re Geometrica. Ambos Fratres vidi in thermis Fabariensibus; ea qua sunt infatigata curiositate saepe in altissimos montes et rupes non sine vitae periculo ascenderunt, non tantum ut novas plantas et lapides figuratos, quorum magna copia ibi invenitur, exquirerent, sed etiam ut experimenta physica instituerent praesertim circa barometrum, ad experiendum num regula Mariotti pro metiendis altitudinibus montium, prout illa emendata habetur in Memorabilibus Acad. Reg. Scient. jam certa sit et accurata. Hunc in finem sibi fieri curarunt barometrum portatile, quod ubique locorum in manibus commode gestant instar baculi. Semel me curiositas invasit adeundi cum illis scaturiginem thermarum Fabariensium in antro horribili absconditam, ad quam per mille circiter passus semita ducit angustissima juxta praecipitium, in quo rapidissimus torrens vel solo suo stridore terrorem incutit; sed vix unguem latum abfuit, quin vertigine correptus praecipiti casu inconsultae curiositatis poenam dederim.

Nesciveram Papini discessum ex Academia Marburgensi; ergone ad aliam Academiam evocatus fuit? Zumbachius me Ultra-

jecti convenit, cum ibi transirem; tum temporis munus Lectoris, ut vocant, obibat in Academia Leydensi; verum in Astronomicis quidem videbatur versatus, in Geometricis autem et Analyticis parum. Vivit, ut opinor, adhuc Ampl. Hollanderus, Consul Scaphusianus; ex quo alteram etiam partem suae Amaltheae edidit, nihil ab eo vidi, quoniam haud dubie negotiis politicis impeditur, postquam praesertim Spleisius, Rector Scholarum, a quo multum adjutus fuerat, obiit. Vale et fave etc.

Basileae a. d. 19 Novembr. 1707.

CCVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex literis Tuis 19 Novembris anni superioris datis libenter admodum intellexi, Te valere et ab aquarum potu bene valentem domum rediisse. Literas a Te exinde accipere non memini satis.

Liber Newtonianus sub titulo Arithmeticae Universalis, Cantabrigiae hoc ipso anno editus, ex Anglia ad me missus est. Newtoni nomen nuspiam memoratur. Credo quod ipse ex sua dignitate non putavit profiteri se autorem libri ante triginta annos conscripti, cum praelectiones publicas Cantabrigiae haberet, ex quibus est concinnatus, quanquam imperfectum ipse editor profiteatur. Percurri festina lectione et quaedam deprehendi non spernenda, praesertim in exemplis. Unum placuit, quod pro Te exscribi jussi, ut si vacat consideres et examines: etsi enim non magnopere ad praxin facere videatur, videtur tamen speculationis causa dignum consideratu, praesertim si processus in infinitum haberetur, pro divisore gradus cujuscunque.

Quae Dn. Hermannus mihi summisit de statione Planetarum, Berolini sunt, ibique edentur; non puto Tuam solutionem esse adjectam, sed nec Fatianam . . . .

. . . .

Gaudeo Dn. Scheuchzerum Juniorem apud Te Geometriam altiorem cum Physica conjungere velle: ea sane verissima proficiendi ratio est.

Laudandos puto Botanicorum conatus in digerendis speciebus,

et Methodos quibus Rajus, Tournefortius, aliique utuntur, petitas ex florum figura, utilem tyronibus puto, sed tamen ad perfectionem Scientiae non suffecturam judico. Et e re arbitror ex diversis capitibus diversas institui plantarum comparationes, veluti a seminibus, radicibus, truncis vel scapis, corticibus, ramis, foliis, floribus, medullis, succis, viribus seu usibus, ratione propagandi etc. quovis capite ita tractato, tanquam ex hoc solo instituenda esset plantarum in species digestio, etsi unum caput alio sit aptius. Video enim dum nimis uni considerationi inhaeretur, exsuccam reddi doctrinam, nec satis ad usum Agriculturae, Mechanices et Medecinae adaptari. Pene me ipsum in vertiginem dedisti, narrato itinere tuo pedestri usque adeo periculoso.

Clarissimus Papinus discedens Cassellis Angliam se iri dictitabat; sed credo eum adhuc haerere in Batavis; sane ex quo Cassellis discessit, nihil ab ipso vidi. Zumbachius Cassellas accessit, et credo Observationibus Astronomicis dabit operam. An Marpurgensibus datus sit novus Professor Mathematicus, nondum scio. Quis ille est Gallus F. C. D. Abb. Vall. qui calculum nostrum attentat subinde, et quaedam Martio et Novembr. Anni superioris Actis Lipsiensibus *) inseri curavit?

Excerpta ex Tuis elegantissimis Epistolis binis de Curvis illis multigibbis Berolinum misi, ut Miscellaneis Societatis inserantur. Ad rigorem tamen demonstrationis opus esset ostendere circuli circumscripti circumferentiam debere esse majorem semper circumferentia curvae multigibbae, quam tangit; quoniam enim haec curva non est ad easdem ubique partes cava, non habet locum Archimedis postulatum, quod linea circumscripta sit major inscripta. Si de area, non de circumferentia ageretur, demonstratione hujusmodi opus non foret; vel si saltem ostendi posset hoc loco circumferentiae minoritatem ipsius areae esse connexam.

Scripserat ad me ante menses complures Clarissimus Turretinus; ei respondi, sed non satis memini an ad Te incluserim responsum. Communicaverat mecum, quae apud Potentissimum Regem Borussorum Academia Genevensis egerat in Religionis causa: laudanda utique, sed nisi magis in rem veniatur, parum profutura. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 15 Martii 1708.

---

*) Act. Erudit. 1708. p. 133. 517. 536.

P. S. Quo sit loco valetudo Tua, et quid bono Scientiarum altiorum moliare, semper discere gratum erit.

CCVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Metuebam sane vehementer Te vel morbo vel morte impediri, quominus mihi responderes, cum longo adeo tempore ne γρὺ quidem literarum abs Te accepissem. Quod autem vivas et valeas, ex Tuis tandem novissimis libenter intellexi. Meam quod attinet valetudinem sperabam firmo nunc niti talo, post usum aquarum Fabariensium, praesertim peracta maxima hyemis parte satis feliciter: ecce me tamen nunc rursus, a quatuor fere mensibus, de novo vexatum ab horribili illa et pertinacissima tussi, quae per totam praecedentem hyemem miserandum in modum me cruciaverat: aufert illa mihi somnum, quo tamen alias, ut nosti, tam modice fruor; appetitum prosternit, et saepissime pauxillum, quod edi, per vomitum reddere cogit; ubi enim saevire incipit carnifex mea, certe nulla non corporis pars inde concutitur. Nondum equidem video finem plagarum mearum, sed tamen, quod nonnihil solatioli affert, non augentur ex quo utor succo plantarum aliquarum Majalium; quid de meliori successu sperandum, id tempus docebit.

Arithmeticam Universalem Newtoni ne nunc quidem accepi; qui tamen liber jam fere ultra sesquiannum Amstelodami haeret, mihi destinatus. Quod pro me exscribi jussisti, ea, qua licuit in hoc valetudinis statu, attentione perlegi, ubi non tantum statim fundamentum detexi inventi Newtoniani pro dividendis aequationibus per alias simpliciores, sed etiam regulam quam habet pro inveniendа aequatione duarum dimensionum, quae propositam dividat, reddidi simpliciorem, intelligibiliorem et ad praxin magis accommodatam. Interim facile vidi posse haberi processum in infinitum pro divisore gradus cujuscunque, si quis vellet inceptum attente prosequi. Nec mea me fefellit opinio; Agnatus enim meus *),

*) Nicolaus Bernoulli (geb. 1687, gest. 1759). Die Abhandlung desselben, die hier erwähnt wird, folgt als Beilage zu diesem Schreiben.

Senatoris Fratris mei secundi filius, juvenis vix 20 annorum, cui id curae commiseram, mox omnia felicissime executus est, uti ex hoc scripto, quod eum in finem ipse concinnavit, plenius videbis. Imo non tantum processus ostenditur in infinitum, sed ipsa traditur regula generalis pro invenienda aequatione dividente cujuscunque gradus. Forte non indignum judicabis hoc Schediasma, quod Actis Vestris Berolinensibus inseratur: quibus si et solutionem meam de Statione Planetarum insertam cuperes, eam ab ipso Hermanno petere deberes, utpote cui eam tradidi, nullo mihi relicto apographo.

Nicolaus Fatius Londini tam contumeliose habitus etiam meam excitavit commiserationem, sed et simul confirmavit, quod de eo jam olim, cum Te et me in Actis Lips. tam inepte et insulse attentaret, suspicabar et Tibi, ni fallor, tum statim perscribebam, scilicet eum hellebero potius quam refutatione, quo cerebrum purgaret, opus habere.

Scheuchzerus junior, Basileam adire volens, mutavit sententiam, ex quo ipsi spes facta est vocationis alicujus in Academiam Patavinam. Ad alterum Scheuchzerum curavi literas, quas ad me direxisse; eum eas accepisse intellexi.

Quis ille sit Gallus F. C. D. Abb. Vall. qui in Actis Lips. comparuit, Calculum differentialem attentans, nondum exploravi; fortassis Varignonius, quem interrogavi, noverit hominem, et mihi in responsione quam in dies expecto, nominabit.

Epistolas meas binas, de curvis multigibbis tractantes, dignas Tibi visas fuisse, ex quibus excerpta ad Acta Berolinensia mitteres, gratum fuit intelligere; ubi merito quidem mones ad rigorem demonstrationis opus esse ostendere, circuli circumscripti circumferentiam debere esse majorem semper circumferentia curvae multigibbae quam tangit. Si quis enim esset in ea opinione, in qua Tu esse videris, curvam multigibbam non esse ad easdem ubique partes cavam, summo certe jure dubitare posset, an hic locum haberet Archimedis postulatum quod linea circumscripta sit major inscripta. Sed satis mirari non possum (ignosce libere loquenti) Te putantem curvas multigibbas non esse ad easdem ubique partes cavas, quasi gibbositates in curvis adesse non possent citra flexus contrarios, cum tamen ex ipsa statim reptorii motus natura tam evidenter pateat, curvam ex illo motu genitam vel descriptam semper eodem modo cavam esse debere, quo cava est

curva immobilis, hoc est curva illa quae obrepitur. Sit enim (fig. 171) curva immobilis ABC, quam obrepat sive super qua moveatur motu parallelo curva DBG, in cujus plano punctum quodvis datum O describat curvam reptoriam POQ, dico hanc ad eandem ubique partem cavam esse, si ABC et DBG utraque ad eandem ubique partem cavae sint. Si enim in quocunque reptoriae puncto O fingatur tangens OM, erit haec, ut in Actis Lips. ostendi, semper parallela tangenti BE, quae ducitur ex puncto B, in quo duae curvae ABC, DBG, quando punctum describens est in O, se mutuo contingunt: qualis igitur est directio curvitatis in B, talis etiam esse debet in O, et sic ubique, ita ut si nulla sit flexura nec in ABC, nec in DBG, etiam necessario nulla esse queat in POQ: hinc manifestius est, quam ut moneri opus sit, curvas meas multigibbas, utpote ex motu repente ellipseos vel ellipsiformis super alia ellipsi vel ellipsiformi, hoc est curvae ad eandem partem cavae super alia ad eandem partem cava, genitas, nusquam habere posse flexus in contrarium, id est ad easdem ubique partes cavas fore; adeoque Circulorum ipsis circumscriptorum circumferentias, secundum postulatum Archimedeum, iisdem multigibbis necessario majores esse. Q. E. D.

Si Marpurgensibus nullus adhuc novus Professor Mathematicus loco Papini, possum commendare Moyvraeum in Anglia degentem, ex cujus literis nuper acceptis intellexi, ob rei angustiam tenuiter admodum ipsum victitare, idque non nisi ex privatis institutionibus, quamobrem me perquam instanter rogavit, ut sibi quaeram aliquam stationem publicam, ut nonnihil commodius vivere queat, et unde habeat aliquid fixi salarii, ne, quod imprimis metuendum, morbo aliove casu impeditus sustentatione sua privetur et ad summam miseriam redigatur; promisi me Tibi ipsum commendaturum, spemque animumque addidi, rem optato successu non cituram. Te enim jam aliquoties et nuper admodum in vocatione Hermanni ostendisse, quantum Academiae Tuae commendationi deferant. Habeas ergo, quod rogo, commendatum Virum, et ingenio et industria pollentem, atque de quo spondere ausim beneficium quovis modo agniturum: opus misericordiae si unquam, certe nunc efficies. Interim vale et fave etc.

Basileae a. d. 16 Maii 1708.

P. S. Pater meus carissimus ante duos circiter menses animam suam placide expiravit et Deo reddidit, annum 85um agens.

P. S. Literis jam scriptis offeruntur mihi literae a Cl. Varignonio, in quibus sequentia reperio: „Personne ne peut deviner icy quel est ce françois marqué par F. C. D. Abb. Vall. si ce n'est Mr. Rolle qui se cache quelquefois ainsi, comme il a déja fait sous le nom de Remi Lochel autrefois; il est si battu de l'oyseau en ce pays-cy, que depuis la perte qu'il a faite de Mr. l'Abbé Galoys, son apuy, il n'y ose plus rien dire contre le calcul infinitesimal; mais comme j'apprens qu'il ne laisse pas de le décrier encore sourdement par le monde, il pourroit bien s'être ainsi caché pour le faire impunement en public etc.

Un nommé Mr. De Montmort qui Vous a autrefois écrit à Groningue sous le nom de Remond, Chanoine de notre Dame de Paris, fait actuellement imprimer un livre sur les jeux de hazard.“ etc.

Beilage.*)

Regula Generalis Inveniendi Aequationes, per quas alia quaepiam data, modo reducibilis sit, dividi potest.

Auge et minue radices aequationis propositae successive tot ad minimum terminis hujus progressionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5 etc. quot sunt unitates in dimidio numeri dimensionum aequationis, per quam propositam dividi posse existimas, unitate aucto. Aequationum inde resultantium ultimos terminos (quibus solis hic opus est, et qui, licet tota operatio non instituatur, statim inveniuntur, si pro litera, quae in aequatione habetur, substituatur vel 1, 2, 3, 4 etc. si radices minuendae, vel —1, —2, —3, —4 etc. si radices augendae sunt) una cum ultimo termino aequationis propositae sibi invicem subscribe, ita ut in medio statuatur ultimus terminus datae, supra illum ultimi termini aequationum, in quibus radices sunt minutae, et infra, in quibus auctae: quo facto hisce ultimis terminis ad latus adjunge singulos ipsorum divisores; in his, si aequatio data reducibilis est, debent necessario aliqui inveniri, qui ita progrediuntur, ut vel ipsorum differentiae, vel differentiarum differentiae bi-

*) Wir geben hier die folgende Abhandlung in ihrer ursprünglichen Fassung, so wie sie Leibniz zugesandt wurde. Umgearbeitet und weiter ausgeführt findet sie sich im Commerc. epist. Leib. et Joh. Bernoul. vol. II. p. 189 sqq.

fariam divisae, vel harum differentiae per 3 divisae, vel iterum harum per 4 divisae, et ita porro, sint aequales. Quod si igitur post aliquot differentiationes perveneris ad differeutias et inter se et uni ex partibus aliquotis coëfficientis primi termini aequationis datae aequales, erit ultima haec differeutia coëfficiens primi termini aequationis tentandae, per quam divisio eo certius succedet, quo plures aequatio haec habuerit dimensiones; tot autem habebit, quot differentiationes peractae fuerint; medius autem terminus ex serie divisorum, quibus usus es, dabit ultimum terminum aequationis quaesitae, reliquorum terminorum coëfficientes facile inveniuntur ex hac regula: In qualibet serie differentiarum medius terminus aut, si duo sint medii, primus ex illis est summa omnium possibilium valorum, qui hac expressione continentur

$$\frac{m^n}{1.2.3.4\ldots M} - \frac{\overline{m-1}|^n}{1\times1.2.3\ldots M-1} + \frac{\overline{m-2}|^n}{1.2\times1.2.3\ldots M-2} - \frac{\overline{m-3}|^n}{1.2.3\times1.2.3\ldots M-3} + \ldots \pm \frac{\overline{m-M}|^n}{1.2.3.4\ldots M} \times N$$

ubi M denotat numerum differentiarum, m dimidium ipsius M, aut si M sit numerus impar, m est $=\frac{M+1}{2}$; N est cujuslibet termini coëfficiens, n autem numerus dimensionum ejusdem termini.

Nota. Inventio aequationis parium dimensionum, ut quadratae, biquadraticae, quadratocubicae etc. facilior evadit, si divisores illi ultimorum terminorum minuantur divisore aliquo coëfficientis primi termini aequationis datae multiplicato per quadratum, quadratoquadratum, quadratocubum etc. illius quantitatis, qua radices propositae aequationis minutae fuerunt vel auctae, et in caeteris operatio peragatur, ac si aequatio 1, 3, 5 etc. dimensionum invenienda esset; tunc enim quantitas illa, qua divisores minuti sunt, dabit coëfficientem primi termini, et aequatio inventa reliquos terminos aequationis quaesitae.

Exempla.

Proponatur reducenda haec aequatio: $3x^3-4xx-6x+15=0$; minue et auge radices hujus aequationis unitate, sive pone pro x, 1 et — 1, numerosque qui inde pro ultimis terminis proveniunt 8 et 14 una cum ultimo aequationis nostrae termino 15, et singulos horum divisores sibi invicem subscribe hoc modo:

8	1.2.4. 8.—1.—2.—4.— 8
15	1.3.5.15.—1.—3.—5.—15
14	1.2.7.14.—1.—2.—7.—14

quia igitur aequatio, si reducibilis est, necessario dividi potest per aliam unius dimensionis, ideoque differentiae statim primae debent esse aequales, et quidem uni ex divisoribus coëfficientis primi termini h. e. vel unitati vel ternario, illos tantum ex divisoribus excerpe, qui constituunt progressionem Arithmeticam, cujus differentia est vel 1 vel 3: tales progressiones tres invenies, scilicet 4, 4 et 8, unde

4	4	8
1	3	5
—2	2	2

exsurgunt tres aequationes tentandae $3x+1=0$, $x+3=0$ et $3x+5=0$, per quarum ultimam divisio succedit prodeunte $xx-3x+3=0$. Hic notandum, quod, si radices propositae aequationis $3x^3-4xx-6x+15=0$ binario insuper minutae et auctae fuissent, pro ultimis terminis et eorundem divisoribus provenissent, inter quos unica haec occurit progressio Arithmetica 11. 8. 5. 2. —1, adeoque examine per inutiles illos divisores $3x+1=0$, $x+3=0$ supersedere potuissem.

11	1.11.— 1.—11
8	1. 2. 4. 8.— 1.—2.—4.—8
15	1. 3. 5. 15.— 1.—3.—5.—15
14	1. 2. 7. 14.— 1.—2.—7.—14
—13	1. 13.— 1.—13.

Sed et alter aequationis nostrae divisor $xx-3x+3=0$ sic inveniri potest, dispiciendo scilicet an in divisoribus his 1.11 —1.—11 et 1.2.4 etc. aliqui sint, quorum differentiae secundae per 2 divisae sint aequales uni ex divisoribus coëfficientis primi termini datae aequationis. Rem igitur tento et primo quidem per 1, 1, 1 etc. ubi ab initio statim video, hos divisores non succedere, quia differentia secunda est 0. Transeo igitur ad 1, 1, 3, in his differentia secunda bifariam divisa est 1; his divisoribus quia succedunt, adjungo 1 primum ex quarta serie divisorum, sed res non succedit, nec per 1, 1, 3, 2, prodeuntibus pro differentiis secundis 2 et — 4, hic 2 et — 3. Tento igitur per 1, 1, 3, 7, et quia res succedit, adjungo illis primum divisorem ex quinta serie, scilicet 1; sed hic iterum non succedit. Quocirca transeo ad secundum et tento per 1, 1, 3, 7, 13, quod succedit; differentiae enim secundae bifariam divisae sunt 1, 1, 1; divisores igitur hos inventos una cum ipsorum differentiis primis et secundis seorsim scribo in hunc modum:

	differ. 1	*differ. 2 per 2 divisae*
1		
	0	
1		1
	—2	
3		1
	—4	
7		1
	—6	
13		

In his medius inter divisores, scilicet 3, dabit ultimum terminum, differentia ultima 1 coëfficientem primi termini aequationis quaesitae; coëfficiens secundi termini ex serie primarum differentiarum sic elicitur: Quia ponendo $M = 1$, m etiam fit $= 1$, et praedicta series $\frac{m^n}{1.2.4...M}$ etc. $\times N = N$, N autem denotat cujusvis termini coëfficientem, sequitur medium terminum aut potius primum ex duobus mediis in prima serie differentiarum semper esse summam omnium coëfficientium, adeoque in nostro exemplo — 2 esse summam coëfficientium primi et secundi termini, unde subtrahendo 1 coëfficientem primi termini provenit — 3 pro coëfficiente secundi termini; aequatio igitur tentanda erit $xx - 3x + 3 = 0$, per quam etiam divisio succedit, uti jam supra visum est. Citius haec aequatio quadrata inventa fuisset, si divisores praedicti 1.11.—1.—11 etc. minuti fuissent divisore aliquo coëfficientis primi termini aequationis datae $3x^3 - 4xx - 6x + 15 = 0$ ex. gr. 1 multipl. per quadr. unitatis et binarii; hinc loco divisorum provenissent, ubi

— 3.7.—5.—15	
0.1.3. 7.— 2.—3.—5.— 9	
1.3.5. 15.— 1.—3.—5.—15	
0.1.6. 13.— 2.—3.—8.—15	
— 3.9.—5.—17	

initio statim haec se prodit progressio —3.0.3.6.9, cujus differentia — 3 dat coëfficientem secundi termini (alias primi termini in aequatione simplice) et medius ex divisoribus, scilicet 3, ultimum terminum aequationis quadratae quaesitae, unde sumendo numerum illum, quo divisores minuti fuerunt, pro coëfficiente primi termini, habebimus aequationem completam $xx - 3x + 3 = 0$.

Exemplum Aequationis Cubicae.

Oportet invenire an et per quam aequationem cubicam sit divisibilis haec aequatio: $2x^7 + 2x^6 - 16x^5 - 13x^4 + 41x^3 + 22xx - 32x - 9 = 0$. Auctis et minutis radicibus unitate et binario proveniunt pro ultimis terminis eorumque divisoribus, inter hos quaero, an aliqui existant, quorum differentiae tertiae per 3 divisae sint aequales uni ex divisoribus coëfficientis primi ter-

7	1.7. —1.—7
—3	1.3. —1.—3
—9	1.3.9.—1.—3.—9
7	1.7. —1.—7
9	1.3.9.—1.—3.—9

mini aequationis datae h. e. vel unitati vel binario. Rem igitur tento et primo quidem per 1, 1, 1 etc. 1, 1, 1, 7 etc. 1, 1, 1, —1 etc. 1, 1, 1, —7 etc. 1, 1, 3, 1 etc. 1, 1, 3, 7 etc. donec pervenio ad hanc seriem divisorum 7. —3. —1. 1. —9, per quos res succedit. Reliquos omnes negligo, quia ipsorum differentiae tertiae vel 0, vel numeri negativi, vel non divisibiles per 3, vel postquam divisae sunt per 3, nec unitati nec binario aequales sunt. Inventos igitur divisores cum suis differentiis primis, secundis, tertiis seorsim scribo, ex quibus aequationem quaesitam, quam interim pono esse $px^3+qxx+rx+s=0$, sic invenio: Differentia ultima 2 est $=p$ coëfficienti primi termini, medius inter divisores —1 est $=s$ ultimo termino, medius terminus inter differentias secundas h. e.

	differ. 1	differ. 2 per 2 div.	differ. 3 per 3 div.
7			
	10		
—3		6	
	—2		2
—1		0	
	—2		2
1		6	
	10		
—9			

0 est = omnibus valoribus hujus quantitatis $\frac{m^n}{1.2.3.4\ldots M} - \frac{\overline{m-1}^n}{1\times1.2.3.4\ldots M-1}$ etc. $\times N =$ (ponendo $M=2$ et $m=1$) $\frac{1}{1.2} - 0 + \frac{\overline{-1}^n}{1.2}\times N$; unde porro positis pro N successive p, q, r et pro n, 3, 2, 1, summa horum valorum evadit $\overline{\frac{1}{1.2}-0-\frac{1}{1.2}}\times p + \overline{\frac{1}{1.2}-0+\frac{1}{1.2}}\times q + \overline{\frac{1}{1.2}-0-\frac{1}{1.2}}\times r = 0p+q+0r=$ $q=$ coëfficienti secundi termini, qui proinde in nostra aequatione, quia ejus coëfficiens est $=0$, deficit; in prima serie differentiarum primus terminus ex duobus mediis dat pro summa omnium coëfficientium —2; hinc subtrahendo 2 coëfficientem primi termini relinquitur —4 pro coëfficiente tertii termini, quare aequatio quaesita erit $2x^3-4x-1=0$, per quam aequatio $2x^7+2x^6$ etc. divisa dabit pro quotiente $x^4+x^3-6xx-4x+9=0$.

Exemplum aequationis biquadraticae.

Proponatur iterum haec aequatio: $2x^7+2x^6-16x^5-13x^4+41x^3+22xx-32x-9=0$ divisibilis per aliam 4 dimensionum,

quam oportet invenire. Auctis et minutis radicibus aequationis datae unitate et binario, divisores ultimorum terminorum provenientes minuantur divisore aliquo coëfficientis primi termini ex. gr. 1 multipl. per quadratoquadratum unitatis et binarii, numerique resultantes una cum divisoribus ultimi termini aequationis propositae sibi invicem subscribantur, et habebitur talis numerorum series, inter quos ab initio fere
$-15. -9. -17. -23$
hi inveniuntur $-15. 0. 9. 6.$ $0. 2. -2. -4$
-15, quorum differentiae $1. 3. 9. -1. -3. -9$
primae sunt $-15. -9. 3.$ $0. 6. -2. -8$
21, differentiae secundae per $-15. -13. -7. -17. -19. -25$
2 divisae $-3. -6. -9$, et differentiae tertiae per 3 divisae 1. 1, quae quia sunt aequales, sumo 1, h. e. divisorem illum primi termini aequationis datae, quo singuli ultimorum terminorum divisores minuti sunt, pro coëfficiente primi termini aequationis tentandae, differentiam ultimam, quae hic etiam est 1 et alias esset coëfficiens primi termini aequationis cubicae, pro coëfficiente secundi termini, medium inter divisores, qui est novenarius, pro ultimo termino, medium inter differentias secundas h. e. -6 pro coëfficiente tertii (in aequatione cubica secundi) termini, et medium terminum vel primum ex duobus mediis inter primas differentias h. e. -9 pro summa coëfficientium omnium terminorum excepto primo; hinc subtrahendo -5 summam coëfficientium secundi et tertii termini, relinquitur -4 pro coëfficiente quarti termini, ut adeo pro divisore quaesito habeamus $x^4 + x^3 - 6xx - 4x + 9 = 0$, per quam aequationem divisio succedit, prodeunte $2x^2 - 4x - 1 = 0$.

Demonstratio hujus Regulae.

Sit haec aequatio data: $P + Qx + Rxx + Sx^3 + Tx^4 + Vx^5 + Wx^6$ etc. $= 0$, quae sit divisibilis per aliam, quam pono esse hanc $p + qx + rxx + sx^3 + tx^4 + ux^5$ etc. $= 0$; augeantur et minuantur utriusque aequationis radices successive unitate, binario, ternario etc. resultantiumque aequationum ut et propositarum ultimi termini sibi invicem subscribantur hoc modo:

$P + 3Q + 9R + 27S + 81T + 243V + 729W$	$p + 3q + 9r + 27s + 81t + 243u$
$P + 2Q + 4R + 8S + 16T + 32V + 64W$	$p + 2q + 4r + 8s + 16t + 32u$
$P + Q + R + S + T + V + W$	$p + q + r + s + t + u$
P	p
$P - Q + R - S + T - V + W$	$p - q + r - s + t - u$
$P - 2Q + 4R - 8S + 16T - 32V + 64W$	$p - 2q + 4r - 8s + 16t - 32u$
$P - 3Q + 9R - 27S + 81T - 243V + 729W$	$p - 3q + 9r - 27s + 81t - 243u$

Quia igitur $P + Qx + Rxx$ etc. ponitur esse divisibilis per $p + qx + rxx$ etc. oportet p esse partem aliquotam ipsius P, et $p + q + r + s + t + u$ partem aliquotam ipsius $P + Q + R + S + T + V + W$, et $p - q + r - s + t - u$ partem aliquotam ipsius $P - Q + R - S + T - V + W$, et $p - 2q + 4r - 8s + 16t - 32u$ partem aliquotam ipsius $P - 2Q + 4R - 8S + 16T - 32V + 64W$ etc. quia, quando radices datae et quaesitae aequationis utrobique eadem quantitate minuuntur vel augentur, aequatio ex illa resultans adhuc divisibilis est per aequationem, quae ex hac resurgit, adeoque ultimus terminus hujus dividet ultimum terminum illius aequationis; oportet enim $p + qx + rxx$ etc. esse partem aliquotam ipsius $P + Qx + Rxx$ etc. quicunque demum valor pro x substituatur, sive $1 . 2 . 3$ etc. sive 0, sive $-1 . -2 . -3$ etc. unde patet inter divisores ultimorum terminorum semper debere esse aliquos, scilicet hos $p + 3q + 9r$ etc. $p + 2q + 4r$ etc. $p + q + r$ etc. etc. qui ita progrediuntur, ut supra dictum est, quemadmodum videre est ex hac tabella:

	differentiae primae	diff. 2ae per 2 div.
$p+3q+9r+27s+81t+243u$		
	$q+5r+19s+65t+211u$	
$p+2q+4r+8s+16t+32u$		$r+6s+25t+90u$
	$q+3r+7s+15t+31u$	
$p+q+r+s+t+u$		$r+3s+7t+15u$
	$q+r+s+t+u$	
p		$r+0s+t+0u$
	$q-r+s-t+u$	
$p-q+r-s+t-u$		$r-3s+7t-15u$
	$q-3r+7s-15t-31u$	
$p-2q+4r-8s+16t-32u$		$r-6s+25t-90u$
	$q-5r+19s-65t-211u$	
$p-3q+9r-27s+81t-243u$		

diff. 3ae per 3 divisae	diff. 4ae per 4 divisse	diff. 5ae per 5 divisae
$s+6t+25u$		
	$t+5u$	
$s+2t+5u$		u
	$t+0u$	
$s-2t+5u$		u
	$t-5u$	
$s-6t+25u$		

Quod autem in qualibet serie differentiarum medius terminus aut primus ex duobus mediis sit summa omnium possibilium valorum, qui hac expressione continentur $\frac{m^n}{1 . 2 . 3 \ldots M}$ etc. $\times N$ sic patet: Finge radices aequationis minui successive his quantitatibus a, b, c, d, e, f, g etc. quae denotent numeros progressionis Arithmeticae

se invicem unitate excedentes, ita quidem ut medius terminus ex. gr. d sit = 0 et ultimus g = primo termino, sed signo — affecto h. e. = — a, radicibus igitur ita minutis ultimi termini aequationum resultantium erunt

$p+aq+aar+a^3s+a^4t+a^5u$ etc. =	posito nempe N pro p,	$S\,a^n \times N$
$p+bq+bbr+b^3s+b^4t+b^5u$ etc. =	q, r, s, t, u etc. h. e.	$S\,b^n \times N$
$p+cq+ccr+c^3s+c^4t+c^5u$ etc. =	pro cujusvis termini	$S\,c^n \times N$
$p+dq+ddr+d^3s+d^4t+d^5u$ etc. =	aequationis inveniendae	$S\,d^n \times N$
$p+eq+eer+e^3s+e^4t+e^5u$ etc. =	coëfficiente, et n pro	$S\,e^n \times N$
$p+fq+ffr+f^3s+f^4t+f^5u$ etc. =	numero dimensionum	$S\,f^n \times N$
$p+gq+ggr+g^3s+g^4t+g^5u$ etc. =	ejusdem termini	$S\,g^n \times N$

quorum differentiae primae, secundae, tertiae, quartae etc. sunt

differ. 1mae

$S\,a^n - b^n \times N$

$S\,b^n - c^n \times N$

$S\,c^n - d^n \times N$

$S\,d^n - e^n \times N$

$S\,e^n - f^n \times N$

$S\,f^n - g^n \times N$

diff. 2dae per 2 div.

$$S\frac{a^n-2b^n+c^n}{2}\times N$$

$$S\frac{b^n-2c^n+d^n}{2}\times N$$

$$S\frac{c^n-2d^n+e^n}{2}\times N$$

$$S\frac{d^n-2e^n+f^n}{2}\times N$$

$$S\frac{e^n-2f^n+g^n}{2}\times N$$

diff. 3ae per 3 div.

$$S\frac{a^n-3b^n+3c^n-d^n}{2.3}\times N$$

$$S\frac{b^n-3c^n+3d^n-e^n}{2.3}\times N$$

$$S\frac{c^n-3d^n+3e^n-f^n}{2.3}\times N$$

$$S\frac{d^n-3e^n+3f^n-g^n}{2.3}\times N$$

diff. 4tae per 4 div.

$$S\frac{a^n-4b^n+6c^n-4d^n+e^n}{2.3.4}\times N$$

$$S\frac{b^n-4c^n+6d^n-4e^n+f^n}{2.3.4}\times N$$

$$S\frac{c^n-4d^n+6e^n-4f^n+g^n}{2.3.4}\times N$$

diff. 5tae per 5 div.

$$S\frac{a^n-5b^n+10c^n-10d^n+5e^n-f^n}{2.3.4.5}\times N$$

$$S\frac{b^n-5c^n+10d^n-10e^n+5f^n-g^n}{2.3.4.5}\times N$$

diff. 6tae per 6 divisae

$$S\frac{a^n-6b^n+15c^n-20d^n+15e^n-6f^n+g^n}{2.3.4.5.6}\times N$$

In his medii termini aut primi ex duobus mediis sunt: $S\,\overline{c^n - d^n} \times N$, $S\,\frac{c^n - 2d^n + e^n}{2} \times N$, $S\,\frac{b - 3^n c^n + 3d^n - e^n}{2.3} \times N$, $S\,\frac{b^n - 4c^n + 6d^n - 4e^n + f^n}{2.3.4} \times N$ etc. et generaliter positis M pro numero differentiarum, m pro $\frac{1}{2}$M (vel pro $\frac{M+1}{2}$, si M sit numerus impar) h. e. quia $d = 0$, pro c, b, a etc. $= 1, 2, 3$ etc. medius terminus in serie differentiarum, cujus numerus est M, est

$$= S\,m^n - \frac{M}{1}\,\overline{m-1}|^n + \frac{M.\overline{M-1}}{1.2}\,\overline{m-2}|^n - \frac{M.\overline{M-1}.\overline{M-2}}{1.2.3}\,\overline{m-3}|^n$$

+ etc. × N divis. per 1.2.3....M h. e. si divisio reipsa instituatur

$$= S\,\frac{m^n}{1.2.3\ldots M} - \frac{\overline{m-1}|^n}{1 \times 1.2.3\ldots \overline{M-1}} + \frac{\overline{m-2}|^n}{1.2 \times 1.2.3\ldots \overline{M-2}}$$

$$- \frac{\overline{m-3}|^n}{1.2.3 \times 1.2.3\ldots \overline{M-3}} + \ldots \pm \frac{\overline{m-M}|^n}{1.2.3.4\ldots M} \times N. \quad \text{Q. E. D.}$$

CCVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non raro evenit, ut mihi differenda sint literarum commercia, dum valde distineor laboribus plurimum inter se diversis. Resumo tamen, ubi primum licet, et Tecum inter primos. Sed nec plane hac hyeme adversa valetudo abfuit, magis quidem molesta quam periculosa; etsi enim appetitus imminutus esset, alia tamen mala aderant. Tuam vero vicem valde doleo, cui somnus inprimis necessarius molesta tussi interrumpitur. Sanguinis acrimoniae hoc plerique imputabunt, sed fieri tamen etiam potest, ut sit aliquid in partibus, quas solidas vocamus (etsi sint molles admodum, ut pulmones) quod facile irritetur. Novi, quibus tussis a juventa in senectam duravit, sed quantum memini, somno fruebantur. Acrimoniam partim obtundentibus infringere, partim diluentibus auferre licet, et posterius tutius arbitror.

Mirifice placet specimen Tui ex Fratre Nepotis, et curabo omnino, ut Berolinensibus Miscellaneis inseratur. Tuam solutionem stationis planetariae a Dno. Hermanno obtinebo. Quia ingeniosum

et felicem juvenem esse video, aliud excerptum ex Newtono Tibi mitto, quo si videatur exercere ingenium utiliter poterit. Modus est investigandi numerum radicum impossibilum ex mutatione signorum qui licet non sit universalis, videtur tamen aliquid habere in recessu, et perfici posse. Mihi, ut facile judicas, talibus hodie vacare non licet, sed nec Tibi suaserim, ut hujusmodi rebus animum valde intendas.

Mihi non fit verisimile Rollium latere sub literis F. D. C. Alb. Vall. quia ille, ut intelligo, constanter alienus est a Calculo nostro; at vero hic de eo non inique judicat; an vero recte usus sit, examinare non vacavit.

Cum Rollio olim in Calculo nostro sugillando conspirabat P. Gonyé, Jesuita Claramontanus, qui etiam effecerat, ut in Memoriis Trevultianis quaedam mordacia, sed revera inepta insererentur. Isti homines non intelligunt, nos in Geometria aut Analysi nostra minime habere opus controversiis metaphysicis de compositione continui, cum sufficiant indefinite parva, id est tam parva ut error fiat minor dato; vel quod eodem redit, observari regulam continuitatis a me aliquando in Novellis literariis Baylii propositam, quae jubet, ut casus specialis rei evanescentis contineatur sub regula generali, quod axioma etiam in Physicis utile esse ostendi.

Non memini aliquid audire de Montmortio, qui de ludis fortunae librum parat. Vellem hoc argumentum bene tractaretur. Sed et Domini Fratris Tui, piae memoriae, meditationis de talibus vellem non perire. Credo enim aliquid in illis fore non spernendum. Et omnino optarem selecta ex ipso aliquando in lucem proferri. Utilitati enim publicae consuli omnibus modus velim.

Dantur haud dubie curvae multigibbae sine flexu contrario, et tales esse Tuas re considerata patet, sed quia alias saepe inter gibborum convexitates intercedere solet, ideo ad integritatem demonstrationis hoc ipsum utiliter admonebitur esse cavas ad easdem partes, provocando ad constructionem; alioqui lectori prima fronte suspecta videri potest demonstratio.

Amicus quidam mihi dixit: Te in eo esse, ut ad Belgas redeas, Lugdunique sperari. Gaudebo Te nobis propinquiorem reddi; gaudebunt alii quoque amici. Vale etc.

Dabam Brunswigae 27 Junii 1708.

CCIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex thermis redux nunc tandem ad novissimas Tuas respondeo. Valetudinem Tuam praeterita hyeme nonnihil vacillasse, aegre intellexi; solamen tamen est quod periculum abfuerit, id quod spem facit plenae restitutionis hac aestate factae. Thermarum usus mutandi aëris causa potissimum adhibitus profuit aliquid et molestam meam tussim leniit quidem, sed non abstulit, ita ut verear, ne ingruente hyeme de novo exasperetur. Tecum prorsus sentio sanguinem meum inprimis acrimonia peccare; hinc diaetam maxime eo dirigo, ut ea paulatim infringatur et diluatur, dum interim ab acidis et salsis abstineo; video enim symtomata haec mea provenire a scorbuto pertinaci in Batavis contracto, quandoquidem olim ab istiusmodi malis prorsus eram immunis.

Excerptum ex Newtono missum communicavi cum Agnato meo, qui de eo se cogitaturum dicebat, hactenus autem nihil exhibuit. Modum investigandi radices veras et falsas ex mutatione et successione signorum a Cartesio traditum et, ni fallor, ex Harrioto desumtum nusquam adhuc demonstratum vidi; ideo optandum fuisset, ut Newtonus hunc prius demonstrasset, quam suum daret indagandi numerum radicum impossibilium; hic enim haud dubie illo nititur. Hoc vero supposito, memini etiam me aliquas regulas invenisse pro determinandis radicibus imaginariis idque ex occasione ejus, quod Dn. Wolfius ex Tuo, ni fallor, instinctu de hac eadem materia ad me scripserat; nunc vero earum amplius non recordor. Applicabo tamen animum iterum huic rei, ubi otium et valetudo permiserint.

An Montmorii liber de Ludis Fortunae nunc aspexit lucem, nihil equidem audivi; sed dubito an hoc argumentum pro dignitate sit tractaturus. Frater meus haec omnia multo curatius et enucleatius excussit, atque etiam ad moralia et naturalia extendit, imo quoque ad probabilitates vitae et mortis supputandas; haec quidem jam olim, antequam ad Batavos irem, videre mihi licuit, quae et meis meditationibus auxi subinde illeque tum temporis suis admiscuit. Nunc vero quid factum sit de libro manuscripto (quem ad umbilicum fere perductum ab aliis audio) me penitus fugit; solent enim haeredes sollicite cavere, ne quid ex fraternis scriptis

in manus meas incidat, sit quod hoc ita ante mortem Frater voluerit, sive quod superstites ex se hoc mihi invideant. Quicquid sit, procedendi iste modus me plane non offendit; eo enim plagii suspicionem apud alios tanto facilius evitabo. Itaque si optes selecta ex scriptis fraternis in lucem proferri, petendum id erit ab Haeredibus, inprimis ab ejus Filio, Parisiis nunc haerente, ad quem scripta et libri Parentis devolverunt, quamvis parum illis uti sciat, utpote studiorum nostrorum omnino ignarus et rudis.

Per me licet, ut moneas curvas meas multigibbas ad easdem partes cavas esse et carere flexu contrario, provocando ad constructionem, ne Lectori prima fronte suspecta videri possit demonstratio.

Amicus ille (forte fuit Magnevillius, Gallus profugus in Belgio mihi notus atque Moyvraeo familiaris) qui Tibi dixit me in eo esse, ut ad Belgas redeam, fuit deceptus falso rumore, qui paulo ante ejus abitum spargebatur Groningae de vocatione illa Lugdunensi; literae enim ipsae Lugduno nuper acceptae nullam ejus mentionem faciunt: hoc quidem scio, Lugdunenses mei vocationem jam ab aliquo tempore meditari, et commodam tantum occasionem expectare. Fortasse aliquando succedet; num vero consultum sit novam subire mutationem, otium dabitur deliberandi. Vale et fave etc.

Basileae a. d. 1 Sept. 1708.

P. S. Doctiss. Verzaglia Italus, qui nuper Bononia huc appulit et meis fruitur laribus et manuductione, ut peritiam quam habet in calculis nostris ulterius provehat, Tibi hic meis verbis plurimam ascribit salutem. Attulit mihi Gabrielis Manfredi Librum de Constructione Aequationum differentialium primi gradus, jam ante annum editum, qui itaque haud dubie etiam ad Te pervenit. Habet quaedam elegantia, in multis tamen etiam praeter necessitatem valde prolixus est, alia vero magis necessaria et utilia omittit: neque satis profunde penetravit in integralium indagine eorumque constructione, qui tamen praecipuus ejus scopus est.

CCX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Diu est quod nihil de Te vidi. Spero tamen valere Te et mei benevole meminisse. Constitutum est tandem, ut Miscellanea quaedam Societati Regiae communicata imprimantur hoc anno, ubi Tua inserentur de multigibbis, sane digna quae non pereant. Cl. Hermannus suis de statione planetarum Tua, ut par est, inseruit; sed nescio an hoc anno sint edenda: urgebo tamen, ut fiat. Sed acutissimi Juvenis, Tui ex Fratre Nepotis, elegans demonstratio Regulae Newtonianae in alium annum differetur.

Quid agat Cl. Varignonius aliique amici in Gallia, rarius intelligo. Nescio an videris Parentii Disquisitiones*), in quibus, ut audio, Cartesium, Hugenium, Vos quoque Fratres, et me etiam acerbius tractari dicitur, quam deceat. Sed illi constitutum est laureolam in hoc alios carpendi mustaceo quaerere, et perinde agere, ac si nemini quicquam debeat: quae scribendi ratio vereor ut approbetur, nam invidiae et praeposterae ambitionis manifesta est.

La Hirius ait se praesentem fuisse, cum Mariottus olim magna diligentia exploravit mutationes colorum, quos radii lucis per refractionem subeunt, experirique visus est, colorem refractione ortum rursus nova refractione mutari; cujus vero eventus contrarium asseverat Newtonus, cujus tota de coloribus doctrina hoc nititur fundamento, quod radii colorati refractione exeuntes, sive primigenii (saltem quoad sensum) et in radiis ordinariis confusi per refractionem separentur, et postea novam coloris mutationem non subeant, etsi nova fiat refractio. Vellem ut in Academia Regia accurata hujus rei experimenta sumerentur; res enim magni est momenti . . . .

. . . .

Quanquam ego arbitrer, si haec experimenta colorum resumerent examinarentque, multa illis occursura, quae hactenus nec Mariottus nec Newtonus notavit, nec proinde ingloriam operam positurum,

---

*) Recherches de Mathematique et de Physique par Parent. Paris 1705.

qui hoc argumentum prosequeretur. Nullum nunc Mariottum Academia habet. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 25 Aprilis 1709.

CCXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nisi aliunde, ante acceptas Tuas novissimas, de optato valetudinis Tuae statu certior fuissem factus, certe diuturnum Tuum silentium aliquid sinistri de ea judicandi facile praebuisset ansam. Gaudeo vero nunc etiam ex Tuis intelligere Te vivere et valere. Ubi quaedam Miscellanea, sub auspiciis Societatis Regiae impressa, lucem viderint, spero et mihi exemplar unum donatum iri. Facile auguror, Te moderatore, nil nisi quod selectum est et quod sapit, ibi contineri. Siquidem ea quoque inserenda judices, quae de multigibbis fui meditatus, possem subministrare nova ad eam materiam spectantia: ex eo enim tempore multum eam excolui et promovi. Detexi enim, citra jactantiam, admiranda Theoremata, nequidem Circuli tetragonismo cedentia; limites quippe pro Ellipsibus perimetris ad circulares revocandis non tantum provexi ulterius, sed et certam eamque facilem legem provehendi quousque lubuerit, erui: habeoque etiam Theorema geometricum (quod applausum Tuum merebitur) exhibens duos circulos, quantumvis prope aequales, quorum unius circumferentia major, alterius minor est Ellipsi proposita: aliud vero longe generalius mihi suppetit Theorema, quod spectat ad quamvis curvam propositam intra duos arcus circulares quantumvis sibi propinquos coarctandam: id quod ope hujus Theorematis e vestigio exequi licet. Si primi Tomi impressionem non retardarent, possem submittere inventa, haec nova prioribus meis aduectenda, vel saltem ad calcem totius Tomi subjungenda instar appendicis. Sin minus, id sequenti Tomo commodius inseretur. Hoc saltem Te rogo, ut, si possibile sit, responsionem meam in priori publicandam cures, quam nuper dedi Craigio, motus nostros, Tuum nempe tractorium, et meum reptorium suggillanti. Videbis eam in excerptis quae hic Tibi mitto, ex literis quas scripsi ad Illustrissimum Burnetum Episcopi Salisbur.

Filium, qui se Craigii discipulum dicit, et nuper, per aliquot hebdomades, Geneva veniens, in meis aedibus hospitium sumsit; dein iterum eo reversus, nunc in Italiam profectus, tandem etiam in itinere per Germaniam suscipiendo Te salutabit. Mitto etiam, quoniam forte non videris, Schediasma ipsum Craigianum, ubi, ex occasione solutionis suae problematis de transformatione curvarum, nostras methodos per motus reptorium et tractorium, ut ille putat, tanquam minus geometricas, exagitat: videbis quam turpiter ille erraverit, et quam ridicula sit ejus solutio, per quam daturus curvam curvae aequalem, sed diversam, ipse nescius incidit in eamdem cum data, nec nisi solo axis situ diversam. Quae solutio, cum primo intuitu speciosa valde, sed inventu obvia sit, ante decem fere annos me ipsum (nisi statim paralogismum animadvertissem) decepisset, quemadmodum revera postea Moyvraeum, qui in eandam ante Craigium incidit, ita fascinavit, ut etiam vulgasset, nisi, ea mihi prius per literas significata, ex errore suo ipsum extricassem, pro quo mihi gratias egit et nunc valde laetatur, Craigium (sui nempe adversarii Cheynai Amicum) in eundem hunc scopulum impegisse et suo lapsu se publice prostituisse. Itaque Craigius, qui nostras solutiones, ut minus geometricas, suae crisi subjicere voluit, suam prodidit nuditatem, atque adeo nostrum Problema, quod tam facile et sua applicatione quasi indignum praedicabat, tandem tamen, invitis omnibus suis methodis, irresolutum relinquit. Hinc vides, quam infeliciter motum reptorium, et quae inde deduxi miranda Theoremata, sua censura perstringere ausus fuerit. Necesse itaque est, ut veritas contra Craigium vindicetur, ipsius vero error publice refellatur, ne apud ignaros aliquid ponderis inveniat, quod in praejudicium motus mei reptorii (inventi certe utilissimi) praecipitanter nimis, et ut ipse postea in privatis ad Burnetum literis fassus est, sine praevio examine deblateravit. Hoc vero commode fiat, si contrahas quae in responsione ad Burnetum dedi, et postea subnectas iis, quae de multigibbis communicavi, quae utique ejusdem sunt materiae, nempe ex motu reptorio fluentia.

Disquisitiones Parentii non vidi, sed ab Hermanno audivi, quam acerbe tractet non me tantum (quod me non adeo offenderet) sed et Te aliosque Viros de re mathematica tam praeclare meritos. Transmisit mihi Hermannus excerpta quaepiam ex ejus libro, ubi refutare conatur meum quondam specimen Dioptrico-

catoptricum. Sunt autem nihil, praeter puras putas cavillas; unde quilibet perspiciet hominem hunc nihil aliud in animo habere, quam ut aliena extenuet, sua vero extollat. Mihi vero indignus est suffenus, cui meo nomine respondeam, ideoque misi quasdam observatiunculas in ejus crisin ad Dn. Hermannum, ut, si forte inveniat occasionem, alio sub nomine publici juris faciat. Parentio et invidia et ambitione parem nedum superiorem vidi unquam, quare etiam sanioribus Gallis est invisus.

Quod La Hirius dicit, se praesente a Mariotto exploratum esse colorem radii lucis prima refractione genitum mutari in alium refractione secunda, vereor ne id pariter ex invidia dictum sit ad elevandam Newtoni doctrinam elegantissimam de radiorum coloribus; nosti enim Gallorum plerorumque morem, qui est Exterorum inventa aut sibi arrogari, aut, ubi id non possunt, extenuare. Quidam Remundus de Montmort scripsit nuper mihi se ad me missurum librum suum, cujus Titulus Essay d'Analyse sur les jeux de hazard; dubito autem an bene satis tractaverit hanc materiam. Fratris mei Filius ad prelum parat Dissertationem inauguralem Juridicam de simili materia, nempe De usu artis conjectandi in jure, ubi tractandas suscipit quaestiones varias in Jure agitare solitas, praecipue circa absentes pro mortuis habendos, reditus item vitales etc. adeo ut, quam ego olim ad Medicinam, ille nunc ad Jurisprudentiam non inutiliter applicare instituat Mathesin nostram, quod quidem apud Jurisconsultos (qui hunc tractandi modum insuper habent) aliquid novi et insoliti erit. Ubi prelum evaserit dissertatio, eam quoque ad Te mittam, modo mihi commodam mittendi viam indices. Spero Tibi illam non displicituram. Quod superest, vale et fave etc.

Basileae d. 15 April. 1709.

P. S. Ne spatium hoc vacuum maneat, ecce quoddam ex Theorematibus, de quibus supra: quod si ita judicaveris, poterit specimini de multigibbis subnecti, dum ejus demonstrationem cum aliis, quae huc pertinent, commodiori tempore sim daturus. Esto semicirculus (fig. 172.) A4B, cujus diameter AB composita ex semiaxibus alicujus ellipsis AC et BC; sit semicircumferentia bisecta continuo in 2, 4, 8, 16 etc. quotcunque libuerit partes aequales, atque rectarum ductarum ex puncto C, ad divisionum puncta imparia 1, 3, 5, 7, capiatur media arithmetica (hoc est

$\frac{C1 + C3 + C5 + C7}{4}$) quae vocetur M: et rectarum ad divisionum puncta paria 2, 4, 6 ductarum auctarumque radio R seu $\frac{1}{2}$ AB sumatur media arithmetica (hoc est $\frac{C2 + C4 + C6 + R}{4}$) quae vocetur N: dico M et N fore radios duorum circulorum, quorum ille circumferentiam habet majorem, hic minorem, quam Ellipsis proposita. Sunt enim illi duo circuli, circumscriptus et inscriptus curvae multigibbae Ellipticam peripheriam aequanti, duplo plurium existenti gibborum quam est numerus divisionum. Unde si in 8 partes dividatur circumferentia A4B, erunt M et N duo radii duorum circulorum circumscripti et inscripti curvae sedecigibbae, quae sit Ellypsi aequalis. Est vero, ut calculus me docuit, M ad N in minori ratione quam 6000001 ad 6000000, ita ut jam Ellipsis versetur inter duas circumferentias circulares, quae inter se non differant sexies-millionesima sui parte. Intellige hoc de Ellipsi, cujus duo axes inter se sunt ut 5 ad 4. Per divisionis seu bisectionis continuationem invenientur e vestigio limites, incomparabiliter propinquiores. Sunt enim, sicuti in praecedentibus ostendi, celerrime convergentes. Alia mirabiliora in aliam occasionem reservo.

CCXII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Acceperis ut spero, quas ad Te dedi d. 15 Aprilis novissimi, in quibus Tecum communicavi, quae mihi intercesserunt cum Dno. Craigio circa modum transformandi curvas, ut quaedam ex iis insereres Miscellaneis proxime, uti dicebas, edendis, ob affinitatem quam habent cum iis, quae dedi de Multigibbis, quam materiam mirifice me excoluisse ex eo tempore, ex literis meis ediscere potuisti inprimis ex Theoremate illo, quod ad calcem earum subnexi, et cui similia alia habeo unumque generalissimum, respiciens quamcunque curvam datam cum arcu circulari comparandam. E re est, ut primo statim Miscellaneorum vestrorum tomo inserantur, ut nimirum Craigii paralogismus quantocyus propaletur, Tua vero meaque transformandi ratio ab ejus cavillis vindicetur, et ita suum

cuique tribuatur. Reliqua vero, quae ex motu reptorio inveni admiranda, sequenti tomo reservabo. Nunc Tibi mitto per eum, qui has ad Te deferet, repetens Patriam suam Daniam et ex Italia veniens, hanc, de qua nuper Tibi scripsi, Dissertationem De Usu artis conjectandi in Jure, quae si Tibi placuerit, erit de quo sibi gratulari queat Auctor; hunc ut commendatum habeas, enixe rogo. Vale etc.

Basileae a. d. 2 Juli. 1709.

CCXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quasdam ad Te literas meas periisse oportet. Nam certum est, me Tibi hoc anno scripsisse et significasse reddita mihi Tua nova de Multigibbis et Miscellaneis Berolinensibus (quae nunc sub prelo sunt) cum prioribus de hoc argumento scriptis insertum iri. Nunc ex Tuis novissimis intelligo, dubitare Te an quae 15 Aprilis ad me dedisti, sint reddita. Qui factum sit ut responsio mea perierit, judicare non possum. Interea nihil magnopere continebat, quod conservari mereretur, tantumque significabat desiderio Tuo satisfactum iri. Miror Dn. Craigium bis in eundem lapidem impegisse. Videtur non satis attente versari in his quae tractat, quemadmodum et Cheynaeus. Diu est quod de Moyvraeo quoque nihil intellexi, neque etiam Anglicas Transactiones vidi. Etiam Dn. Hermannus a multo tempore silet, etsi Dn. Abbas Fardella subinde ad me scripserit. Danum, per quem mihi Dissertationem Tui ex Fratre nepotis, juvenis ut apparet docti et ingeniosi, misisti, non vidi, nempe quod me domi non invenisset. Gratulor vestrae Familiae proventum ingeniorum, et velut hereditariam in mathesi praestantiam.

In aestimandis reditibus ad vitam occupati olim fuere, cum Hugenio, Huddenius non tantum, sed et Pensionarius Johannes de Wit, cujus breve ea de re extat Schediasma Belgico Sermone, sed in usum popularium, ut intelligerent rei aequitatem. Quae de Amstelodamensi aestimatione refert Tuus ex Fratre nepos, credo ex Huddenianis computationibus fuisse profecta. Quidam Fergusonius,

Belga ex Scotis oriundus, qui olim aliquot mensibus Hanoverae egit et librum quemdam Algebraicum Belgice edidit, multa mihi de Wittii et Huddenii in hac disquisitione meditationibus memorabat, etsi eorum methodos ratiocinationesque non teneret. Vellem talia ex schedis ipsorum eruerentur, neque enim dubito, quin plurima inde disceremus. Volderus jam et Fullenius, Viri Egregii, obiere, ita non exiguam jacturam res mathematica passa est. Vivamus, sed amice, nosque amemus, et quamdiu Deo visum erit, in stadio pergamus. Vale etc.

Dabam Hanoverae 6 Septembris 1709.

P. S. Mereri puto Domini Fratris Tui p. m. librum, qui edatur, idque scribenti plus semel significavi. Saepe monui deesse nobis partem Logicae de gradibus verisimilitudinis; aestimandos autem censeo ex gradibus possibilitatis, seu ex multitudine aequalium possibilitatum. Ostendi olim in schediasmate quodam politico Principis jussu edito, quasdam aestimationes fieri per additionem, quasdam per multiplicationem.

CCXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Hasce qui ad Te deferet literas, Illustr. Burnetus, Illustr. Burneti Episcopi Salisburiensis Filius, Vir Juvenis egregiis et animi et corporis dotibus instructus, nuper per aliquot hebdomadas meo hospitio usus abhinc in Italiam migravit; nunc Roma veniens per Germaniam ad vos quoque iter facturus a me petiit, ut in favorem aliquot lineas ad Te scriberem, quibus ad Te facilior sibi accessus pateret, quanquam homo sit ejus indolis, ut se per se ipsum facile commendet nec aliena indigeat commendatione. Non levem pro ratione aetatis sibi comparavit eruditionem, et inprimis in nostri calculi genere non mediocriter versatus, et quod optimum in eo est, summum in eo deprehendi ardorem, studium hoc pro viribus excollendi, ut pro ejus incremento haud parum ab illo aliquando sit sperandum.

Verebar ne superiores meae literae ad Te non pervenerint, sed metum illum vanum fuisse nunc ex postremis Tuis intelligo et

gaudeo; interim etiam aliquam ex Tuis ad me epistolam periisse aegre percipio. Ut ad me quoque mittatur exemplar aliquod Miscellaneorum Berolinensium (ubi praelum evaserint) est quod impense rogo. Ex Fratre meo Nepos sibi gratulatur, suam exercitationem de arte conjectandi Tibi non displicuisse; cultum suum cum salute officiosissima ut Tibi denunciarem, obnixe petiit; sicubi ex Tua commendatione stationem aliquam pro mathesi docenda impetrare posset, foret Tibi in perpetuum devinctus. In eo nunc sum, ut et Filium meum ad studia nostra aptum reddam.

A Domino Hermanno pariter diu nihil literarum accepi. Vellem Moyvraeo, Viro sane erudito, prospectum esset, ne sibi semper cum egestate sit luctandum, quando tempus suum melius posset collocare. Remondus de Montmort, Canonicus Parisiensis, librum conscripsit sub titulo Essay sur les jeux de hazard, sed multum abest, quominus haec pro dignitate tractaverit. Haud dubie Frater meus materiam istam profundius aggressus, etsi nondum ad finem perduxerit. Sed alias plura. Nunc vale et fave etc.

Basileae a. d. 1 Octobr. 1709.

CCXV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non sine aliqua aegritudine video commercium nostrum tam segniter procedere; vereor sane ne tandem prorsus emoriatur. Literas subinde ad Te dedi, sed raro responsionem accipio: dicis quidem in postremis quas accepi, quasdam alias ad me Tuas periisse, id quod ab aliquot annis jam saepius contigisse a Te intellexi, secus ac olim, ubi tam accurate literae Tuae mihi tradebantur.

Burnetus, Juvenis egregius, qui novissimas meas ad Te detulit, mihi nuper scripsit Haga, et Tuam erga se urbanitatem multis depraedicavit, eam praecipue commendationi meae adscribens. Quod si ita sit, magnas eo nomine ago gratias. Multus est Burnetus, ut mihi persuadeat acceptandam esse vocationem Leydensem denuo oblatam: subvidi eum ita scripsisse ex instigatione Illustrissimi Obdamii, primi Curatoris Academiae Leydensis; recripsi vo-

cationem non displicaturam, si lautioribus conditionibus offerretur, quae nimirum mutationis hujus novae molestias et incommoditates, sane summi momenti, nonnihil compensarent.

An Miscellanea Berolinensia vestra nondum evaserunt prelum, sub quo ea sudare dudum est quod dixisti? Quod si in lucem prodierint, rogo ut mihi quoque aliquod exemplar mittatur. Spero me ibi visurum, quae contra paralogizantem Craigium ad Te misi: eadem etiam cum totius litis Craigianae narratione Moyvraeo transmisi per Scheuchzerum juniorem, Medicum Tigurinum in Orbe Erudito non obscurum, qui nuper iter aggressus est in Belgium, Angliam et Galliam, forteque in transitu per Germaniam Tui videndi copiam quaeret; hunc enim cum primis scopum istius itineris habet, ut Viris Eruditis et Celebribus innotescat: quamobrem me rogavit, ut quum ad Te scripturus essem, sui etiam mentionem injicere et se Tibi in antecessum commendare vellem. Anhelat Vir bonus aliquam honestam stationem et Professionem sibi convenientem, qualem si Tu ipsi conciliare posses, maxime Tibi foret devinctus, aeque ac Dominus Moyvraeus, insignis certe Geometra, qui haud dubie adhuc haeret Londini, luctans, ut audio, cum fame et miseria, quas ut depellat, victum quotidianum ex informationibus adolescentum petere cogitur. O duram sortem hominis! et parum aptam ad excitanda ingenia nobilia; quis non tandem succumberet sub tam iniquae fortunae vexationibus? vel quodnam ingenium etiam fervidissimum non algeat tandem? Miror certe Moyvraeum tantis angustiis pressum ea tamen adhuc praestare, quae praestat.

Habet Agnatus meus, de quo sibi gratuletur, quod Dissertatio a se conscripta Tibi non displicuerit. Discessit nuper in Galliam abiturus, postquam aliquandiu Genevae commoratus fuerit. Parisiis inveniet occasionem studia nostra ulterius prosequendi; videbit Montmortium, qui de simili fere materia, nempe de ludis a fortuna pendentibus non ita pridem librum edidit, in quo autem nihil valde singulare deprehendi, multa vero obscura nec nisi iis, qui rem jam antea Auctore ipso melius penetrarunt, intelligibilia; observationes meas in hunc librum Autori transmisi, quoniam judicium meum de eo a me petiit. Fratris mei Opus posthumum, si ultimam manum vidisset et lucem publicam aspiceret, foret haud dubie omnium, quae circa hanc materiam prodierunt absolutissimum: sed dubito an unquam proditurum sit, per nescio quam ineptam heredum suspicionem. Vidit manuscriptum Hermannus,

cum rogante vidua, statim post obitum mariti, hujus schedas et chartas in ordinem redigeret, ex quibus etiam, ut audio, multa vel descripsit vel excerpsit; mihi vero nihil horum omnium introspicere concessum est, immo sollicite cavent, ne quid in manus meas incidat, quod quidem nequaquam aegre fero; habeo enim quod depromam ex propria penu nec unum tantum vel alterum, si plurium scriptorum editione gloriari vellem.

Audeo ad Te mittere Epistolam hanc adjectam et inscriptam Cl. Wolfio; rogo ut illam ipsi transmittas per tutissimam viam. Reliqui eam apertam sub sigillo, quod vocant, volante, quod lectione peracta obserabis; invenies ibi quaedam etiam ad Te pertinentia circa aestimationem virium, quas non rite considerasse videtur. Illius Aërometriam Tibi quoque visam non dubito, sed totam a Te lectam vix credo. Observavi Auctorem aliquot in locis misere et turpiter cespitantem: ex. gr. pag. 137, ubi vim requisitam ad divellenda hemisphaeria evacuata ponit aequalem ponderi columnae atmosphaericae pro basi habente integram superficiem hemisphaeriorum, cum tamen tantum basis eorum sit sumenda; pag. 251, ubi exhibet structuram barometri, quod putat effectum habere triplo sensibiliorem, quam ordinarium, cum e contrario ne simplicem quidem sensibilitatis ordinariae gradum attingere ego demonstrem; qui vel e limine salutasset hydrostatices principia, tam graviter errare vix posset; pag. 272 ex lapsu calculi asserit aliquid tenere, quod falsissimum est.

Ab Hermanno nostro interdum accipio literas; novissimae, quas ab eo habeo, datae sunt 15. Febr. hujus anni. Statio Lugdunensis mihi oblata ipsi salivam movet, cum qua libenter Patavinam, in qua nunc est, commutaret: hoc equidem Lugdunensibus indicavi, scilicet me ipsis commendaturum aliquem virum, qui me deficientem facile resarciat. Interim in hunc usque diem a me non desistunt, nescio qua de me opinione occupati. Rumor quidem erat Keilium ex Anglia illuc vocatum iri, quod vix credo.

Guilielminum, relicta sua cathedra, acceptasse munus Archiatri apud Magnum Etruriae Ducem, cum annexo salario annuo 1600 Piastrarum Florentinarum, forte jam audiveris; sed et Fardella Guilielmi exemplum imitatus, in Catalauniam se contulisse dicitur, quid ibi facturus nescio.

De quodam Abbate Conti, Nobili Veneto, mihi multa narrat Hermannus, et de ejus peritia in reconditiore Geometria. Caeterum

vero multos jam in Italia esse, qui in hac scientia excellant, non audivi: in Gallia nonnihil excolitur, sed non eo successu, quo vellem. Floret felicius, ut videtur, in Anglia et Scotia: quantum valeat in Germania nostra, mihi ignotum est.

An secunda editio Principiorum Philosophicorum Newtoni comparuerit, utpote quam sub prelo esse jam diu intellexi, fortasse Tibi innotescit, aut eam omnino jam vidisti, cujus videndi et ego magno desiderio teneor. Moyvraeus enim, jam ante annum, mira mihi de ea jactitabat. Curiosus sum videndi, num Auctor in hac secunda editione correxerit quosdam errores, imo paralogismos, quos ego in prima animadverti.

Hermannus scribit, quod et ad Te scriptum non dubito, se parare aliquod Opusculum sub titulo Mechanicae fluidorum, quod erit collectio eorum, quae de hac materia in variis operibus dispersa sunt. Quod superest, vale, vir amplissime, et fave etc.

Basileae 26. Apr. 1710.

CCXVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quod non ita crebro inter nos commeant literae, faciunt potissimum distractiones meae, tam multiplices, ut vix illis sufficiam. Potissimum efficiunt Historici labores, quos Principes exiguunt, in quibus nunc magna cum contentione versor, ut aliquando illis defungi possim; sed et poscunt me subinde negotia Aulae, ipsi Principes, Berolinum, Guelfebytum. Accedunt literae ex multis locis de rebus non tantum mathematicis et philosophicis, sed et de pertinentibus ad jus publicum, ad res sacras, ad historiam, ad antiquitates, literasque elegantiores. Etiam nummi et inscriptiones interdum mecum communicantur. Multum enim temporis detrahunt allocutiones peregrinantium, qui subinde ad me adeunt, nec honeste repelli possunt. Subinde etiam in chartam conjicio novas, quae forte incidunt, cogitationes, ne plane pereant. Sed vix aliquid elaborare potero in alio genere, antequam Historicis laboribus fuero defunctus, quod intra biennium fiet, Deo volente; modo scilicet valetudo et vita eo usque durent. Sane valetudine nunc iterum per-

commoda utor, etsi hac hyeme arthriticos assultus aliaque incommoda senserim.

Dominus Burnetus per aliquot septimanas apud nos egit, et humanitatem Tuam communicandique facilitatem, ut caeteras dotes taceam, pro merito laudavit. Mecum subinde egit, sed non tam crebro licuit ac voluissem. Certe de variis locuti sumus. Discedens, literis Hanovera Guelfebytum scriptis, a me Historicas quasdam notitias desideravit. Rescripsi ut tunc quidem poteram, sed an responsum meum acceperit, nescio; nam ex quo Hanovera discessit, nihil ejus vidi, et quae in Batavis agat, pro parte ex Tuis intelligo. Facit recte et pro gratitudine quam Tibi debet, quod rem Tuam apud illos curat. Ego de negotio tali consilium dare non audeo. Tibi laetissima omnia ex animo opto. Excerpta Epistolarum Tuarum in Miscellaneis Berolinensibus prodiere, etiam quae ad Craigianam controversiam pertinent. Exemplaria apud Bibliopolas vidi, sed nullum hactenus Berolino accepi: exspecto tamen, nec dubito etiam Tibi exemplum missum iri; ita enim dudum institutum est, me suadente.

Gratissima mihi erit etiam Dn. Scheuchzeri junioris notitia. Utinam egregiis ingeniis semper subveniri posset; sed scis, multa hic in casu sive fortuna sita esse. Moivraei vicem Tecum doleo.

Si Dominus Agnatus Tuus, juri dans operam, urgeat et perficiat coepta Fratris Tui, Dni. Jacobi Bernoullii, circa aestimationes probabilitatum, faciet rem utilissimam. Ego jam a puero hoc argumentum versavi, tunc imprimis cum juri darem operam, et de conjecturis, indiciis, praesumptionibus, et gradibus probationum minus plenarum, semi-plenarum, plenarum, similibusque agerem. Nemo enim hoc argumentum melius excoluit, quam ipsi Jurisconsulti; sed illi non satis ad certa principia methodumve revocarunt. Dn. Hermannus mihi non significat consilium sibi esse mutandi Patavinam stationem: non tamen mirarer, si alia non inferiore oblata hoc faceret, cum ad Ministerium Ecclesiasticum ordinatus sit, cujus functiones illo in loco exercere non potest. Idem nihil ad me de Gulielmini mutatione scripsit.

Monita Tua ad Aërometriam Wolfii, quae ipsi transmisi, merentur aliquando ab eo in usum verti, cum opusculum, caetera elegans, incudi reddet. Non legi, sed volutavi, et cum animadverterem Machinae, qua vim venti aestimare instituit, aliquid deesse, id eum olim monui. Nempe ille venti fluxum continuum concipit,

qualis est fluminis; sed revera ventus agit per successiones, ut si dicam (Galli dicerent par bonds) quae quo sunt crebriores inter idem temporis spatium, eo validior est ventus, adeoque est vis ejus aestimanda non tantum impetu, sed et impetuum repetitorum multitudine. Videmus hanc venti indolem, quando in asserem suspensum agit, eumque nunc attollit, nunc nonnihil remittit, cum aquae jactus aut fluminis cursus eum in eadem obliquitate conservare possit.

Nondum intellexi secundam editionem Principiorum Mathematicorum Newtoni prodiisse. Velim discere, quos in priore paralogismos notaris, scilicet hanc veniam petimusque damusque vicissem. Optimus ille est qui minimis urgetur. Egregia adhuc ab eo praestari posse non dubitem. In Germania nostra nemo fere profundiorem Geometriam satis intelligit. Wolfius, etsi in ea mediocris, caeteris praestat. Plerique, qui in Germania studiis dant operam, vix ad necessaria sufficiunt, aegreque animum attollunt ad sublimiora, quia scilicet per studia non nisi vitae subsidia quaerunt. At in illis regionibus, ubi homines locupletes dant studiis operam, meliora praestari possunt. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Guelfebyti 6 Junii 1710.

CCXVIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non opus erat tanta apud me excusatione; novi enim dudum multitudinem negotiorum Tuorum, et miror qui omnibus sufficere possis: alium certe praeter Te tot tantisque laboribus defungendis parem non facile inveniam. Succumberem ego, si eodem tempore diversis adeo studiis implicarer et simul negotiis Aulicis aliisque obruerer. Quod humeri Tui id ferre valeant, hac praesertim qua es aetate, mirabundus gratulor, ac voveo ut valetudine percommoda, qua nunc uti dicis, porro per longam annorum seriem frui possis, non sine ingenti communium nostrorum studiorum, imo universae rei literariae bono, Tuorumque omnium amicorum et cultorum, quos inter me pridem profiteor, gaudio et delectamento. Unum est quod abs Te jam-dudum desideravi, et

quod hac occasione non possum non aperire, scilicet cum Tui videndi spes jam omnis mihi videatur praecisa, et hactenus nonnisi mentis et ingenii Tui vastissimi ideam habeam, vultus vero Tui nullam, summopere me beares, si effigiem Tuam vivis, ut ajunt, coloribus pictam transmitteres mihi, sumtus in eam rem quam lubentissime erogaturo, qua cum aliis Iconibus Virorum quorumdam Illustrium et meorum Fautorum, partim jam comparatis, partim adhuc comparandis, Musaeum meum exornabo.

Ex literis nuperis Dn. Burneti Haga missis, intelligo ipsum propediem in Angliam trajecturum; dicit quidem Illustrem Obdamium omnem moturum lapidem, ut me potiri possint, melioribus quam hucusque oblatis conditionibus, sed expectanda esse quoque meliora tempora.

Curo, quaeso, ut Miscellanea Berolinensia prompte mihi mittantur, ut desiderio meo satisfiat.

Scheuchzerus senior (junior nunc in Galliis forte versatur) sub prelo habet Physicam, ut mihi scribit, Tibi dedicandam, quam more Geometrico, ad mentem scilicet Modernorum concinnaverit, inventis rarioribus Physico-Mathematicis ex optimis Auctoribus congestis: an autem pro hoc Geometriam profundiorem satis possideat, de eo valde dubito. Promittit etiam se editurum Mappam, quam jam tradiderit sculptori, Helvetiae universae; eam fore in 4 partes digestam, ita tamen ut jungi in unum queant, 56 pollices longam, 40 altam, circumcirca regionum finitimarum loco, observationibus et iconibus selectioribus historico-naturalibus exornatam; continere imprimis observationes et correctiones Geographicas, per 16 annorum itinera congestas. Scheuchzerorum sagacitate, ante annum circiter inventa est materia in paludibus Tigurinis idonea ad Turfas conficiendas (Hollandicis, ut ipse ego expertus, non inferiores) quibus nunc passim utuntur Tigurini, summa cum utilitate, viliori enim pretio habentur quam ligna; quo fit ut earum elaboratio et usus magis magisque increbrescat, et, quemadmodum scribit Scheuchzerus, nunc incipit, etiam effodere carbones fossiles.

Agnato meo, qui nunc Parisiis agit, perscripsi monitum Tuum de perficiendis coeptis circa aestimationes probabilitatum. Si Tua quae de hoc argumento quondam excogitasti, in lucem ederes, forent haud dubie omnium, quae hactenus habentur, pro more Tuo, curiosissima et ingeniosissima.

Scribit Dn. Hermannus Marchionem Polenum, Collegam suum, edidisse nuper opusculum de Barometris et Thermometris, de Machina Arithmetica et Gnomonicis*). Talem Machinam Arithmeticam, ni fallor, Tu quoque adinvenisti.

Guilielminum diem suum obiisse, idem Hermannus huc perscripsit. Nosti sine dubio, Fardellam stationem aliquam habere in Aula Barcinonensi.

An Dn. Wolfius monita mea in Aërometriam suam acceperit, nondum audivi. Scribit Dn. Menkenius, illum velle proficisci in Moscoviam, suam ibi fortunam experturum; forte quod Halae habeat plurimos osores.

De secunda editione Philosophiae naturalis Newtonianae nihil equidem amplius inaudivi. Quod paralogismos attinet, quos olim in prima editione observavi, non annotavi; quare, quantum nunc statim memoria suggerit, nonnisi unum vel alterum indicabo. Postquam pag. 48 demonstravit, Vim centripetam tendentem ad centrum Ellipseos esse directe ut distantia corporis gyrantis a centro, concludit pag. 49. Coroll. 1. etiam conversam obtinere, hoc est, si vicissim vis centripeta sit ut distantia, moveri necessario corpus in Ellipsi: eodem etiam modo, quo pag. 50, 51, 52, 53 et 54 demonstravit, vim centripetam tendentem ad umbilicum sectionis Conicae esse reciproce in duplicata ratione distantiarum, concludit pariter pag. 55, Coroll. 1. ergo vicissim curvam, in qua vires centripetae sunt in reciproca ratione duplicata distantiarum a centro virium, illam curvam esse sectionem conicam. Ego vero dico, non legitime colligi posse has conversas, licet harum veritatem singulari quodam calculo (qui alias ad differentias secundas deducit haud facile separabiles) compertam habeam. Conclusiones igitur Auctoris vitiosae sunt formaliter, quamvis verae materialiter: demonstrare enim prius debuisset (quod autem non fecit) unicum tantum hic genus curvarum posse datae legi vis centripetae satisfacere, seu legem eam virium soli sectioni conicae competere et nulli aliae curvae. Nosti enim, hujusmodi problemata, quae praesertim desinunt in aequationes differentio-differentiales, plerumque admittere diversa curvarum genera: imo quandoque curvas transcendentales quasdam et alias algebraicas eidem problemati posse satisfacere,

*) Poleni Miscellanea. Venet. 1708.

quemadmodum alibi ostendi. Quid opus est multis? Habemus exemplum apud ipsum Newtonum pag. 47, prop. 9 ubi ostendit in Spirali logarithmica, centrum habente in centro virium, vim centripetam esse in triplicata ratione (reciproca) distantiarum; potuisset enim, eodem jure, ex ea concludere conversam, dicendo, unde vicissim (uti fecit pag. 49 Coroll. 1) si vis sit reciproce ut cubus distantiae, movebitur corpus in Spirali logarithmica centrum habente in centro virium. Interim, ita ratiocinando, Auctor non tantum formaliter, sed et materialiter enormi modo peccasset: nam praeter logarithmicam spiralem reperio aliud genus curvarum, ubi similiter vis centripeta est reciproce ut cubus distantiae a centro. Sic, inter alias quam plurimas quae satisfaciunt, unam prae caeteris mirabilem invenio Hyperbolam spiralem, cujus nempe natura haec est, ut rectae a centro ad curvam ductae obtineant rationem reciprocam cum angulis, quos faciunt cum recta aliqua positione data per centrum ducta. Item si ad hanc rectam, tanquam super axe, describatur curva algebraica, cujus haec aequatio $s = \frac{rr - 2aa}{\sqrt{4aa - rr}}$, sumtis scilicet coordinatis s et r ex centro virium, dico etiam hanc curvam algebraicam hoc praestare, ut mobile in illa feratur viribus centripetis distantiarum cubis reciproce proportionalibus. En ergo jam tres curvas diversissimorum generum, communi tamen hac affectione gaudentes; quae igitur si in aliqua curva reperiatur, ex hoc solo nondum concludi potest, illam curvam esse logarithmicam spiralem potius, quam Hyperbolam spiralem, aut alteram illam algebraicam, aut aliam etiam quam exhibere possem. Ita quoque non procedit Newtoni conclusio ad stabiliendas suas propositiones conversas, etsi verae sint, quia prius non demonstravit, leges illas virium centripetarum (quod sane demonstratu difficillimum est) solis sectionibus conicis competere. Pag. 260 prop. 10 Problema hoc, quo quaeritur, tum medii densitas in locis singulis, quae faciat ut Corpus quodvis in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis, supponendo resistentiam sese habere ut medii densitatem et quadratum velocitatis conjunctim: hoc problema, inquam, mihi non recte ab Auctore solutum videtur. Quanquam autem multis in locis evidentia desideretur, ubi tamen praecise erratum

sit, non facile detegitur. Quidquid sit, ex solutione Auctoris manifeste contradictorium sequitur; nam pag. 265, ubi applicat solutionem generalem ad circulum, invenit densitatem proportionalem tangentis longitudini TC, et velocitatem proportionalem ipsi $\sqrt{BC}$, quod etiam ita esse, per meam solutionem invenio: sed quando habet resistentiam esse ad gravitatem, ut OB ad circuli semidiametrum OK, hoc verum esse non potest, quod ita facile probo. Cum enim vis gravitatis absoluta sit ad eam ejus partem, qua secundum tangentem curvae urgetur mobile (quamque Newtonus vim motricem vocat), ut sinus totus ad sinum inclinationis tangentis ad horizontem, hoc est, ut OC seu OK ad OB: esset itaque gravitas ad resistentiam, ut gravitas ad vim motricem: adeoque resistentia aequalis vi motrici, et sic quantum de velocitate per resistentiam quolibet momento amitteretur, tantumdem per vim motricem resarciretur: hinc ergo velocitas foret aequabilis, et tamen dicit, decrescere in ratione ipsius $\sqrt{BC}$, adeoque sibi contradicit. Ego per meum solvendi modum, qui valde naturalis videtur, invenio resistentiam ad gravitatem ut 3 OB ad circuli diametrum AK; ex quo sequitur, resistentiam ad vim motricem esse ut 3 ad 2, hoc est in constanti ratione sesquialtera; et sic resistentia semper majore existente vi motrici, velocitas decrescere debet, quod cum vera solutione optime consistit. Caeterum generalissima mea solutio ita se habet. Sit (fig. 173.) ALK curva quaecunque data; vocetur gravitas G, resistentia R, densitas D; sit etiam abcissa $(LO - CB) = x$, applicata $(OB) = y$, radius evolutae in $C = r$, velocitas in $C = v$: dico fore $vv = \frac{Grdy}{ds}$, $D = \frac{Gdx - vdv}{Grdy}$ et $R = \frac{Gdx - vdv}{ds}$. Nota quod per ds intelligo elementum curvae seu $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Hinc data curva LCK per aequationem, ratio dy, dx, ds, dv exprimetur quantitatibus finitis et ordinariis; vicissim vero determinatur curva ex data lege densitatum. Hisce vale et me ama etc.

Dabam Basileae d. 12 Augusti 1710.

CCXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Magnae mihi semper voluptati sunt literae Tuae; adde quod fructum nunquam non afferunt insignem et non paenitenda docent. Utinam vicem Tibi reddere possem. Sed ita sunt res meae, ut vix amplius cogitationem adhibere ad ea liceat, quae magna attentione indigent, ut solent Analytica et Geometrica nostra.

Multa Tibi debeo, quod benevolentiae erga me Tuae significationem eo usque porrigis, ut etiam icona vultus habere expetas. Etsi enim parum in ea re momenti sit, inde tamen intelligo, quam mihi faveas, qui animum etiam ad haec demittis.

Serenissimus Dux Antonius Ulricus, Guelfebytanas ditiones regens, jussit nuper ut pingar, et pictura Bibliothecae ejus celebri inseratur; id ubi fiet, simul tabulam exprimi curabo in usum Tuum.

Spero Miscellanea Berolinensia tandem ad Te pervenisse, in quibus maxime displicent creberrimi typorum errores; caetera mediocria sunt.

Physica more Mathematico conscripta res est magna et expetenda. Initium similis operis nuper Vir doctus ex Batavis ad me misit, cujus nomen nunc non succurrit, quia domo absum, sed multa habet circa naturam corporis motusque, quibus minime assentior, quod etiam non dissimulavi. Interim animandi sunt ad urgendum propositum, quicunque talia moliuntur, inprimisque Doctissimus Scheuchzerus noster, a quo plurima egregia expecto. Honoratus Fabrius et Carolus Renaldinus et Franciscus Lana, et nuper Johannes Christophorus Sturmius amplis Operibus similia egere; et licet non semper scopum sint assecuti, plerumque tamen nos aliquid docent: itaque vellem Sturmii Physicam posthumam prodire.

Poleni Patavini, Viri, ut apparet, docti ingeniosique, libellus ad me pervenit. Sed Machina ejus Arithmetica plurimum differt a mea: nam, ut video ex ipsius structura, si 365 multiplicare velis per 24, et initio quidem per 4, tunc multiplicabitur per 4 primum 5, deinde 6, tandem 3; sed apud me 365 simul multiplicatur per 4. Imo si adesset 19847365, totum hoc simul per 4 multiplicaretur. Ita numerus magnus et parvus eodem tempore per notam datam multiplicantur. Atque hinc etiam credo Dn. Polenus

Machinam nonnisi ad tres notas produxit . . . .

. . . .

Gratias ago multiplices, quod Tuas ad Neutonianum Opus, sane insigne, animadversiones mecum communicasti; optarem Tibi totum examinare vacaret, quod nec ipsi ingratum futurum scio. In corpore tam pulchro

non ego paucis
Offendar maculis, quas aut incuria fudit,
Aut humana parum cavit natura.

Scis inter ipsum et Mariottum controversiam fuisse circa rem facti. Newtonus negat, radium per refractionem coloratum rursus nova refractione colorem mutare. Nam in refractione separationem radiorum primitivorum fieri putat. Mariottus in Tentamine de coloribus contrarium se expertum ait; et alii ex Academia Parisina Regia observationibus ejus affuere. Vix tamen ausim credere, Newtonum hic labi in re tam capitali et quam tanto studio excussit. Interim apud Parisinos resumi experimenta suaseram; sed respondit Fontenellius, habere quemque quod agat, quasi aliquid utilius agere possint, quam quo principia maximi momenti constituantur. Berolini Dn. Angicourtium, Gallum, Virum ingeniosum et bene animatum, hortatus sum, ut experimenta instituat, quibus res facti extra dubitationem magis magisque collocetur.

Diu est quod Dn. Hermannus ad me non scripsit; sed et Dn. Burnetus ex Batavis neque ad me, neque, quantum intelligo, ad alios amicos, quos Hanoverae habuit, literas dedit, quod negotiis ejus tribuere malo, quam oblivioni nostrum.

Regina Hispaniae per Ministrum status Guelfebytanum Dn. de Im-Hof mihi significari jussit, affuisse Dn. Fardellam et literas etiam a me attulisse, et commendationis nostrae rationem habitum iri. Plura de ipso ignoro, neque enim ipse nobis ex Hispania scripsit, sed fortasse Dn. Hermannus plura intellexerit. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Guelfebyti 15 Octobris 1710.

P. S. Hac aestate Hanovera transiit Gallus quidam Dn. Nuguet, ut se appellabat. Is se ferebat autorem novi experimenti circa Phosphorum mercurialem Parisiis a se ostensi. Exponere id promiserat, sed ad me non rediit. Facile, opinor, quid rei sit, Parisiis intelliges. Nescio an videris scripta medica Georgii Ernesti Stahlii, Professoris Hallensis, qui quamdam, suo more, Philoso-

phiae et Medicinae reformationem molitur, mirasque habet sententias de anima et contra Philosophiam mechanicam, negans spiritus animales, spernens utilitatem Anatomiae exquisitioris, aliaque Paradoxa defendens, et tamen applausores invenit. Nobilis quidam Vir, mihi et ipsi amicus, cum coram a me intellexisset mihi has sententias non placere, effecit ut quaedam annotata mitterem, quibus Dn. Stahlius non sine supercilio respondit. In eo sum, ut replicem. Omnia Tibi aliquando occasione data mittam, qui et ipse medicus es, et judicium Tuum exquiram. Interea rogo, ut Stahliana inspicias, praesertim Theoriam ejus Medicam nuper editam, si apud vos inveniuntur. Dn. Hartsoekerus a me objectiones in suas Conjecturas petiit. Dedi pauculas, quas inseruit (me recte non nominato) et refutavit in suis declarationibus (Eclaircissemens)*).

CCXIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si quid voluptatis et fructus ex literis meis percipis, ut quidem dicis, habeo certe de quo mihi gratuler; ita enim scopum meum egregie consecutus mihi videor, Orbi scilicet erudito, Tibique praesertim, qui meritis Tuis in eo prae caeteris emines, aliquid gratum et utile praestare in summis votis semper habui. Iniquus autem essem, si a Te, hac qua es aestate, exigerem quae magna attentione indigent, ut solent analytica et geometrica, post tot exantlatos labores, quibus universam rem literariam aeternum Tibi devinxisti. Scio et in me ipso expertus novi, quantum fervor ille et pertinax indagandi studium cum annis juvenilibus paulatim abeat et languescat. Marcescit animi vigor in corpore debili et longis infirmitatibus attrito, quanquam nondum 44 annum compleverim; quo fit ut nescio quae gravis inertia artus meos infestet, et hinc animum quasi suffocet, pristina alacritate privatum.

Miritice me delectabis et pro insigni benevolentiae signo habebo, si vultus Tui imaginem, ut polliceris, mihi transmittere digneris; hac quidem tabula, cum aliis Virorum Illustrium iconibus,

*) Eclaircissemens sur les conjectures Physiques. Amst. 1710.

Musaeum meum exornare constitui. Paucis ante diebus accepi in hunc finem Parisiis pictas effigies Bignonii, Malebranchii et Varignonii, sed Hospitalii ejusque Uxoris, foeminis in Mathematicis non parum doctae, icones cum aliis dudum habeo; Newtoni quoque, si potero, mihi comparabo.

Accepi demum nudius tertius Miscellanea Berolinensia, missu Cl. Jablonski, cui, quaeso, data occasione, gratias meo nomine referas cum cultu meo officiosissimo. Perlustravi, quamvis hucusque obiter; multa inveni elegantia et minime spernenda: facile quidem suspicor Tibi hujus libri curam incubuisse. Dedicatio et Praefatio, quas a Te profectas credo, quantum quidem intelligo, sunt elegantissimae latinitatis; stilus planus et facilis, sed simul tersus et castus, uniformis et simplex, et tamen sublimis. Video Te selectiora tantum edere voluisse. Plurima de Tuis interspersa observo, utilia sane et curiosa; placet Historia de phosphore Brandiano, antea non satis mihi cognita. Quod ea occasione Phosphori mei mercurialis tam honorificam mentionem injicere voluisti, maximas ago gratias. Quae de Symbolismo calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum habes, nondum exhauriunt omnia, quae de hac materia ante hos quindecim annos inter nos fuerunt agitata. Forte oblitus es temporis longinquitate, quod tunc elicuerim modum applicandi haec, retrogrado ordine, ad summationes perficiendas, dum scilicet d^{-1}, d^{-2}, d^{-3} aliud nihil est quam $\int^{+1}$, $\int^{+2}$, $\int^{+3}$ etc. unde mihi regula subnata est (si meminisses, nam Tecum communicavi) differentialium summam vel integrale $\int y\,dx$ universaliter per seriem exprimendi, quae quidem eadem fuit, quam paulo ante, sed alia diversissima via inventam in Actis edideram: alia praeterea circa hunc symbolismum tunc notavimus, quorum in Miscellaneis jam pariter non meministi, forte quod brevitati studere voluisti. Inveni in illis quoque descriptionem Machinae Tuae Arithmeticae ejusque usus, qui facilis est, et, ut dicis, infanti inculcabilis, adeoque hoc nomine Machinae Polenianae, cujus quidem nihil vidi, multum praeferenda est; sed optandum esset, ut etiam structuram internam spectandam dedisses: alioquin ab oblivione non vindicatur Tua machina, contra hortatum insignium illorum quos nominas Virorum. In serius exhibitis reperio Notitiam Caerulei Berolinensis, nuper inventi, sed similiter non dicitur, quid sit vel ex quo paretur: habet ita Lector curiosus notitiam sine notitia. Ad pro-

pagandas scientias et artes pro bono publico eduntur, ut in Praefatione dicitur, haec Miscellanea, et ad sua in communem utilitatem conferenda invitantur curiosi; haec ergo in hoc libro non essent celanda, sed propalanda, ut alius ansam habeat ea ad majorem perfectionem perducendi: hoc enim pacto, non alio, in publicum redundat utilitas. Memini apud Boylaeum de Coloribus me legere, ex viridi aeris et sale ammoniaco, per aliquod tempus in fimum sepulto, obtineri elegantissimum caeruleum: tale quid ego quoque expertus, scilicet viride aeris, vel vitriolum Cypricum in pulverem contritum, et spiritu urinae vel salis ammoniaci aspersum, exhibuit caeruleum amoenissimum et purissimum, ipso ultramarino elegantius: sed color non est durabilis, quippe qui exhalante spiritu, et ipse paulatim evanescit. Tanto itaque gratior esset descriptio ipsius arcani de hoc caeruleo conficiendo, quod durabile dicitur et ultramarino decies viliori pretio parabile, praeter reliquas quae de eo praedicantur virtutes. Quod si detrectet inventor arcanum suum mecum communicare (quanquam a me, qui alius sum professionis, nihil damnosum sibi metuendum habet) vellem saltem scire, ubinam et quo pretio hoc caeruleum venale prostet.

Qui Physicam conscribere suscipit sine cognitione matheseos, nae is nugas agit: multi quidem suas nobis Physicas jactant principiis Geometricis superstructas, contra quae tamen ubique peccant et aperte monstrant, se leges mechanicas non intelligere. In horum numerum refero Villemotum Gallum, cui, ut apparet, curta fuit suppellex in Geometricis: ejus certe libellum de Systemate mundi *) non magnifacio. Videtur Auctor voluisse laureolam in mustaceo quaerere et Iliada conscribere post Homerum. De Physica posthuma Christ. Sturmii nihil scivi; extat quidem ejus Physica Electiva, opus magnum in 4to, ut et alia minor in 8° erothematice conscripta; de tertia nihil mihi constat.

Non equidem dicis, quid de animadversionibus meis super quibusdam locis Operis Newtoniani judices; olim examinavi totum fere opus, et plurima annotavi, quae censuram mererentur; sed istae notae schedulis consignatae inter adversaria latitant, ex quibus recolligere difficile jam foret. Praeter illa quae nuper communicavi, ecce quaedam alia, quae alia quaerenti in manus mihi in-

---

*) Nouveau Systeme ou nouvelle explication du mouvement des Planetes par Phil. Villemots de Lyon. 1707.

ciderunt. Pag. 331 Auctor, aquae de Vase dato per foramen effluentis motum definiturus, concludit tandem, aquam effluentem, motu suo sursum verso, perpendiculariter surgere ad dimidiam altitudinem aquae foramini incumbentis, id quod est contra receptam omnium de hydraulicis scriptorum opinionem, qui volunt, aquam effluentem sursum versam ad totam illam altitudinem assurgere posse, seu quod eodem recidit, aquam ea velocitate effluere, quam acquireret grave libere cadendo ex altitudine aquae foramini vasis incumbentis. Pag. 373 Hypothesis haec, qua supponitur, resistentiam illam ex defectu lubricitatis partium fluidi, caeteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes fluidi separantur ab invicem, non est verisimilis: quin potius quadrato velocitatis resistentia ista statuenda est proportionalis; habet enim utique rationem compositam ex ratione velocitatis et ex ratione superficiei asperae aequalibus temporibus superatae sunt autem superficies aequalibus temporibus superatae ab aequalibus figuris, ut ipsae figurarum velocitates, quas uniformes suppono; unde oritur ratio resistentiarum in ratione duplicata velocitatum. Pag. 374 unde cum impressiones sunt etc. duplex hic latet error; primo enim impressiones, qua orbes se mutuo per frictionem impellant, non sunt utique (ut Auctor supponit) in sola ratione virium resistentium, sed simul etiam earundem distantiarum a centro orbium, per naturam vectis, in quo virium momenta crescunt in ratione distantiarum ab hypomochlio, et in rotis vel orbibus in ratione radiorum; deinde vires resistentiarum non tantum sunt ut contiguae superficies et (quemadmodum supra ad Auctoris hypothesin annotavi) harum translationum, hoc est velocitatum relativarum, qua orbes a se invicem separantur, quadrata. Interim, quod mirabile hic accidit, duo hi errores se mutuo restituunt, faciuntque ut tempora periodica se habeant, sicuti in propositione asseritur. Sed pag. 376, ubi eosdem errores commisit Auctor, hi jam se mutuo non compensant, adeoque abludit a vera ratione temporum periodicorum partium fluidi in vortice infinito, per globum aliquem circa axem suum moventem agitato. Invenit enim haec tempora periodica in ratione quadrata distantiarum a centro sphaerae; ego vero in ratione sesquiplicata earundem, prorsus conformiter phaenomenis planetarum et satellitum, et ita vortices Cartesiani, contra opinionem Auctoris (qui falso suo

theoremati innixus eos convellere conatur pagg. 381 et 382) mirifice astruuntur et confirmantur: de quo multum sine dubio gloriatus fuisset Cartesius, si sesquiplicatam illam rationem temporum periodicorum, quae per observationes planetis competunt, potuisset demonstrare partibus fluidi vorticis ab attritu se mutuo impellentibus identidem necessario inesse: quod certe adversus Newtonum serio ad animum revocari meretur a Cartesianis, si vortices suos (quos Ile ideo tantum explodit, quasi nimirum phaenomenis non responderent) ab impacta incongruentia vindicare velint. Pag. 422 videtur hic minus recte supponi canalem cylindricum, cum praestet adhiberi conicum verticem in centro Terrae habentem. Plura nunc non suppetunt.

Quod attinet ad radium coloratum, de eo quod nempe nova refractione colorem non mutet, Newtono plene assentior; habeo in eam rem proprias observationes, jam olim institutas, quas Tecum communicarem, nisi nimium excrescerent literae; et quidem puto me posse ostendere, in quo Mariottus, qui contrarium asseruit, deceptus fuerit, sumendo scilicet (quod observanti facile contingere potest, nisi cautissime procedat) radium alium pro eo, quem mutati coloris credidit.

Miror audaciam Galli illius Nugueti nugatoris, qui se Auctorem Phosphori mercurialis apud Te jactare non erubuit: hujus nomen ne fando quidem audivi; scripsi nuper Varignonio, ut me doceret quid hominis sit iste temerarius: non capio autem, quid intelligas, quando dicis Te facile opinari quid rei sit.

Mira mihi narras de Paradoxis Stahlii, Professoris Hallensis, hominis, ut videtur, superciliosi et jactabundi; ejus quidem scripta nondum vidi, sed quanquam hujusmodi nugas legere non valde gestiam, gratum tamen erit Tua, quae ipsi reposuisti, inspicere, de quibus libenter judicium meum communicabo. Baglivi, medicus Italus, negat pariter spiritus animales concurrere ad motum musculorum, quos certa quadam crispatione contrahi putat; in simili opinione fuit Steno. Vale et fave etc.

Basileae d. 10 Dec. 1710.

CCXXI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo Tibi non plane displicuisse Miscellanea Berolinensia; mihi in iis maxime displicet multitudo erratorum typographicorum, caetera pleraque tolerabilia sunt. Quod si multa inessent Tuis similia, facile haec nostra Parisinis Londinensibusque certarent. Nunc vero, ut in aurem dicam, pauci sunt Berolini, qui aut possint aut velint aliquid praestare dignum memoratu. Itaque mihi hoc, quicquid est, vix precibus objurgationibusque extundere licuit, ut tandem aliquod specimen extaret, et ut sic dicam, obligatio continuandi imponeretur.

Symbolismum calculi algebraici et infinitesimalis dare volui simpliciter; de caetero memini inter nos de eo agi, et Te usum aliquem ad Theorema illud suppeditare, ubi summa per differentias omnium graduum colligitur; quod non Tu solummodo alia plane via habueras, sed et ego multos ante annos adhuc diversa ductaque ex solis proprietatibus numerorum, quam et Tecum communicare memini, cum mihi Theorema primum a Te repertum significasses.

Constructio Machinae meae Arithmeticae paucis describi non poterat; conservari autem poterit non tantum tali descriptione, sed et actu ipso. Habeo enim elaboratam, etsi ab artifice non optimo; unde id ago, ut perfecte elaboretur.

Caerulei Berolinensis curabo aliquid ad Te transmitti. Notitia data est τοῦ ὅτι, sed non τοῦ διότι; neque enim in meo arbitrio est extorquere ab hominibus, quae illi tanquam arcana venditant.

Ego quoque Villemoti libellum non magnifacio, in quo nec umbram demonstrationis invenire potui. Et miratus sum Dn. Fontenellum, istas esse aliquid, putasse, nugas.

Per Sturmii P h y s i c a m p o s t h u m a m intellexi continuationem operis Physici majoris, quod coepit, sed quod morte ejus abruptum fuit. Ajunt tamen in Schedis repertum esse sic satis promotum, atque adeo dignum esset ut edatur, quia diligens certe est in colligendis et dijudicandis iis, quae profundam meditationem non postulant.

Optandum est, ut Tua ad Newtonianum Opus monita colligantur in unum, et ipsi illi egregio Viro privatim mittantur, vel ad emendanda vel ad explicanda sua. Quod ad resistentiam attinet ex defectu lubricitatis ortam, seposito fluido, concipiamus globulum in tapeto aliquo ferri. Patet amissas in globulo vires esse aestimandas numero exiguorum pilorum elasticorum, quos flectere globum oporteat, ducto in vim unicuique horum pilorum impensam, idque pendere a longitudine itineris, itaque celeritates amissae sunt longitudinibus percursis proportionales. Sit velocitas integra g, residua v, erit amissa g — v; sit longitudo percursa l, erunt g — v ut l, ergo — d v ut d l; sed d l sunt ut v d t, ergo fit — d v ut v d t, seu aequalibus sumtis temporum elementis, sunt diminutiones velocitatum in quovis momento velocitatibus ipsis proportionales. Idem est si globo, qui in medio fertur, tribuas asperitatem, nam asperitates sunt colliculi elastici, qui radendo medium nonnihil deprimuntur et resurgunt. Et, si fluido tenacitatem aliquam tribuas, res eodem redit; concipi enim potest, quoties mobile a contactu partis fluidi se liberat, toties abrumpere fila viscosa, quibus retinebatur. Porro si, omissa tenacitate, solam consideres in medio resistentiam, quae oritur ex ejus mole, dum v. gr. globus in fluido motus partem fluidi loco pellere cogitur; itidem constat, licet ex alio principio, diminutiones celeritatum aequalibus temporum elementis esse celeritatibus proportionales. Hinc cum globus tormento emissus transit per aërem, reperi olim, quodcunque adhibeas genus resistentiae sive a mole aëris, sive ab asperitate globi et aëris tenacitate, semper tamen imminutionem celeritatis, quam quovis momento sentit globus, esse proportionalem celeritatis ejus residuae. Sed haec a Te optime dijudicari poterunt, qui etiam docebis, quatenus Tuis Newtonianisve consentiant.

Mihi quoque visum est Newtoni experimentis circa colores, quippe per tot annos crebro repetitis, magis esse fidendum, etsi La Hirius Mariotto (Viro equidem non spernendae diligentiae) testimonium perhibeat.

Facile assentiar Stenonio, nervos agere per crispationem quandam; sed illa ipsa crispatio, ni fallor, nisi per fluidum commeans explicari non potest; ut funes aqua, crines calore contrahuntur.

Videbo an et quid ad repliquam meam duplicaturus sit Stahlius; et faxo, ut cuncta Tibi communicentur, ubi descripta fuerint.

Sed interim desidero, ut quae ejus ad Vos forte pervenere, inspicere possis, inprimis justum Opus Physiologicum. Nam caetera fere Dissertationibus Academicis, magno numero ab eo editis, continentur. Modus ejus scribendi est paulo perplexior.

Diu est quod nihil a Dno. Hermanno nostro intellexi. Spero tamen valere eum et vigere, et ad Te subinde crebrius scribere, quam ad me remotiorem. Scripserat mihi olim de Fluidorum motu aliquid se meditari, quae materia satis est elegans; Catenariam quoque, Velariam et similia etiam, ubi ad differentias differentiarum descendendum est, velle se demonstrare ad Veterum morem, quia is modus scribendi ab Italis magis intelligitur. Hoc consilium non est spernendum: etsi enim nobis id agere non vacet, lubentissime tamen alios hunc laborem sibi sumere patiemur. Sperabam tale a La Hirio, sed ille spem meam destituit, et in Opere de Epicycloidibus revera infinitesimales adhibet inter demonstrandum, etsi hoc dissimulet.

Dn. Burnetus, Episcopi filius, ex quo hinc discessit, huc non scripsit, et literis meis, quibus ad interrogationem quandam ejus responderam, nihil reposuit, ut adeo ignorem quid agat et utrum adhuc in Batavis versetur, an ad Anglos redierit.

Dn. Hartsoekerus objectiones quasdam meas suae appendici Conjecturarum (Suites des conjectures Physiques) cum responsionibus inseruit.

Sed obiter tantum minuta quaedam tetigeram circa salia, circa mineralia etc. Nunc cum a me intellexisset, mihi atomos perfecte duros, et primum elementum perfectae fluiditatis non probari, expressit a me rationes judicii mei; scripsi ei, mihi rationem duritiei, ut omnia corporea, videri explicandam per causam mechanicam, nempe per motum conspirantem, qui per separationem turbetur, quam etiam Tuam esse sententiam aliquando intellexi. Ille in responsione fingit, se non intelligere quid monstri sit motus conspirans, et dubitare an non coincidat cum quiete Cartesiana. Dixeram, si durities sit qualitas quaedam occulta primitiva, non posse explicari nisi per miraculum. Itaque necesse est, ut explicari possit per mechanismum. Ille negat meum principium, quod omnia corporea mechanice sint explicanda: primo enim illa pendere a voluntate Dei, quasi voluntas Dei non nitatur rationibus sumtis ex natura subjecti, aut quasi Deus aliquam actionem producens in corporibus, non producat per modos naturae eorum congruentes.

Sed et multa alia promit, per quae apparet in primis philosophandi principiis haud parum ab ipso aberrari, quanquam id ei sit cum multis aliis commune. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 10. Febr. 1711.

CCXXI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.*)

Quas ad Te dedi 10. Decembris anni proximi elapsi, Tibi traditas esse spero; ad eas itaque me refero. Hasce autem nunc scribere volui, ut Hermannianas, quas ecce, nuper ad me missas, aliqua mea epistola comitarer, adjecto quoque excerpto ex literis Dni. Hermanni ad me datis, ex quo videbis ineptam Hartsoekeri arrogantiam in suggillandis nostris inventis. Si bilem suam in me tantum et in Phosphorum meum effudisset, possem forte propriam injuriam concoquere, crederemque me ipsi alicubi, quamvis inscium, offensae occasionem dedisse. Sed quid censes, quod egregios Viros, imo Te ipsum, et Newtonum tam indigne tractaverit? Ferendum non est hominem modice doctum, sine Mathesi et sine ulla profundiore notitia, cui nihil est praeter mediocrem vulgaris Physicae notitiam, et in vitris poliendis aliquantillam peritiam, tam contumeliose loqui, non dico de me, sed de Viris istis egregiis, et de re mathematica tam praeclare meritis et in dies merentibus. Quid absurdius simul et acerbius ab eo dici potuisset, quam Newtoni librum (opus certe omni laude majus) continere meras nugas, minus valentes quam Veterum qualitates occultas: item duodenos quosdam mathematicos (in quibus Te sine dubio complectitur) congressos esse, et iniise speciem quamdam societatis, vel commercii Encomiastici, quo se laudibus et elogiis mutuis cumulent et obruant, aliosque imperitiores, ne ignorantes videantur, in similem elogiorum cantilenam pertrahant, ut orbis eruditus saltem putet eos quoque initiatos esse istis mystericis .

. . . .

*) Von diesem Briefe bis zu dem vom 8. October dieses Jahres fanden sich die Originale nicht mehr vor.

Quod vero attinet ad Phosphori mei inventionem, quam adscribit Picardo, nimis quantum invidiam suam prodit, sed Clar. Hermannus, ut ex hoc excerpto patebit, meam fecit Apologiam, quam vellem in aliquo Diario vel in Actis publicari, ut obtrectatori os obturetur. Quid enim aliud est quam obtrectatio, hominibus ingerere, quasi essem plagiarius et observationem Picardianam mihi attribuissem, suppresso ejus nomine, cum tamen eum diserte nominaverim dixerimque observationem Picardianam mihi occasionem dumtaxat suppeditasse ad ejus Phaenomeni, fortuito casu detecti, causam investigandam, omnia Barometra postea luminosa reddenda, et tandem Phosphorum portatilem perpetuum inde conficiendum: haec autem, in quibus inventum meum consistere facio . . . . silentio praeteriit. Interim Tibi judicandum relinquo, annon et Tua res hic versetur, dum sententiam Tuam, mihi perhonorificam, in nuperis Miscellaneis Berolinensibus de hoc Phosphoro latam, severus noster Aristarchus evertit, et ita Tibi mali laudatoris notam tacite inurit. Hoc unum adhuc addo, quod simile non inepte huc quadrat, nempe si Insulae Americanae a Columbo primitus et quidem ex deliberato consilio detectae, non tamen impedierunt, quominus postea Americus Vesputius Terrae continentis detectionem, sui nominis appellatione, sibi vindicaret; quidni majori jure mihi debetur Phosphori mercurialis inventum, quamquam ex fortuita Picardi observatione deductum? Re enim comparative sumpta, major videtur progressus a lumine casuali Picardi, ad universalem Phosphorum mercurialem parandi artem a priori inventam, quam, si parva magnis componere fas est, ab Insulis Columbi, non casu, sed de industria detectis, ad Terram continentem Americi.

Intelligo Te in commercio literario esse cum Salomone Hottingero, medico Tigurino. Scire autem Te velim, cum ex occasione alicujus Disputationis hic habitae de Mundo (ubi Author Copernicanismum adstruens, ex Cosmotheoro Hugenii Planetis incolas adscribit) eum, inquam, nempe Hottingerum conscripsisse nuper ad refutationem illius aliam Disputationem sub titulo L i b r i N a t u r a e e x P s a l m o XIX etc. in qua Copernicanismum convellere volens, eum sacrae scripturae adversari contendit; argumenta autem quibus utitur sunt . . . . . ut facile conjicies, talia quae dudum sunt obsoleta et explosa . . . . . Caeterum bonus Hottingerus de rebus Astronomicis disserens, tam inconcinne et

fere pueriliter loquitur, ut facile pateat, eum non intelligere Elementa Sphaerica, imo nequidem terminos artis callere. Sic passim confundit Aequatorem cum Meridiano, Eclipticam cum Aequatore, et solem dicit cognominari ab Astronomis lineam Eclipticam, et hujus farinae plura . . . . Quod superest, vale, vir Amplissime, et favere perge etc.

Basileae 28 Februar. 1711.

CCXXII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Novissimas meas Tibi recte redditas spero. Interea alias a Te gratissimas cum inclusis Hermannianis hic loci, id est Berolini, accepi. Postquam enim Rex Societatem scientiarum nuper, proximo post anniversarium Coronationis die, solemniter inaugurari curavit, statisque vicibus congressus haberi jussit, huc excurrendum mihi putavi, ut conferrem aliquid ad ejus vigorem. Sed, ut facile intelligis, desunt nobis in his oris, a quibus aliquid magnopere expectes: inprimis Botanici, Anatomici, Chymici, a quibus aliquid singulare praestetur. Non est tamen spernenda detectio novi Caerulei, cujus specimen mitto. Color meliorem in ipso usu se exhibet, quam primo aspectu apparet. Mathesis profundior in his oris adhuc propemodum ignoratur. Sed cum Dominus Sturmius, Johannis Christophori Filius, hactenus Francofurti ad Oderam Professor, statione illa deserta officium Architecti apud Ducem Megalopolitanum in se receperit, me et amicis monentibus, de Hermanno nostro acciendo cogitatur, eumque in finem et a Wolfio et a me ad ipsum datae sunt literae.

Dnus. Hartsoekerus in aliis taxandis paulo est liberior et licet me non nominaverit, facile tamen intelligo, me ejus aculeis tactum fuisse. Caeterum meas quasdam objectiones desideravit, eisque in sua Conjecturarum illustratione, licet me non nominato, respondit.

Si vindicare tuum voles Phosphorum, ut scribis, de quo illum praecipitantius judicasse manifestum est, putem convenientissime id fieri posse in ipsis Novellis Reipublicae literariae, ubi aculei in Te sunt recensiti. Sed majus praeterea operae pretium foret,

si Conjecturas ejus Physicas aliquando per otium percurreres, et animadversiones in eas dares: inde enim utilitas non spernenda nobis accederet. Ea maxime profutura et Te digna ratio foret ulciscendi Virum non tam verbis, quam rebus ipsis. Et video multos ipsa scriptoris audacia capi, qui de rebus abstrusissimis tanquam compertis pronuntiat, ut ex ipso Naturae sacrario concilioque Deorum recens egressus videatur.

Cum Dno. Salomone Hottingero, Tigurino Medico, nullum mihi literarium commercium est. Eum olim apud nos transeuntem videre memini. Serus admodum venit, quisquis hodie in Copernicum scribit. Inaudiveram aliquid de Tigurina in eum tempestate, sed Theologum aliquem severiorem et sacris naturae non initiatum eam excitasse credebam; de Medico nihil tale suspicatus fuissem. Ego magis venia, quam ira dignos censeo, qui hic bono animo peccant, sed non bono judicio. Doctissimo Scheuchzero de tali judicio conquerenti in eosdem sensus scribo.

R. P. Reyneau Analysin nunc demum Berolini vidi apud amicum, et agnosco in ea multa esse non spernenda, tum ab auctore considerata, tum ex optimis scriptoribus sumta, quos vellem ubique indicasset. Quanquam erga Te meque, et alios etiam optime sese gesserit, et labores nostros commendaverit, vellem tamen generaliter fontes indicari. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Berolini Martii 1711.

P. S. Id ago ut Miscellaneorum voluminis novi materia colligatur, et rogo ut aliquid conferas, Hermannumque in idem invites.

CCXXIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postridie quam nuperas meas cum Hermannianis ad Te dimisi, accepi gratissimas Tuas die 10 Februar. datas. Miscellanea Berolinensia Tua instigatione prodiisse nullus dubitavi; ea de re Tibi non parum devinctus est Orbis eruditus, eoque magis quod ut dicis, obligatio continuandi jam imposita est. Multa certe in hoc primo Tomo, interque ea Tua imprimis, quibus mea nollem accenseri, publica luce dignissima deprehendi, et ideo Parisinis Londi-

nensibusve nihilo inferiora. Caeterum multitudo sphalmatum typographicorum, prout recte mones, non nihil deturpat hoc Opus.

Caeruleum Berolinense, quod promittis, grata mente accipiam: ubi obtinuero, conabor id propius examinare, et in ipsum, si pote, arcanum penetrare.

Icon Tua, quam expectare facis, utinam cito! me supra modum beabit, quod officii genus omni, et quo ipse jusseris, pacto demereri studebo.

De Sturmii Physica postuma edenda adhuc nihil audivi, foret haud dubie digna quae ederetur. Tecum omnino sentio, fuisse Virum diligentissimum in colligendis, quae profundam meditationem non postulant, cui etiam satis judicii fuit in discernendis bonis a malis, quamvis enim non semel paralogizantem deprehenderim ex. gr. in reddendis rationibus rectis homodromi et heterodromi; item Phaenomenorum Camerae obscurae vel Lanternae magicae. De reliquo nesciverim hodie quemquam, qui suppleat jacturam Sturmii, nisi is sit Scheuchzerus noster senior, Vir sane, etsi a propriis inventis non valde clarus, mirae tamen sedulitatis et indefessi laboris in conscribendis observationibus, tam a se in itineribus suis de industria institutis, quam ab aliis factis; item in componendis libris circa varia objecta, sicuti qui hactenus ab eo editi sunt abunde testantur, et nuper admodum ejus Physica Germanica altera vice recusa, cujus Tomus primus Tibi et mihi dedicatus est, alter vero Schrockio, Naturae curiosorum Praesidi, et Zwingero nostrati: non vero dubito, quin Auctor ipse hoc Tibi jam significaverit, simul et librum transmiserit. Sicubi pro ipso statio se offeret, minus commode enim in Patria vivit, opus sane laude dignum, si quid sapio, faceres, si eam illi procurares.

Quaedam ex notatis meis ad Opus Newtonianum intermiscui nuper scripto meo, continente solutionem problematis inversi virium centripetarum, et cum Academia Parisiensi communicando, quoniam ita occasio ferebat, sed Dn. Varignonius, cui schediasma miseram, delevit illa, subtimens scilicet ne Newtonus censuram, licet amicam, iniquius laturus esset.

Quae de resistentia ex defectu lubricitatis habes, videntur festinanter scripta, neque ea qua opus est attentione adhibita; imo si mentem Tuam rite capio, destruunt quae ante complures annos, cum de aestimatione virium ageretur inter nos, in ipsissimet Tuis literis ad me scripsisti, ut mox videbis. Concipia-

mus, inquis in literis Tuis novissimis, globulum in tapete aliquo ferri, patet amissas a globulo vires esse existimandas numero exiguorum pilorum elasticorum, quos flectere globum oporteat, ducto in vim unicuique horum pilorum impensam, idque pendere a longitudine itineris. Haec quidem verissima sunt, sed nescio quomodo cohaereat, quod subdis: itaque celeritates amissae sunt longitudinibus percursis proportionales. Videtur potius concludi debuisse, vires amissas esse longitudinibus percursis proportionales: nosti autem, vires utique non esse ut celeritates. Vel si mavis celeritates amissas considerare, dicendum fuisset, quod eodem recidit: celeritates emissae sunt temporibus impensis proportionales, sicuti videre est in ascensu gravium, quorum celeritates eadem lege, Te ipso quondam asserente, decrescunt ac globuli per medium pilis aequaliter elasticis obsitum penetrantis; adeoque computatio nunc aliter est instituenda, et quidem sic: Sit velocitas integra globuli g, residua v, celeritas amissa g — v: sit tempus impensum t, erunt g — v ut t; ergo — dv ut dt: hinc sequitur aequalibus momentis, aequales fieri diminutiones velocitatum, non vero, ut Tu concludis, diminutiones velocitatum in quovis momento proportionales esse ipsis velocitatibus. Olim saltem aliter ac nunc scripsisti; sic enim in literis 29 Julii 1695 habes: Supposito (fig. 174.) quodlibet medii punctum C esse uniformiter elasticum; si AC sit spatium percursum, erit CH, potentia amissa, applicata trianguli BAP, et CE, velocitas residua, applicata parabolae BED, cujus vertex est B. Quod si nunc consideretur resistentia, quatenus oriunda ab asperitate corporis moti vel a tenacitate fluidi, fateor idem esse, ac si solum supponatur aequabilis medii elasticitas; revera enim asperitates comparari possunt cum colliculis elasticis, qui radendo medium, nonnihil deprimuntur et resurgunt; tenacitas vero consistit in difficultate abrumpendi fila viscosa, quoties mobile a contactu partis fluidi se liberat, quibus filis retinebatur. Sed si abstrahendo ab asperitate et tenacitate, consideremus solam resistentiam, quae oritur ex medii mole removenda, dum v. gr. globus, in fluido motus, partem fluidi loco pellere cogitur, asseris itidem constare, licet ex alio principio, diminutiones celeritatum aequalibus temporum elementis esse celeritatibus proportionales. Quodnam hic in-

tendas principium, ego non assequor; interim mihi videtur in hac suppositione aliud principium non esse quaerendum quam hoc, quod nempe resistentia fluidi sit in duplicata ratione velocitatis, id quod vulgo ab omnibus admittitur, et singulari modo ex ipsa Tua virium aestimatione demonstrari potest. Hoc igitur principio assumpto, facile est ostendere decrementa celeritatum, aequalibus temporum elementis, esse non ipsis celeritatibus, sed quadratis celeritatum proportionalia, ideoque etiam esse ut vires residuas. Sit enim mobile m, spatium percursum s, velocitas v, vis residua f, tempus t; per regulam aestimandarum virium, f est ut vv, adeoque — df ut — vdv: est vero per principium hic assumtum — df, hoc est imminutio virium, ut vvds: ergo etiam (propter ds ut vdt) ut v^3dt, unde — vdv ut v^3dt, hoc est $-\frac{dv}{vv}$ ut dt: ideoque, tempusculis aequalibus, **decrementa velocitatum** — dv sunt ut earumdem quadrata vv. Ipsum vero principium de resistentiis fluidorum quadratis velocitatum proportionalibus, si bene memini, non tantum concessisti, sed et olim in literis Tuis ad me demonstrasti. Nescio itaque, quomodo nunc dicas, Te olim reperisse, cum globus tormento emissus transit per aërem, quodcunque adhibeatur genus resistentiae sive a mole aëris, sive ab asperitate globi, et aëris tenacitate, semper tamen imminutionem celeritatis, quam quovis momento sentit globus, esse proportionalem celeritati ejus residuae. Quantum enim ad globi asperitatem vel aëris tenacitatem, quatenus pro uniformi elasticitate haberi possunt, ostendi imminutiones celeritatum, aequalibus tempusculis, esse etiam aequales; quantum vero ad resistentiam ex mole aëris abigenda orta, vides neque tum imminutionem momentaneam celeritatis simplici celeritati residuae, sed quadrato ejus esse proportionalem. Optarem itaque, ut haec aliquantulum accuratius expenderes; videris enim, haec cum conscriberes, Tuam memoriam tantum consultasse.

Testimonium a La Hirio Mariotto perhibitum circa colores, mihi valde est sublestum . . . .
Steno statuit, non quidem nervos, sed musculos ipsos per crispationem contrahi, idque sine accessione novae materiae: ego cum Borellio, Willisio, Majorvio, et aliis, malui dicere contractionem musculorum peragi per inflationem aliquam ex effervescentia vel

ebullitione succi spirituosi cum sanguine oriundam, sicuti id in peculiari Dissertatione de Motu musculorum aliquando fusius explicui.

De scriptis Stahlianis nihil adhuc vidi; audivi tamen ab aliquo amico, qui ea ab aliquo peregrino sibi commodata obiter perlustravit, Auctorem arrogantius de se sapere, de aliis vero minus benigne sentire. De modo scribendi idem, quod Tu, dicit, eum scilicet esse perplexum et obscurum. Interim grata erunt, quae mecum communicanda promittis, ad litem vestram spectantia.

Quid nunc Hermannus noster agat, ex suismet literis prioribus meis adjectis intellexeris. Oportet quasdam ex suis ad Te literis periisse; sicuti enim Tu de ipsius silentio, ita et ipse de Tuo apud me queritur. Opusculum quod meditatur, sub titulo Mechanicae fluidorum, de quo proposito diu est quod mihi scripserit, forte propediem ad umbilicum erit perductum. De La Hirio nihil boni hanc in rem expecto: Sunt . . . .
. . . .
. . . . . omnia quae de Epicycloidibus et de figura dentium in rotis habet, ab aliis et inprimis a Romero Dano expiscatum esse intellexi. Quantitates infinitesimales inter demonstrandum adhibet quidem; negat tamen hoc . . . .
De Hartsoekero in praecedentibus meis. Videtur homo similis La Hirio, cui scilicet suum tantum placet, alienum displicet. Duritiem explicandam esse per motum conspirantem, non tantum mea est sententia, sed et studiosis meis in Collegiis philosophicis nunc ita inculcavi per plures annos, ut hic et in Batavis haec opinio jam satis invaluerit. Interim quid mirum, Hartsoekerum ἀγεωμέτρητον in primis philosophandi principiis aberrare.

Hucusque scripsi hanc Epistolam, cum ecce postrema Tua d... Martii data, traditur mihi, ad quam ob instantem Tabellarii abitum, multis respondere non licet; nec etiam multis opus est, cum in hac ipsa quaedam contineantur, quae responsionis loco esse possunt. Dicis Te mihi mittere specimen Berolinensis caerulei, sed non addis quando et qua occasione. Dubito valde, an Hermannus Sturmio succedere voluerit; nam, ratione salarii, pinguiori, ut puto, fortuna gaudet magis Patavii, quam qua gavisurus esset Frankofurti. Quocirca egregia foret occassio commendandi ad hanc stationem Scheuchzerum nostrum, vel, si eam ipsi non satis convenire censeres, commendare possem agnatum meum Nicolaum

Bernoullium J. U. L. Disputationis illius de Usu artis conjectandi, quae Tibi non displicuit, Auctorem, cujus ingenium in Mathematicis perspectum Tibi jam est per inventionem Regulae Newtonianae de inveniendis quantitatum algebraicarum divisoribus et a se amplificatae, atque per alia quoque specimina.

Bene mones de Hartsoekero, cogitabo de ea re. P. Reynaldi Analysis non eo est loco apud me, quo forte speravit. Video bonum Virum suscepisse quaedam supra vires, quae nempe non satis intellexit. Sic mera est Mataiologia, quae de Catenariis garrit, et de Isochronismo, similis sane Gregorio Catenariam quondam . . . . solvere conanti. Reliqua quae bona sunt in hac Analysi, partim ex meis, sibi, cum olim in praedio Marchionis Hospitalii essem et Reynaldus nos inviseret, cui scripta mea commodaveram, suppeditatis, partim ex aliis exscripsit. Hisce autem vale et fave etc.

Basileae 8 April. 1711.

CCXXIV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Rex Borussiae nunc domum ex Batavis redeat et cum eo Dominus Baro de Prinz, Minister Regius, qui Rerum Academicarum curam gerit, spero negotium Dni. Hermanni nostri perfici posse, ut Francofurtum ad Oderam vocetur. Dudum enim literis scriptis non ad me tantum, sed et ad alios oblationem accepit. Et dispiciendum putem, annon ei subsitui apud Patavinos possit Tuus ex Fratre Nepos, qui nuper, ni fallor, in Gallia egit. Id si Tibi e re videtur, communicanda erunt consilia cum ipso Domino Hermanno, et si quid conferre potero, faciam lubens, datis, si vobis videbitur, literis ad Inclytum Virum Bernardum Trevisanum, quem ob nobilitatem et doctrinam apud Curatores Academiae aliquid posse non dubito. Sed vellem non praecipitari discessum Dni. Hermanni, et, si fieri commode possit, annos ei praestitutos absolvi; ita enim discedet optima Reipublicae gratia, eritque in commendando validior. Et puto non multum abesse eum a meta, et facile fieri posse, ut aliquod adhuc temporis spatium effluat,

antequam Francofurtanum negotium penitus conficiatur. Sed haec Tibi scribo, fortasse enim ipse mallet discedere maturius. Itaque Tu pro prudentia Tua cum eo ages. Optimum meo judicio erit, ut ipse Curatoribus significet appropinquare terminum temporis, in quod operam addixerit: se vero dubitare an res domesticae ferant, ut diutius in Italia haerere possit: itaque consilium suum mature aperire voluisse, ut tempestive de successore cogitari queat: inde per occasionem ostendere poterit, esse Juvenem praeclare versatum in rebus mathematicis profundioribus, qui sibi sparta dignissimus videatur, et quem nominaturus esset, si res in suo arbitrio foret. Eum ubi nominaverit, non dubito, quin valiturum sit vel ipsum Bernoullianum nomen. Haec consilia mea aperire Tibi volui, qui desiderare videbaris, ut praeclaro illi juveni prospiceretur. Non dubito, quin futuri sint Itali nonnihil in Analysi nostra versati ad spartam illam Venetam aspiraturi, si discessus Dni. Hermanni innotescat. Itaque consultum erit, ut prematur, donec praeparata sint omnia.

Mitto specimen Coloris Berolinensis, quem Tibi non displiciturum puto.

Puto a me in prioribus festinatione erratum circa resistentiam tapetis, et rectiora esse quae olim scripsi, ut ipse probe judicas. Oblitus eram doctrinae meae veteris, et nescio, quomodo alia plane a me dicta constitutaque putabam.

Ut pili a calore crispantur contrahunturque, ita simile aliquid in nervoso genere ab influxu liquoris cujusdam subtilioris facile crediderim. Hoc ergo cum doctrina de spiritibus animalibus non pugnat, nec puto Stenonem spiritus animales negasse.

Romerum obiisse non sine dolore intellexi: ingentem ejus obitu jacturam passa est res mathematica, sed maxime Astronomia.

Scribitur mihi Parisiis Dn. Patrem Reynaldum librum de Calculo*) moliri; novumve an renovatum, non satis exprimitur. Prodit etiam nova editio operis Malebrancani de inquisitione veritatis. Quod superest etc.

Dabam Hanoverae 14 Augusti 1711.

---

*) La Science du Calcul des Grandeurs en general. Paris 1714.

CCXXV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quae mihi perscripsisti nuper de statu futurae vocationis Cl. Hermanni ad stationem Francofurtanam, eam cum ipso communicavi, serio hortatus, ut consilio Tuo morem gerat, neque praecipitet discessum, cum praesertim aliquod temporis sit effluxurum, antequam Francofurtanum negotium, ut dicis, penitus conficiatur, eoque magis, quod terminus temporis, cui se adstrinxit Hermannus, nondum expiraverit. Tuam interim, quam offers, operam in procuranda Agnato meo successione Hermanni, acceptamus animo gratissimo, sive id fiat literis ad Inclytum Virum Bernardum Trevisanum dandis, sive alio modo, quem conducibiliorem judicaveris. Scimus enim commendationem Tuam fore efficacissimam, atque sine qua Hermannus suam Stationem Patavinam non obtinuisset, nec obtineret Francofurtanam. Dubito vero, an hanc sit amplexurus, etsi serio velit; vereor enim ne reluctantem habeat Patrem suum, qui ipsum in Patriam revocatum desideraret, hac praesertim occasione, qua in Academia nostra aliquot Professorum sedes vacant, quanquam non adeo magna spes pro illo affulgeat. Quidquid autem attigerit, ut Francofurtum ire vel non possit vel non velit, in omnem eventum Benevolentiae Tuae commendatum volo Agnatum meum. Hic certe non minus feliciter spartam mathematicam exornabit, quam vel Hermannus, vel quisquam alius; et qui nondum complevit annum vigesimum quintum, ubi ad maturiorem aetatem perveneriti, nullus dubito, quin Bernoullianum nomen (si quid valet) sit egregie tuiturus eique augmentum non spernendum additurus.

Caeruleum Berolinense, cujus specimen misisti, pro quo debitas exsolvo gratias, videtur elegantissimum: an vero requisitam habeat durabilitatem in picturis, ubi cum aliis coloribus permiscetur, aut etiam in illuminationibus mappis Geographicis superinducendis, hoc tempus docebit. Nonnihil ejus aqua gummata dilutum et chartae candidae illitum radiis solaribus exposui, visurus num quid de vivacitate sua amissurum esset; deprehendi revera aliquantulum expalluisse. Dedi quoque aliquid nostro cuidam Pictori, periculum ejus facturo cum oleo; laudavit coloris elegantiam, sed putat nihil aliud esse, quam Indicum arte quadam praeparatum.

Promisisti mihi Tuam Iconem, cujus oblitus esse videris. Ego vero magno teneor desiderio: quare permittas, ut Tibi memoriam refricem: pretium Pictori solvam, vel solvi curabo lubentissime.

Gaudeo Te revocasse ea, quae in prioribus festinanter scripsisti circa resistentiam, postquam monui ea non cohaerere cum iis, quae olim ad me de eadem materia scripseras. Ita enim nunc non fiet, ut quod privatim, etiam publice Tibi excidat in veritatis praejudicium, et in ipsorum Tuorum assertorum destructionem; nihil magis cum quaerant adversarii, quam ut in nosmet ipsos vertant arma nostra, sicubi vident aliquam contradictionem ex festinatione commissam.

Cl. Hermannus scribit se aliquid parare pro secundo tomo Miscellaneorum Berolinensium: ubi scivero hujus Tomi impressionem imminere, aliquid pariter et ego submittam, quod si dignum judicabitur, inseri poterit. Interim vale et fave etc.

Basileae a. d. 3 Octobr. 1711.

CCXXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Redux Torgavia, ubi Nuptiarum Czarigenae solemnia spectavi et ipsi magno Russorum Czari collocutus sum, Tuas inveni, inclusasque ad Dominum Menkenium misi.

Ad illustrissimum virum Bernardum Trevisanum non aute de re nota scribam, quam ubi simul Dn. Hermannus noster animum abeundi suum declarabit.

Si constet Dn. Hermannum ad Francofurtenses non iturum, sperem de Domino Agnato Tuo utiliter agi posse, neque enim res praecipitabitur.

Credo Dn. Hermannum ab annorum praefixorum exitu non multum abesse. Itaque, ni fallor, poterit mentem abeundi commodo tempore declarare, sed ita ut simul significet, terminum praefixum a se expectatum iri. Id enim ad bonam fidem et dignitatem pertinet, eoque facilius audiemur pro alio agentes. Omnia igitur cum illo et deinde mecum recte constitues; neque enim dubito, quin pro gratitudine sua Tibi et Tuis faveat.

Pictori, qui Iconem meam nuper paravit, male successit.

Caeruleum Berolinense ex Indico esse non putem.

Diu nihil intellexi de studiis, praesertimque de rebus mathematicis, sed Tuo favore discere potero quid geratur. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 3 Decembr. 1711.

P. S. Incipio arthritide per varias partes, nempe pedes, manus, genua vagante, nonnihil vexari. Haud quidem diu durat, et fere quindecim diebus perfungitur, et est tolerabilis; sed vereor deteriora; mala partium solidarum, maxime membranacearum, prae caeteris curatu difficilia sunt.

CCXXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz*).

Ex quo postremas Tuas accepi, advolarunt quoque literae a Clarissimo Hermanno, aliaeque ex aliis locis, ex quibus, quod ad studia nostra spectat, Tecum jam libenter communico, etsi non magni sint momenti. Et quidem quod ad Hermannum attinet, ille probat consilium Tuum de non declarando animo suo abeundi, nisi paulo tantum ante terminum sibi praefixum, et promittit se omnia tentaturum, ut successio Agnato meo facilitetur. Credit quosdam ex ipsis Italis suae stationi vacaturae inhiaturos: inter alios praesertim Verzagliam, meum quondam discipulum . . . . Dubito etiamnum, an unquam sit iturus Francofortum cum Parentis sui venia; quare si aliquando constiterit, meam me non fefellisse suspicionem, operam Tuam non male collocabis in substituendo meo Agnato, qui Tibi ad ultimum vitae halitum devinctus erit; negandum quippe non est, stationem Francofurtanam multum esse praeferendam Patavinae.

Scripsit mihi Hermannus se Apologiam nostram suscepturum contra Parentium et Hartsoekerum, sub forma Epistolae Anonymi ad Anonymum, ut scilicet inventa tum Tua, tum Hugeniana, Newtonia et mea contra hos suggillatores vindicet. Guido Grandus Monachus in Solutione Problematis mei de transformatione curvarum eundem paralogismum commisit, quem Moivraeus et Craigius,

*) Von diesem Brief fand sich das Original nicht mehr vor.

quemque hic nuper publice agnovit in Transactionibus Anglicanis, ubi simul revocavit, quod contra solutionem meam genuinam per motum reptorium inventam, quam mechanicam esse praedicaverat, protrusit in lucem. Ad hanc palinodiam, quam ursi, sine dubio aegre descendit . . . . oportet ut praeterea confiteatur, se igitur hoc Problema de transformandis curvis, quod ut leve quid traducebat, non solvisse, nec hodienum solvere potuisse . . . . ut inposterum discat, cohibere judicium de rebus nondum satis attente examinatis.

Accepi nuper literas a Nobil. Burneto ex Anglia, qui, studio Theologico relicto, Juridicum amplexus est: scribit, Cl. Moivraeum ad prelum parare librum aliquem de Alea (sur le hazard) qui multo latius se sit extensurus, quam liber ille Gallicus Auctore Montmortio, qui ante aliquot annos in lucem prodiit. Communicavit praeterea experimenta quaedam a societate Londinensi facta circa descensum gravium: globum scilicet ex argento vivo (haud dubie acalgamato, quod non addit) diametri $\frac{8}{16}$ pollicum, et ponderis 908 granorum, descendisse per 220 pedes anglic. quatuor minutis secundis, sed globum vitreum diametri $1\frac{1}{16}$ poll. gran. 510 per eandem altitudinem descendisse $8\frac{1}{2}$ secund. ita ut hic plus quam duplo majori tempore opus habuerit, quam ille, quod resistentiae aëris, quae majorem effectum habuit in vitrum, quam in mercurium, est adscribendum. Discrepantiam autem tam sensibilem non credidissem. Alterum experimentum erat, quod aër perflans metallum aliquod candens (forte liquefactum) ad respirationem sit inutilis: item quod refrangibilitas in diaphanis fluidis non gravitati specificae, sed eorum imflammabilitati proportionetur. Sed non satis capio, unde enim ;aqua duceret suam refrangibilitatem, siquidem inflammabilis nullo modo dici possit.

Accepi nuper sub involucro, sed sine adjectis literis, schedam aliquam impressam sub hoc titulo: C o l u m n a H e r c u l e a, s e u P r o b l e m a P r a g e n s e, A u g u s t i s s i m o R o m a n o r u m I m p e r a t o r i C a r o l o VI s u b m i s s e c o n s e c r a t u m, o m n i b u s G e o m e t r i s i n s t r e n a m a n n i 1712 p r o p o s i t u m. Ipsum vero Problema, quod auctor tribus distichis concepit, est valde triviale, ut mirer ipsum non puduisse id in publicum spargere. Huc enim redit: I n v e n i r e s p h a e r a m, c u j u s s u p e r f i c i e s, u n a c u m s u p e r f i c i e d a t i a l i c u j u s c y l i n d r i r e c t i (e x c l u s i s b a s i b u s) a e q u a l i s s i t s u p e r f i c i e i g l o b i d a t o C y l i n d r o c i r c u m s c r i p t i.

Forsitan etiam ad Te exemplar aliquod missum est. Interim aliquis ex Discipulis meis solutionem suam, in simili scheda conscriptam, protinus Pragam remisit, sub hoc titulo: Columna Herculea, sine labore Herculeo superata, seu Problematis Pragensis, Augusto Romanorum Imperatori Carolo VI consecrati solutio, et constructio, intra minus quam semiquadrantem horae inventa et exhibita ab infimo Mathematum Tyrone, una cum duplici Problemate, altero longe ultra fretum Herculeum petito, et Problematistae redhostamenti loco, vicissim in strenam proposito. Duo autem ista Problemata ita sonant: Invenire Rhumbum, qui transeat per data duo loca, longitudine et latitudine differentia; 2°. Determinare Rhumbum brevissimum, a loco dato ad Meridianum positione datum. Videbimus, quantus vir sit Pragensis. Misissem Tibi schedam integram mei Discipuli, nisi id molestum Tibi fore metuissem.

Ecce hic schediasma, quod nudius tertius accepi a Cl. Varignonio, continens responsionem ejus ad Guidonis Grandi librum De infinitis infinitorum. Rogat ille, ut porro mittatur Lipsiam, Actis inserendum *), optatque, ut si liber Grandi nondum est recensitus, ejus recensio et responsio haec in eodem mense prodeant. Cum non dubitem, Te demereri velle Cl. Varignonium, curabis ut res ad ipsius votum succedat. Meditatus sum novam et facilem rationem explorandi fluidorum gravitates specificas ope Pendulorum, et longe quidem accuratius quam per vulgaria illa instrumenta (pese-liqueurs) hactenus usitata; forte aliquid de ea re ad Acta mittam, aut ad Miscellanea Berolinensia, si ea continuantur.

Doleo Pictori, qui Iconem Tuam paravit, male successisse; an autem ea potiundi nulla spes superest? Nullone pretio habenda? Aegre intellexi nec sine dolore, Te incipere vexari Arthritide vaga. Species est Podagrae, cujus ego jam aliquot insultus habui, ex quo in Patriam reversus sum: nosti vero, quod de ea non male ominentur Medici, si ea demum venit, hac qua Tu es aetate. Summitates urticarum, mensibus vernis collectae, et inter duo folia chartae exsiccatae, a quibusdam hic summo cum fructu tanquam arcanum usurpantur, ad modum potûs

*) Act. Erudit. 1712 p. 164.

Theae; certum est, urticam insigne esse diureticum: oportet autem potum istum continuare quotidie per sat longum tempus. Hisce vale et favere perge etc.

Basileae initio anni 1712.

CCXXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Significo expeditam jam esse vocationem Clarissimi Hermanni nostri ad Academiam Francofurtanam, sed non ideo minus poterit rem tegere Patavii et moram trahere, donec terminus expirarit, atque interim praeparare iter Domino Nicolao Bernoullio. Nec dubito et nominis Bernoulliani claritatem et commendationem Hermanni ipsius pondus habituram. Quod si a me aliquid conferri possit, indicabis tempus ac modum.

Antagonistae Hermanni ad successionem haud dubie aspiraturo oberit opinor admissus nuper error, quantum ex Clarissimo Hermanno intellexi, et ipsa contra monitorem Hermannum impotens acerbitas. Chartas ille Tuas secum ex communicatione Tua, sed non et ingenium judiciumque abstulit, quod communicare cum ipso non potuisti. Fortasse e re erit, Tuo ac Varignonii judicio errorem quem admisit damnari, ut qui rem discutere satis nequeunt ex rationibus, autoritate moveantur. Fateor, si omnia paria essent, Italum ab Italis extraneo et Helvetio et religione diverso praelatum iri; sed nunc cum nondum apud eos satis radicata sit nova analysis, recte exteris utentur, donec iis indigere desinant.

Varignoniana ad Grandii objectiones responsio in Actis Lipsiensibus mense Aprili comparebit; adjeci Observatiunculam notavique, etsi possit dici, — 1 et similes expressiones significare nihilo minora, non tamen dari rationes nisi imaginarias, quarum antecedens aut consequens sit quantitas nihilo minor, seu rationem — 1 ad 1, vel 1 ad — 1 esse imaginariam. Quod inter alia ex eo probo, quia huic rationi vel simili nullus respondet Logarithmus.

Quia Dn. Hermannus vocatus est Francofurtum, fortasse optimum erit, ut illuc eat Patavino tempore expleto; nam si recuset, vereor ne alius irrepat, nec liceat de Dno. Agnato Tuo cum fru-

ctu agere. Sed si adeat locum, facilius opinor obtineri deinde substitutio poterit.

Vereor ne in novissima Experimenta Londinensia de descensu gravium error irrepserit.

Pragensis ille Mathematicus, qui Herculis columnas transiisse sibi visus est, fortasse Jesuita aliquis fuerit ex numero mediocrium Geometrarum, et vereor ne quicquam de Rhumbis intelligat.

Nescio an habeant Lipsiae librum Grandii, itaque fortasse recte illuc aliqua ejus recensio missa fuisset; sed mihi quoque non est ad manus.

Pro urticarum remedio gratias ago.

Spero Dominum Cognatum Tuum in posterum, cum mihi honorem literarum suarum impertietur, aspersurum aliquid ex suae eruditionis penu, quo doctior fiam. Nam hac etiam aetate discere mihi dulce est. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 16 Martii 1712.

CCXXIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas nuperas acceperis, quibus significavi vocationem Dni. Hermanni nostri in Academiam Francofurtensem esse expeditam. Nunc addo, ipsum Dno. Wolfio, Professori Hallensi, scripsisse, mox affore sese ad stationem capescendam. Spero tamen nihil praecipitaturum, nec ante tempus Patavio abiturum, ut benevolentia Procerum Venetorum conservetur, promissisque satisfiat, et facilius surrogatio obtineri possit. Nam Berolino non usque adeo urgebitur, ut veniam maturioris discessionis a Venetis petere necesse sit futurum. Credo meas interim literas ipsi redditas, et non ingratum accidisse qualecunque consilium, ex bono animo profectum, de rebus praecipitandis, antequam digno successori via sternatur. Nec dubito Te quoque in eumdem sensum literas ad eum dedisse, omniaque adhuc in integro fore. Ubi ergo intellexero, quo res sit loco, quaeque sit Hermanni nostri sententia, faciam quae e re fore judicabitis, et si vobis ita videbitur, ad Illustrem Virum Bernardum Trevisanum pro Agnato Tuo scribam.

Et credo pondus habebit apud ipsum aliosque intelligentes, quod novas Methodos nondum satis in Italia intelligi, ex erroribus tum Guidonis Grandii, qui Problema Tuum male solvit, tum illius discipuli Tui . . . . intelligi potest. Itaque rectissime facient Proceres, si vocent peritum verae Analyseos, ut radices meliores in Italia figere possit. Id quoque Hermannus insinuare poterit. Alioqui vereor ne successorem accipiat, quem minime velletis . . . .
Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 7 April. 1712.

CCXXX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas Tibi rite redditas puto; nunc significo advenisse a Cl. Hermanno scriptas, quibus significat acceptatam a se vocationem responsione Berolinum missa; summo autem studio operam a se datum iri, ut Dominus Agnatus Tuus surrogari possit. Agnoscit autem ad hoc obtinendum fore consultum, ut ante praefixi sibi apud Patavinos temporis exitum non discedat, quo plus gratiae et auctoritatis habeat sua conterranei commendatio. Sed veretur ne tanta mora sibi Berolini noceat; nam integrum adhuc annum superesse, in quem Patavinis sit obstrictus. Itaque petit, ut sententiam meam rescribam. Respondeo, mihi videri posse discessum bona cum Berolinensium gratia trahi, vel ideo quod negotium Francofurtanae vocationis ad extremum usque in incerto fuit, nonnullis contra machinantibus. Itaque Hermanno in ea incertitudine non licuisse prospicere rebus suis et praepare se ad discessum, bona cum gratia Procerum Venetorum impetrandum, quibus utique paulum spatii dandum sit ad novam vocationem, cum ipsae leges, quibus illuc vocatus sit, tale aliquid exigere videantur. Idque me velle in antecessum insinuare Berolinensibus, et ostendere, pene impossibile fore Hermanno Francofurtanam stationem adire hoc anno. Reliquos aliquot menses deinde ex anno sequente etiam facile indulgebunt, quanquam etiam fortasse, si confici interim mature posset Domini Agnati Tui vocatio, promptior discessus alio subrogato minus difficilis futurus esset. Caeterum illud prudenter

monet, Proceres Venetos amisso Guillielmino talem quaesituros Mathematicum, qui etiam circa curam aquarum utilis esse possit; itaque magnum pondus habiturum, si a Domino Agnato Tuo, sagacis utique ingenii Juvene, tale quid expectari posset. Quare mihi in mentem venit, recte illum facturum, si quam primum huic negotio animum applicet, et re Tecum communicata, cui nihil in his rebus arduum est, promulsidem aliquam edat in hoc, unde spem illi concipere queant, accedente ipsa harum rerum tractatione, futurum illum in eo genere utilem Reipublicae suae. Et sane res est per se egregia et non minus ob subtilitatem, quam ob usum scitu digna. Si excurreret ad Batavos ibique aquaria opera inspiceret, in plurimum ad commendationem facere posset. Sed haec mea sunt cogitata, quae Tuis summitto, profecta ex optimo animo, et vobis et Reipublicae consulendi . . . .
. . . .

Dominum Agnatum Tuum rogo ut a me salutes; is rem gratissimam faciet, si aliquando meditationes suas mecum communicabit et quae in re literaria agantur docebit. Non dubito, quin plurimum ei profuerit iter Parisinum. Annon sperare licet, inedita quaedam utilia in Domini Fratris quondam Tui Jacobi schedis adhuc latentia in lucem proditura.

Tu quoque, cum multa adhuc praeclara haud dubie in numerato habeas, velim ne meditationes Tuas perire sinas, quibus nemo pretium ponere me scit melius. Inprimis optem ut cogites de Mathesi magis magisque ad naturam applicanda. Digna Te sunt, quae de musculis dedisti; talia plura dare posses, quae usum ostenderent Matheseos etiam in re medica. Scis magnas nunc esse lites in Anglia, in Batavis, in Gallia, de usu Mechanices in Medicina: quidam negant, omnia fieri mechanice in nostrorum corporum actionibus, in quorum numero est Stahlius ille, qui per literas mecum certavit, sed credo semet ipsum non satis intelligit. Quidem contra omnia putant explicari a nobis posse mechanice. Ego neutris accedo. Omnia quidem in his mechanice fiunt, sed nondum eo usque profecti sumus, ut omnia mechanice explicare possimus. Interim non spernendum est hoc studium Mechanices, sed magis magisque excolendum. Videntur in organicis plurima constare perpetuis vibrationibus insensibilibus, quae cum videmur quiescere, a contrariis coërcentur. Itaque res vere ad vim elasticam redit. Ipsam memoriam in vibrationum perduratione consi-

stere suspicor, ut campana pulsata diu adhuc tinuit assonatque . . . . Itaque fluido, quod spirituum animalium nomine venit, non videmur habere opus, nisi ad ipsam vis elasticae rationem reddendam, quae tamen ad praxin necessaria non est, quanquam non sit negligenda ad explicandam summam rerum . . . .
Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 6 Maji 1712.

P. S. An scis, qui urticarum summitatibus cum fructu usus sit? Ad Dominum Bernardum Trevisanum, scriptis celebrem, cum quo mihi subinde literarium commercium est, et Dominum Quirinum, Nobilem Venetum alium, qui mihi est amicus diuque in Aula nostra egit, in Domini Agnati Tui gratiam scripsi, et literas ad Dominum Hermannum misi ab ipso tradendas.

CCXXXI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ad ternas, quas abs Te accepi, literas nunc una vice respondeo. Gratum fuit intelligere, vocationem Cl. Hermanni ad Academiam Francofurtanam tandem expeditam fuisse: ejus me jam antea certiorem fecerat Cl. Wolfius, qui misso ad me protinus apographo Epistolae Regiae ad Hermannum datae simul me rogaverat, ut illud porro sine mora mitterem ad eundem majoris securitatis gratia, ut si forte autographum ipsum per aliam viam missum intercideret, saltem illud alterum ad manus ejus pervenire posset. Intellexi postea, utrumque Hermanno rite traditum et vocationem acceptatam, et ita quidem, ut ex instigatione Cl. Wolfii, hac adhuc aestate discessum Patavio sibi suscipere proponeret. Nunc vero ubi videt hoc fieri non posse salva Procerum Venetorum benevolentia, quibus in sex annos se addixit, mutavit sententiam constituitqne sextum etiam annum, qui termino adhuc deest, in statione sua complere, Tuo consilio et hortatu, ut puto, inductus, qui ipsi persuasisti nihil esse quod discessum valde urgeat, eumque facile trahi posse bona cum Berolinensium gratia. Sic

itaque non dubito, posse Hermannum paulatim Venetorum animos lucrari pro Agnato meo sibi surrogando, quando praesertim accesserit Tua commendatio, quae prae omni alia plurimum virium et efficaciae habebit. Rescisces vero ab Illustr. Trevisano et Quirino, ad quos in gratiam Agnati mei scripsisti, numquid spei affulgeat futuro felici successui, quem Tibi unice acceptum feremus gratique semper agnoscemus. Non male suades, ut Agnatus Mechanicae aquariae se applicet; idem et ego suasi, quod tantum effecit, ut forte brevi ad Batavos sit excursurus, ibique, quae ad hanc rem spectant, accuratius explorare possit, modo itineris sumtus non deterreant Patrem ejus. Caeterum Agnatus jam nuper ad Tuas respondit, is salutem officiosissimam cum cultu suo per me Tibi dicit. Magnopere desiderat vocationem extraneam; imo et ego non declinarem, si denuo aliqua non spernenda mihi offerretur, sicuti ante sesquiannum a Leydensibus oblata fuit, quam certe si haec, in quae incidimus tempora praevidissem, non recusassem; nosti enim sine dubio tumultus bellicos in Helvetia nostra excitatos, periculi plenos, nisi bellum religionis, in quod erumpere facile possent, prudenter praecaveatur. Huic publicae calamitati, quae totam spectant Helvetiam, adde et alteram, quae Basileam nostram premit, dum jam a longo tempore luctamur cum fame ex eo tantum oriunda, quod Galli, nescio qua causa, nobis denegent frumenta ex Sundgavia et Alsatia huc asportari solita, ipsi interim eorum copia abundantes. Unde vides, quid expectandum esset a vicinis nostris, si omnino liberas haberent manus; et metuendum est certe, ne pace reddita toti reliquae Europae, bellum sedem capiat in Helvetia atque quod primo fuit infestinum, tandem ei se etiam Extranei Principes immisceant, nostramque adeo tranquillitatem per aliquot saecula nobiscum habitantem conturbent et expellant. Utinam metus noster sit vanus!

Non prorsus Tecum sentio, rationem -1 ad 1, vel 1 ad -1 esse imaginariam ex eo, quod huic rationi nullus respondeat Logarithmus; supponis enim numerum negativum nullum habere Logarithmum, cujus contrarium ego sic probo: Esto x numerus variabilis, per infinite parva crescens, cujus Logarithmus sit lx; dico eundem lx respondere ipsi $-x$ aeque ac ipsi $+x$: hoc est $lx = l-x$. Nam scis dlx esse $= \frac{dx}{x}$, hoc est differentiale alicujus Logarithmi haberi dividendo differentiale numeri per ipsum

numerum; cum itaque $\frac{dx}{x}$ sit aequale $\frac{-dx}{-x}$, patet propositum. Ecce rei connexionem $dlx = \frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x} = dl - x$, ergo etiam $lx = l - x$. Unde vides (fig. 175) curvam Logarithmicam ABC habere suam comparem $\alpha\beta\gamma$, ut ex. gr. Hyperbola suam oppositam, ita ut, sumta BE pro unitate, EF sit Logarithmus non tantum ipsius CF, sed et ipsius γF, quae designat numerum prioris negativum.

Missa nuper ad me est altera Scheda, continens solutionem Problematis Pragensis ab Austriaco quodam, a quo etiam proponitur vicissim idem Problema, sed nonnihil auctum, de construenda nempe basi ex semiglobo truncato columnae substernenda, cujus superficies cum superficie columnae et globi impositi habeant rationem continuam. Videtur ûterque, et Problematista et Solutor, ad eundem ordinem Geometrarum referri debere; nam trivialia sunt utriusque, et a neutro solutionem Problematis de Rumbis sperare possum.

Quaeris in postremis Tuis, an sciam qui urticarum summitatibus cum fructu usus sit: respondeo me ex ore quorumdam audivisse, qui in se ipsis experimentum cum successu fecerunt, ita ut jam passim ejus usus apud nos invaluerit, et ipse ego jam per aliquot hebdomadas eodem utar, ut nimirum mature occurram podagrae jam aliquoties se mihi manifestanti, et pectoris fluxionibus, quibus saepe vexor, contra quas et reliquos pectoris affectus inprimis urticae commendantur: videbo quantum mihi profuerint.

Quae de usu Matheseos in Re medica mones, utilia sunt, de quibus aliquando cogitabo. Sunt sane mihi multa, quae olim conscripsi, sed indigesta, Physico-Medico-Mechanico-Mathematica. Ubi vacaverit, aliquid in ordinem redigam, Miscellaneis Berolinensibus, si continuarentur, inserendum. Etiam ego sum in opinione, organica corpora naturalia consistere in perpetuis vibrationibus se mutuo coërcentibus, et a quadam elasticitate originem habentibus, ita ut adsit quaedam veluti actio et reactio inter partes, quarum quamdiu altera alteri non praevalet, machina quiescit: sicuti aër condensatus, cujus partes singulae se mutuo urgent viribus aequalibus, et tota tamen moles quiescit, quamdiu vas, cui inclusus, probe undiquaque munitum et obturatum est. Quod ejus elaterium attinet habeo causam Physico-Mechanicam ad explicandam ejus pro-

prietatem, quod vires aëris elasticitates sint ejusdem densitatibus proportionales caeteris paribus, hoc est, servato eodem caloris gradu: cujus rei rationem evidentem et claram nemo dedit.

Quod superest, vale et fave etc.

Basileae a. d. 25 Maji 1712.

CCXXXII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ita est, ut ais. Res Helveticae mihi quoque mirifice turbatae videntur. Fortasse Tigurini et Bernenses biennio abhinc certiore successu rem egissent. Nunc Anglorum vacillatio, quae spes Gallicas resuscitat, efficiet ut Pontificii etiam in Helvetia animos sumant.

Venetiis aut Patavii nihil amplius intellexi.

Miror Te pro acumine Tuo non vidisse, haud posse dari Logarithmum τοῦ -2, quia non potest dare Logarithmus τοῦ $\sqrt{-2}$, qui esset prioris dimidius. At dicis, differentiale numeri $-x$, quod est $-dx$, divisum per numerum $-x$, dat differentiale logarithmi $\frac{-dx}{-x}$ seu $\frac{dx}{x}$. Sed haec regula, quod differentiale divisum per numerum dat differentiale Logarithmi, et quaevis alia de Logarithmorum natura et constructione non habet locum in numeris negativis, ut reperies, ubi demonstrare voles. Ipsa etiam figura ostendit, non posse perveniri ad log. -1 vel similem, quia x (fig. 176) ordinata logarithmicae LL non potest ita decrescere, ut evanescat tandem seu perveniat ad 0, et deinde transeat in contrariam partem seu ad -1, ut fit (fig. 177.) in curva CC. Nam ad hoc obtinendum debuisset curva logarithmica secare axem, qui tamen ei est asymtotos.

Si Leydam adhuc cogitas, suggero vocationem aliquam ibi esse debere Tibi convenientem, nam Muysius, cujus Elementa Physices forte vidisti, Franekerae Medicinae Doctor et Matheseos Professor, illuc, ut intellexi, cogitat et vocari sperat. Itaque non esset differendum, si quid moliris. Elementorum ejus superbus est titulus; ait enim methodo mathematica esse demonstrata, sed ego in illis plus subtilitatis, quam soliditatis deprehendi. Recte

quidem contra vacuum et Atomos pugnat, sed male extensionem habet pro substantia, et ab ea derivat impenetrabilitatem vel ἀντιτυπίαν, cum tamen corporis extensio nihil aliud sit, quam repetitio seu diffusio Antitypiae; atque ita extensio non est primum, sed aliquid supponit. Recte quidem contendit duritiem in corporibus a motu oriri, separationem impediente; sed an rem sufficienter explicaverit, dubito. Anglorum tamen jactatam pro vacuo demonstrationem recte mihi refutare videtur.

Fuit mihi cum Hartsoekero quaedam per literas concertatio. Contendit ille, esse quosdam atomos in perfecto aliquo fluido omni cohaesione carente natantes, et ex his duobus omnia oriri. Ego nec perfectas atomos nec perfectum fluidum admitto, putoque in omni corpore esse aliquem cohaesionis et aliquem fluiditatis gradum, extrema autem ista cum Legibus naturae pugnare.

Literas nostras amicus communis in Galliam misit, fortasse pro parte illic Trivultiano Diario inserendas . . . .

Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 30 Junii 1712.

CCXXXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Epistolam a praeclarissimo Hermanno nostro accepi, qua in sententiam meam se concedere et differre velle digressum et de Tuo Agnato, Domino Nicolao Bernoullio, commendando sollicitum fore perscripsit. Non dubito, quin idem Tibi quoque significarit. Puto autem recte facturum, si Curatoribus Academiae significet, finito penso discedendum sibi et privatis sermonibus id agat, ut de successore, quem vellemus, cogitetur. Si adesset Dn. Abbas Fardella, rem credo non difficulter conficeremus; sed ille, Barcinone gravi morbo tactus, vereor ut supersit. Ego interim amicos Berolinenses monui, ut curent ne quid Dn. Hermannus ex mora detrimenti capiat.

Ait Dn. Hermannus, sese habere demonstrationem quamdam novam sententiae meae Dynamicae, quod vires ejusdem corporis sint ut quadrata celeritatum. Ejus demonstrationis cognoscendae

sum percupidus, praesertim si differat ab iis, quas hactenus adhibuimus, partim a priori, partim a posteriori.

Non dubito quin Dn. Agnatus Tuus praeclaros pro ingenio suo in rebus mathematicis progressus facere pergat, et huic multa commendare poteris, quem Tibi agere minus vacabit. Unum opto, ut de rebus medicis cogites paulo attentius, dispiciasque an ad aliquod Institutionum rudimentum sive tentamentum saltem conjecturale perveniri possit. Vale etc.

Dabam Hanoverae 6 Julii 1712.

P. S. Inclusas ad Dominos Turretinum et Scheuchzerum curari peto. Vereor ne nova pax Anglicana, si longius serpit, etiam Helvetiae circulos turbet. Hactenus Batavi sese fortes ostendunt.

CCXXXIV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ad binas literas Tuas postremas responsum debeo; in posterioribus inclusas alias ad Turretinum rite curavi, sed ad Scheuchzerum, quas dicis, nullas inveni; fortasse oblitus es includere. —

Res nostrae Helveticae bene procedunt; accepimus heri pacem esse confectam ad conditiones a Tigurinis et Bernensibus praescriptas, postquam hi nuper secundo Marte pugnantes insigni victoria fuerunt potiti prope Vilmergam, quo eodem loco anno 1656 cladem passi, nunc maculam eluerunt; sed timendum est, ut satis candide agant Pontificii, qui jam nuper fidem fefellerunt. Ita vides, novam pacem Anglicanam tam intempestive procusam Helvetiae quidem circulos non turbasse, sed causam communem confoederatorum, a quibus discesserunt Angli, magis magisque exasperari hac Anglica pace, non est quod dubitemus, praesertim cum ei accesserit nuper Gallorum victoria in Flandria: quae omnia Batavorum animos jam pro parte vacillantes ad turpem pacem tandem pertrahere facile possent; quo facto non video, quid impedire possit hodiernum Ministerium Anglicanum, quominus machinationibus suis ultimam admoveat manum, hoc est, Successionem eripiat Sereniss. Domui Hanoveranae. Utinam vanus sim vates! Collapsa sunt omnia mirifice adeo, ut sine miraculo vix restituenda

videantur: quis ante biennium credidisset tantam rerum mutationem? Galli, qui pacem quantumvis duram acceptassent, nunc eandem pro arbitrio dictabunt, ni Deus aliter providerit.

Agnatus meus fortassis jam est in Anglia. Accepi nuperrime literas ab eo Roderdamo, in quibus se procinctum significat ad transfretandum in Angliam, rogatque ut sibi condones, quod ad literas Tuas ad se datas nondum responderit; se id facturum, quam primum iter suum in Angliam absolverit.

Cl. Hermannus noster spem facit de successu felici; quamprimum ad illum scribam, rogare non obliviscar, qualem habeat novam demonstrationem sententiae Tuae Dynamicae, quod vires ejusdem corporis sint ut quadrata celeritatum. Curiosus equidem et ego sum cognoscendi, num illa praestet meae, quam exhibui a priori, communicavique olim cum Voldero, quam visam laudavit et ideo sententiae Tuae accessit.

Nondum video haud posse dari Logarithmum τοῦ -2: nego enim, quod asseris, Logarithmum τοῦ $\sqrt{-2}$ esse prioris dimidium, etsi verum sit logarithmi τοῦ $\sqrt{2}$ esse dimidium logarithmi τοῦ 2: oportet quippe inspicere rationem hujus veritatis, et videbis discrimen. Ideo scilicet log. τοῦ $\sqrt{2}$ est dimidium log. τοῦ 2, quia $\sqrt{2}$ est medium proportionale inter 1 et 2: sed $\sqrt{-2}$ non est medium proportionale inter -1 et -2, adeoque concludi non potest log. τοῦ $\sqrt{-2}$ esse dimidium Logarithmi τοῦ -2, adeoque quemadmodum log. τοῦ $\sqrt{1\times 2}$ est dimidium logarithmi τοῦ 2, ita quoque log. $\sqrt{-1\times 2}$ est dimidium log. -2, hoc est log. $\sqrt{2}$ est dimid. log. -2 aeque ac dimidium Logarithmi τοῦ $+2$. Id quod maxime confirmat argumentum meum in postremis meis allatum, esse scilicet log. $x = \log. -x$ ex eo, quod $\frac{dx}{x}$ sit $= \frac{-dx}{-x}$, et sic numeri alicujus tam affirmativi quam negativi communem esse Logarithmum. Miror vero Te velle ex figura contrarium ostendere, quasi (fig. 178.) ordinata logarithmicae LL non possit ita decrescere, ut evanescat tandem seu perveniat ad 0, et deinde transeat in contrariam partem seu ad $-x$, sicuti (fig. 177.) id fit in curva CC, cum suppetant tamen innumera exempla quotidie obvia, quae utramque Tui argumenti partem vacillare evincunt. Primo etenim curva aliqua in partem oppositam seu $+x$ in $-x$ transire potest, ita ut non opus sit, ut evanescat seu per-

veniat ad 0, sicuti videre est in Hyperbola ordinaria super axe conjugato, cujus pars abscissa communis est ordinatae affirmativae et negativae, licet nunquam evanescentis; secundo nego Logarithmicam LL non ad alteram partem pervenire $\lambda\lambda$, per evanescentiam ordinatarum x; hoc enim fit, postquam LL excurrit in infinitum, ibi quippe evanescit x, seu pervenit ad o; hujusmodi iterum multa exempla habemus, sicuti videmus in Conchoide Nicomedis, cujus (fig. 179.) duae sunt partes oppositae ABC et $\alpha\beta\gamma$, super eodem axe DEF et ex eodem pole 0 descriptae, quae tamen non in se invicem transeunt, nisi post excursionem in infinitum. Habes itaque exemplum in hac altera curva, cujus aequatio (positis ordinatis x et z) $xx = \frac{a^4}{az + zz}$ seu $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{az + zz}}$ ostendit, eam habere duas partes convergentes in infinitum, dum interim ordinata quaelibet x affirmativa oppositam habet x negativam, plane ut in Logarithmica fieri statuo. Quae omnia ubi perpenderis, forte mutabis opinionem, et quae in novissimo Actorum Aprili, nuperrime tantum mihi viso, hac de re habes, retractanda ultro fateberis.

Frustra est ut Leydam cogitem; audio enim Bernardum, Novellarum Reip. literariae scriptorem, cathedrae mathematicae fuisse admotum, quanquam ut puto haud adeo insignem mathematicum.

Vidi Muysii Elementa Physices, et perlustravi; tumidus est titulus et multa promittens, sed de quo vere dici potest: Parturiunt montes, nascetur ridiculus mus. Cujus itaque nomen et omen habet Auctor; nunquam vidi tot verba facientem de rebus nihili; videtur id solum affectasse, ut Opus scriberet diffusum et mole amplum; unicam ibi deprehendi demonstrationem geometricam, quam hausit ex Keylio, hic vero sine dubio ex Newtonianis, scilicet de Tautochronismo Cycloïdis. Muysius enim, ut suspicor, non admodum profunde in Geometriam penetravit. De Hartsoekero idem fere sentio; habet tamen in experimentalibus plus dexteritatis, sed etiam in refutando plus impudentiae quam Muysius, atque plus malae fidei in citando.

In literis novissimis Burneti sequentia inveni ad Te spectantia: „L'on est occupé présentement à la Société (de Londres) à démontrer par des lettres originales, que la Méthode des fluxions a été connue de Mr. Newton plus de 7 ans, avant que Monsieur Leibnits n'en ait rien publié, et que Mr. Leibnits en pouvait avoir

vû les principes chez un Monsieur Collins, qui les avait Londres dans le temps que Monsieur Leibnits y a été; et qu'en suite, par des lettres, il a démandé des éclaircissemens, qui montraient qu'il n'entendoit pas encore la matière, cinq ans aprés que Mr. Newton l'a fait voir complette à ses amis. Cette controverse a été causé par les Messieurs de Leipsic, qui ont critiqué mal à propos le Livre de Monsieur Newton sur les quadratures, et de Enumeratione curvarum." Tuum est videre, quomodo ridiculam hanc Anglorum ambitionem retundas. Interim vale et fave etc.

Basilea a. d. 13 Aug. 1712.

CCXXXV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non dubito quin Dn. Hermannus noster Tibi significaverit, quid cum Domino Bernardo Trevisano sit locutus, et quid ille suaserit. Significavit autem mihi e re fore, ut Dominus Agnatus Tuus apud Legatos Venetos in Batavis et Gallia agentes de meliore nota commendetur, et praesertim apud Dominum Ruzinum, Procuratorem T. Marci, nunc Ultrajecti Reipublicae causa agentem, quia ille ipse etiam Reformator est studii Patavini. Itaque scripsi ipse ad Dominum Baronem de Bothmar, Legatum Electoris mei, ut rem Domino Ruzino commendare vellet. Sed cum Bothmarus Hagae, Ruzinus vero Ultrajecti esset, ille huic excerptum ex Epistola mea mitti curavit, responsum autem fortasse non feret, donec ipse Bothmarus negotiorum causa Ultrajectum excurrat. Interea volui ne hoc nescires, ut per amicum aliquem in Batavis aut Ultrajecti possis invigilare negotio, efficereque ut Dn. Ruzinus a peritis intelligat, quod res est, quantum scilicet familiae vestrae debeant Literae mathematicae, et quantum a Juvene doctissimo Agnato Tuo sit expectandum. Ita confirmabuntur aliorum testimonio, quae ego perscripsi. E re etiam erit, Dominum Emum, Legatum Serenissimae Reipublicae Venetae ad Regem Christianissimum, de eadem re edoceri, ut suffragio quoque suo votis nostris accedat. Id vero ut agas, Tibi per Varignonium aliosque amicos Parisiis perfacile erit. Denique si ipse Agnatus Tuus iter in Batavos face

ret, ut rei aquariae cognoscendae operam ocularem daret, seque in Illustris Ruzini gratiam coram insinuaret, minus esset de successu dubitandum. Ego studium ejus in rem aquariam impensum ex praesumta voluntate ejus, literisque Tuis jam tum in meis commendavi. Vale etc.

Dabam Brunsvigae 31 Augusti 1712.

CCXXXVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Vix literas ad Te dimiseram, cum alias a Te accepi; vellem scivisse iter in Batavos Domini Agnati Tui, monuissem enim ut Illustrissimum Ruzinum Ultrajecti adiret; sed hoc fortasse in reditu fieri poterit. Dominus Hermannus publicationem discessus sui nondum maturam putat. Puto Dominum Agnatum Tuum hydragogicae praxi (hydraulicam non intelligo) utiliter operam daturum.

Bernardus, quam Lugduni Batavorum Cathedram nactus sit, Physicam an Mathematicam, non bene memini; illud pro certo nuntiatum est, Muysium illuc aspirare, Physicam, Medicam an Mathematicam speret, aut non additum est, aut ego oblitus sum. Fateor in ejus opere multum evanidae subtilitatis, parum rerum notatu dignarum comparere.

Anglorum quorumdam vanos conatus rideo; nunquam illi monstrabunt, quae jactant, nisi aut verba mea corrumpant aut perverse interpretentur. Valde mihi declinare videtur doctrina in Anglia, nec tot egregiis viris defunctis pares, aut vel longo proximi intervallo successere. Scilicet nunc ingenia politicis nugis, aut theologicis controversiis destinentur: Successioni legibus stabilitae merito timetur, quando illi, apud quos est potestas, nihil agunt, quod ad eam firmandam facere possit, multa faciunt aut patiuntur, quae ad infirmandam; sed haec Divinae Providentiae sunt commendanda . . . .

Ais Dominum Agnatum Tuum mihi scripturum itinere Anglico confecto; vellem ei ex Batavis Angliaque scribere vacasset aut vacaret, tum in rem suam, tum in gratiam meam.

De nullo logarithmo τοῦ — 1 vel τοῦ — 2 etc. habes schedam adjectam. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 18 Septembr. 1712.

Beilage.

Series Logarithmorum est series numerorum progressionis Arithmeticae respondens seriei numerorum progressionis Geometricae, quorum unus assumi potest unitas, et alter numerus aliquis positivus, verbi gratia 2. Ubi pro Logarithmo unitatis assignari potest 0, pro logarithmo vero ipsius 2 numerus quicunque, sed ponamus, unitatem esse Logarithmum ipsius 2.

Porro manifestum est, in serie hac Geometricae progressionis nunquam, assumtis quotcunque tertiis proportionalibus, perveniri ad numerum negativum. Videtur quidem ad eum perveniri posse assumtis mediis proportionalibus, nam in nostra hac serie datur 1, 2, 4; jam medium, quod sumi potest inter 1 et 4, videtur esse tam $+2$ quam -2, quia tam $+2$, quam -2 in se ductum dat $+4$. Verum incommodum hic oritur, quod -2 non potest esse in progressione Geometrica, in qua est $+2$, qualis nempe (ex hypothesi) est nostra; cum -2 non sit potentia ipsius 2 secundum exponentem quemcunque, seu non sit 2^e, quod tamen de quovis numero logarithmum recipiente dici potest, qui proinde in hanc seriem 1, 2, 4 etc. quantum opus ultro citroque continuatam vel interpolatam cadit saltem aequivalenter. Nempe si fiat $x = 2^e$, erit $e = \log x$, posito scilicet $\log 1$ esse 0, et $\log 2$ esse 1. Cum ergo non dari possit e in aequatione $-2 = 2^e$, consequens erit logarithmum -2 esse nullum. Atque hinc etiam fit, ut -2 non possit esse ordinata ad Asymptoton Logarithmicae in eadem serie consistens cum 1 et 2, seu non possit esse x in aequatione ad Logarithmicam, quae est $x = 2^e$.

Sed idem ostenditur adhuc facilius ex natura quantitatum imaginariarum. Si -2 habet logarithmum, utique hujus logarithmi dabitur dimidium. Is autem est logarithmus numeri, qui ductus in se ipsum dat -2, seu est logarithmus ipsius $\sqrt{-2}$. Sed $\sqrt{-2}$ est numerus impossibilis et numeri impossibilis Logarithmus est impossibilis; ergo dimidium logarithmi ipsius -2 est impossibile; sed cujus dimidium est impossibile, debet esse ipsum impossibile. Itaque impossibilis est Logarithmus ipsius -2.

Caeterum ipsa harmonia Logarithmorum et numerorum haec illustrat. Ductio in se ipsum in numeris repraesentatur per multi-

plicationem in Logarithmis; Multiplicatio in numeris repraesentatur per additionem in Logarithmis; Positio in numeris repraesentatur per ipsum Logarithmum.

Ipsi n^e respondet $e . \log n$

$n . n$ $\qquad \log n + \log n$

n $\qquad \log n.$

Contra Extractio in numeris repraesentatur per divisionem in Logarithmis; Divisio in numeris repraesentatur per subtractionem in Logarithmis. Sed per quid repraesentatur Negatio in numeris? Respondeo, id non posse inveniri, quia in descendendo ab extractione per divisionem et subtractionem, non potest aliquid inveniri, quod sit subtractione inferius.

Ipsi $\sqrt[e]{n}$ respondet $\log n : e$

$\frac{n}{n}$ $\qquad \log n - \log n.$

$-n$ $\qquad$ quid?

Ex his etiam intelligitur, etsi possit dici -2 in se ductum dare 4, non tamen apte dici, -2 esse medium proportionale inter 1 et 4, et in universum numeri negativi non intrant in rationes, etsi quodammodo in calculum intrent, quod etiam nuper in Actis Eruditorum aliunde comprobavi. Unde confirmatur, non dare Logarithmos negativorum, uti vicissim exclusio Logarithmorum a negativis confirmat, negativos non ingredi rationes vel proportionalitates.

Si quis defendat, Logarithmum τοῦ $\sqrt{-2}$ non esse dimidium Logarithmi τοῦ -2, etsi logarithmus τοῦ $\sqrt{2}$ sit dimidium logarithmi τοῦ 2, et pro ratione discriminis alleget, quod $\sqrt{2}$ sit media proportionalis inter 1 et 2, sed $\sqrt{-2}$ non sit media proportionalis inter -1 et -2: responsio est facilis, utrique esse commune, ut radix sit media proportionalis inter 1 et id, cujus est radix, nempe ut $\sqrt{2}$ sit media proportionalis inter 1 et 2, et ut $\sqrt{-2}$ sit (vel certe fingatur) media proportionalis inter 1 et -2. Sed hinc utrobique sequitur, logarithmum mediae fore dimidium posterioris, nam log mediae proportionalis inter 1 et 2 (id est ipsius $\sqrt{2}$) est $\log 1 + \log 2, : 2$. Sed $\log 1$ est 0; ergo log. mediae inter 1 et 2 est $\log 2, : 2$. Similiter log. mediae proportionaiis inter 1 et -2 (id est ipsius $\sqrt{-2}$) est $\log 1 + \log -2, : 2$, id est (ob $\log 1 = 0$) $\log -2, : 2$. Res etiam sic patet: cum -2 sit $= \sqrt{-2}$ in $\sqrt{-2}$, erit $\log -2 = \log \sqrt{-2} + \log \sqrt{-2}$. Ergo $\log \sqrt{-2}$ est dimidius $\log -2$.

CCXXXVII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex novissimis Tuis die 31. Augusti datis video, Te eo die nondum accepisse literas meas 13. die ejusdem mensis scriptas: spero illas Tibi nunc traditas et, quae ibi de logarithmis numerorum negativorum habui, a Te probatum iri. Significabam Agnati mei adventum in Batavos; nunc ejusdem commorationem Londini significo. Laudat valde Newtoni, Halleji et Moyvraei humanitatem, qua fuerit exceptus. Interim quod tantam Agnati mei curam geras, et tanto studio ejus negotium amplectaris, ille certe prolixam adeo benevolentiam nunquam satis depraedicare nedum demereri poterit; ego vero, tanquam mihi exhibitam, gratus agnosco, atque rogo, ut eandem mihi proporro conserves pro commendaudo aliquando filio meo, Juvene octodecim annorum, qui in mathematicis aliquid promittit, modo spes me non fallat.

Quod de Anglorum aemulatione nuper perscripsi ex literis Burnetianis excerptum, nunc distinctius narrare possum ex relatione Agnati mei, quam e re Tua fore puto hic apponi, sub fide tamen silentii: „Die Historia Calculi differentialis wird hier getruckt (sunt verba Agnati mei) under der auffsicht dess Hrn. Halley, sie solle in etlichen Tagen fertig werden; ich hab etliche Bögen darvon bey Hrn. Halley gesehen; die Brieff nemen ihren anfang von an. 1669, und Hr. Newton hatt selbsten gesagt, dass Er schon an. 1665 und 66 dergleichen sachen gefunden habe; man hatt hin und wider bey den Brieffen etliche notas marginales gemacht, auss denen sie beweisen wollen, dass der Hr. De Leibnitz dazumahl noch nichts von diesem Calculo verstanden habe; wie dieses alles der Hr. De Leibnitz auffnehmen wird, stehet zu erwarten. Die Engelländer seind sehr jaloux über dess Hrn. Newtons inventiou, und der Hr. Newton selbsten auch etc." Caeterum refert, Hallejum sub praelo habere veterem aliquem Auctorem Menelaum de Trigonometricis et Astronomicis; edidisse nuper Apollonium, quem mihi missurus sit; Newtoni Princip. philos. alteram editionem proximo Novembr. lucem visuram. Avide videbo, num quos in prima editione animadverti errores, nunc correxerit. Vale etc.

Basileae a. d. 24. Septemb. 1712.

CCXXXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Novissimas meas, quibus adjecta erat scheda de Logarithmis negativorum, Tibi redditas non dubito.

Expectabo, quae Angli sint daturi circa Calculi differentialis Historiam. Si me non tangunt, nec mihi imputant persona mea animoque indigna, facile patiar, ut se jactent: sin me offendunt, audient fortasse quae nollent. Memini olim literas me recepisse ab Oldenburgio, ex quibus apparebat, Newtonum tunc summam rei in seriebus ponere et putare, soluta esse Problemata, quae huc reduxisset. At longe aliud ostendit differentialis methodus. Tentandum scilicet est, ut Problemata, si non possunt revocari ad constructiones ordinarias, saltem revocentur ad quadraturas: et sunt gradus in ipsis transcendentibus quadraturis. Itaque nescio, an Newtonus tam mature ad methodum illam Fluxionum, quam vocat, pervenerit. Quae in Newtonianis animadverteris, intelligere gratum erit. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 10. Octob. 1712.

CCXXXIX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Optassem ut quoque Agnatus meus Tibi jam ex Batavis scripsisset, quo citius, quid sibi agendum in vocationis negotio, ex Te ipso intelligere potuisset; spero, nunc factum quod intermiserat. Haeret adhuc in Anglia, forte tamen brevi Belgium repetiturus.

Schedam Tuam de Logarithmis numerorum negativorum perlegi quidem, sed quod pace Tua dixerim, nihil inveni quod eorum impossibilitatem probet. Hoc unum efficis omnibus Tuis argumentis, ut ostendas, non dari transitum ex serie numerorum affirmativorum in seriem negativorum, hoc est assumta unitate (nempe +1) pro initio seriei numerorum, nullum numerum negativum in illa serie inveniri posse, adeoque nullos eorum logarithmos hoc casu existere; quod quidem non nego. Sed hoc non impedit, quominus numeri negativi suam peculiarem constituant seriem, assumta

pro eorum initio unitate negativa (nempe -1), et ita quidquid de Logarithmis affirmativorum probaveris, idem et in Logarithmos negativorum quadrabit. Ut verbo dicam, quilibet numerus affirmativus idemque negativus habent communem logarithmum, seu Log. τοῦ $+ \mathrm{n} =$ log. τοῦ $- \mathrm{n}$: quod ut demonstrem ulterius Tibi, ut spero, deinceps non dissensuro, hoc tantum faciam, ut probem (fig. 180) Logarithmicam ABC habere alteram oppositam $\alpha\beta\gamma$ pro conjugata super communi asymptoto LMN, quae duae partes sunt habendae ejusdem curvae, sicuti duae Hyperbolae oppositae nonnisi unam efficiunt curvam: unde constabit (assumtis AL pro $+1$, et αL pro -1) LM, LN etc. fore logarithmos numerorum tam affirmativorum MB, NC etc. quam negativorum Mβ, Nγ etc. Hoc vero commode ostendi potest, si inspiciamus modum aliquem generandi Logarithmicam, ex cujus generationis continuatione patebit duplicitas hujus curvae super communi asymptoto. Consideremus hunc in finem (fig. 181) Hyperbolam PQG cum opposita pqg super asymptotis orthogonalibus Rr, OX, se mutuo secantibus in T: assumta ad arbitrium applicata PR pro prima et invariabili ex singulis punctis S, E, s, e etc. tam supra quam infra asymptoton OX eductae intelligantur applicatae SQ, EG, sq, eg etc. et in illis sumantur partes SF, EH, proportionales areis hyperbolicis RSQP, REGP, hoc est ut SF $\times$ C sit $=$ areae SP, et EH $\times$ C $=$ areae EP, unde manifestum est, curvam exinde generatam RFH fore Logarithmicam. Attendamus nunc ad ejus generationem eamque continuemus quousque possumus. Primo clarum est, quo major sumitur RS, tanto majorem fore SF, donec tandem S attingente T, areaque per consequens hyperbolica TP evadente infinita, etiam applicata TO, in quam abit SF, fiat infinita, adeoque Logarithmicae asymptotos. Sed pergat nunc punctum S progredi (quid enim hoc impedit?) atque jam pervenerit in e; vides nunc aream hyperbolicam ipsi Re competentem esse partim affirmativam infinitam TP, partim negativam infinitam Tg, adeoque $=$ TP $-$ Tg $=$ (facta TE $=$ Te) EP; et ipsam applicatam EH $=$ eh; et similiter, ubi punctum mobile progrediendo pervenerit ad s, ita ut TS $=$ Ts fiet applicata sf $=$ SF; unde nova Logarithmica hfr oritur, quae cum priori HFR unam tantum curvam constituit, nempe RFXOhfr, sicuti duae Hyperbolae oppositae PQG et pqg unam tantum efficiunt curvam, nempe PQGOXgqp. Nam uterque ramus RFH et hfr generantur eadem lege ejusque

continuatione, ita ut quemadmodum primo crescunt applicatae SF, EH in infinitam TO, postea eodem ritu ab infinita TO iterum decrescant in eh, sf etc. Cum itaque sumtis TR pro unitate affirmativa, et Tr pro unitate negativa, EH, SF exprimant logarithmos numerorum affirmativorum, exprimeat eaedem vel ipsis aequales eh, sf logarithmos numerorum Te, Ts, qui respectu alterorum TE, TS sunt negativi. Verum igitur est, unum eundemque logarithmum respondere duobus numeris aequalibus, uni affirmativo, alteri negativo, hoc est log. $\tau o\tilde{v} + n =$ log. $\tau o\tilde{v} - n$. Q.E.D.

Communicavi Tecum jam olim, si recte memini, quaedam, quae in Newtonianis animadverti. Animus mihi est, Menkenio ita rogante, aliquid ad Acta Lips. mittere de motu projectilium, ubi quosdam errores Newtoni notabo, quos ostendam originem traxisse ex prava serierum applicatione, in quibus summam rei illum posuisse rectissime dicis. Sed et hoc ipsum gravissimum errorem peperit, qui late serpit et omnes fere ejus solutiones circa hanc materiam in applicatione inficit. Error autem in hoc consistit, quod pag. 263 statuit ad habendas fluxiones ulteriorum graduum alicujus quantitatis fluentis (utor nunc ipsius loquendi modo) conjiciendam esse quantitatem fluentem in seriem per extractionem radicis; tunc enim fore primum ejus seriei terminum ipsam quantitatem fluentem, secundum vero ejus fluxionem primam, tertiam fluxionem fluxionis vel fluxionem secundam, quartum fluxionem tertiam etc. hoc est secundum nostrum exprimendi morem, si differentianda sit ex. gr. x^n, scribendum esse $\overline{x + dx}^n$, hocque per extractionem vel potius per evolutionem in Seriem conjectum, nempe hoc modo $\overline{x+dx}^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} dx + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2} dx^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3} dx^3 +$ etc. exhibere differentias omnium graduum, in infinitum continuatas, ipsius x^n: quod autem, exceptis primo et secundo terminis, de reliquis omnibus falsum est; docet enim communis differentiandi regula, differentias continuatas hanc exhibere seriem, $x^n dx^0 + n x^{n-1} dx + n.n-1 x^{n-2} dx^2 + n.n-1.n-2 x^{n-3} dx^3 +$ etc. quae cum priore duos praecedentes terminos tantum communes habet, reliquos omnes diversos; unde suspicari fere licet, Newtonum tum temporis fluxionum continuandarum ideam nullam adhuc claram habuisse. Quid enim opus habuisset confugere ad radicum extractionem, si differentiationum naturam satis

perspectam habuisset, ut adeo non sit, cur valde glorietur de seriebus suis, cum ipsum tam facile in errorem abripuerint. Quod si ita libuerit, mittam Tibi scriptum, cum paravero, priusquam Lipsiam eat, ut examinare possis, et si quid aliud in mentem venerit, de Tuo adjicere. Scribit Agnatus meus (quem nunc secundum literas ejus modo acceptas ad Batavos reducem credo) alteram editionem Princip. Philos. Nat. Newtoni, hoc adhuc mense publicatum iri: num vero hos aliosque errores in hac editione correxerit, Acutor non addit; neque etiam quid novi accesserit, aut an apertius jam exposuerit regulam suam, quam pag. 254 fatetur a Te prius communicatam, cum ipse eandem adhuc celaret, Data nempe aequatione quotcunque quantitates fluentes involvente, fluxiones invenire, et vice versa; et num felicius res ipsi cesserit in applicatione ejus ad differentiationum continuationem. Quod superest, vale quam optime et me amare perge.

Basileae a. d. 11 Novembr. 1712.

CCXL.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nihil aliud revera nolo, quam quod concedis, non dari transitum pro logarithmis ex serie numerorum affirmativorum in seriem negativorum. Atque ita si sit aequatio generalis $2^e = x$, posito in casu $x=1$, fore $e=0$, et in casu $x=2$, fore $e=1$, non posse assignari e, cum $x=-1$. Neque ego alium Logarithmum cogito, quam qui tali aequatione comprehendi potest.

Recte facias et ex usu publico, si ad Acta Lipsiensia mittes, quae de motu projectilium notasti, haud dubie praeclara et singularia. Non examinaveram series Newtonianas, persuasus talem virum in talibus labi non potuisse: eo magis miror hos lapsus et Tecum suspicari incipio, serius ipsi innotuisse differentiandi artem, quam vult videri. Etiam Hugenius, ubi primum in Wallisianis Operibus viderat notas novas Newtonianas, miratus fuerat, quod ex ipso Newtoni Opere Principiorum non satis hujus methodi vestigia apparerent. Fere enim ibi constant omnia illis methodis, quae dudum Hugenio innotuerant. Nec post publicatam Newtoni Methodum, quam vocant, fluxionum, quicquam fere praestitere Angli in

hoc genere, quod non ex nostris sit sublectum. David Gregorius etiam in paralogismos fuit prolapsus, cum Catenariam investigavit et propriam demonstrationem attentavit.

Dno. Agnato Tuo scripsi, ut plenipotentiarium Hanoveranum Dn. de Botmar adeat, qui ut est humanissimus, apud Ruzzinum facile aditum sit procuraturus. Quod superest, vale et fave, et rem in multos adhuc annos valens florensque bene gere simulque salve a etc.

Initio anni 1713.

CCXLI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si nihil aliud contendis, quam non dari transitum pro logarithmis ex serie numerorum affirmativorum, hoc est, non posse ex. gr. sumi logarithmum medii proportionalis inter numerum affirmativum et alium negativum, hoc certe nihil extraordinarii est, quod non competat applicatis cujuscunque curvae duas partes oppositas habentis. Sit enim (fig. 182) talis curva EAF, cujus axis AD, duae applicatae affirmativae BC et DE, aliaque negativa DF. Datur sane abscissa AG, respondeat mediae proportionali GH inter BC et DE; sed nulla datur AG respondens mediae proportionali inter BC et DF, etsi interim negari non possit, eandem abscissam AD respondere utrique applicatae, et affirmativae DE et negativae DF. Haud secus se res habet in numeris eorumque Logarithmis: numeri namque designantur per applicatas Logarithmicae, et eorum logarithmi per abscissas. Jam vero in novissimis meis ostendi, Logarithmicam revera habere duas partes oppositas ab utroque axis latere, ita ut eidem abscissae, hoc est, eidem logarithmo, duae respondeant applicatae, seu duo numeri, affirmativus unus, alter negativus. Atque hoc est quod negare videbaris, numeros scilicet negativos habere logarithmos. Quod vero attinet ad id, quod dicis: s i s i t a e q u a t i o g e n e r a l i s $2^e = x$, p o s i t o i n c a s u $x = 1$, f o r e $e = 0$, e t i n c a s u $x = 2$, f o r e $e = 1$, n o n p o s s e a s s i g n a r i e, c u m $x = -1$, hoc quidem verum est in illa suppositione, quae est arbitraria, sed si supponatur (sicuti supponere licet) in casu $x = -1$, fore $e = 0$, potest utique assignari e, cum $x =$ numero negativo. Et hoc est, quod ego volui.

Misi nuper ad Acta Lipsiensia, quae notavi de motu projectilium, et alia huic materiae affinia. Monui Newtonum quorumdam suorum errorum, verbis tamen mollissimis, ne Virum hunc offenderem, mihi alioquin satis benevolum, utpote qui me novissime Societati Regiae Londinensi ultro proposuit atque cooptari fecit; quam dignitatem etiam Agnato meo brevi conferendam promisit, qui praeterea humanissime ab eo fuit exceptus et habitus, cum non ita pridem in Anglia degeret. Quomodo vero, quae ad Acta communicavi, ubi ad Te pervenerint, sint placitura, lubentissime intelligam, non dubitans quin, quod contra Newtonum habeo, assensum Tuum eliciat. Interim secunda Editio Princip. Newtoni, quae jam praeterito Novembri in publicum expectabatur, nonnisi hoc demum mense Februario prodibit, Moyvraeo ita mihi scribente; cujus retardationis causa est sine dubio, quod Agnatus meus unum alterumve ex erroribus supra memoratis, ab ipso Newtono non animadversis, ipsi aperuit, atque ita ansam praebuit eos revidendi, corrigendi et correctionum schedas libro (qui jam fere erat impressus) inserendi; qua de re Newtonus, quod mature adhuc satis fuerit praemonitus, mihi per Agnatum meum gratias agere voluit, quanquam multum absit, quominus ipsi omnes, quos potuissem, lapsus indicaverim. Collinsii Historia calculi differentialis, cum mihi scriberet Moyvraeus novissime, nondum erat evulgata, eam autem sequenti hebdomada, post literarum suarum scriptionem, dicebat certo prodituram. Ad Te perveniet illa citius sine dubio, quam ad me. Agnatus meus nunc agit in Gallia apud Montmortium, et quidem in ipsa arce Montmortiana, haud procul Lutetia, adhuc per mensem forte ibi commoraturus. Parat Montmortius alteram Editionem libri sui de A l e a e t s o r t e; Nicolius vero et De Lagny conscribit uterque Historiam, ille de Cycloide, hic de Quadratura circuli, utrique suppetit abundans materia.

Paralogizavit utique David Gregorius in definienda Catenaria, et ego primus, ni fallor, Tibi indicavi ejus paralogismum. Non multum abest, quin Tecum opiner, calculum fluxionum ex calculo differentiali fluxisse, et illum hunc pro parente habere, tametsi hoc dissimulent Angli: itaque lubens videbo, quomodo hi partus sui primogenituram sint probaturi ex praedicta illa Collinsii Historia. Nam quod hanc in rem conspicitur in Operibus Wallisianis, parum evincit aetatem; alia igitur fortiora argumenta exspecto. Si recte memini, scripsit Agnatus meus, se, cum esset in Belgio, adiisse Ple-

nipotentiarium Hanoveranum Dn. de Botmar, non minus ac alterum Venetum Dn. Ruzzini. Interim procuravi Parisiis tres epistolas commendatitias ad Illustr. Morosini, Mocenigo et Emo, quas protinus ad Hermannum transmisi. Hic vero, ut audio, jamjam accepit et porro expedivit; spem facit felicis successus, scribitque se proximo mense Aprili iter in patriam redauspicaturum esse, atque librum quem ibi paravit, hic se typis commissurum. De caetero vale etc.

Basileae a. d. 28 Febr. 1713.

CCXLII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

. . . .

. . . . Spero Dominum Agnatum Tuum in Batavis rei hydragogicae practicae operam dedisse. Id enim in commendationis parte reponebatur.

Videbimus quid daturae sint nobis literae Collinsianae, in quibus quidam Angli reperisse putant, non quod Pueri in Faba. Ego Tuas ad Newtoniana annotationes avide expecto: alia nunc non attingo. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Viennae Austriae 25. Martii 1713.

CCXLIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratulor Tibi receptionem in Societatem Regiam Anglicanam, vel potius gratulor Societati, cui ornamentum addis. Magis est, cur gratuler hunc honorem Tuo ex Fratre Nepoti; huic enim non tantum decus, sed etiam auctoritatem addet apud Curatores Patavinos. Spero eum in Batavis cogitasse nonnihil de praxi fluminum regendorum. Nam ut ex Dno. Hermanno intelligo, competitor quidam apud Patavinos hoc uno se jactat potissimum.

Dn. Newtonus merito Te sibi obstringere voluit: quae in ipsius Principiis notaveris, in Actis videre gratum erit.

Collinsius obiit credo, antequam Calculus differentialis innotesceret; sed ille cum Oldenburgio, Wallisio, Newtono, me, aliisque commercium aliquod literarium excercebat in rebus Arithmeticis, Geometricis, Analyticis. Quid inde elicituri sint ad natales novae Analyseos Anglicanos stabiliendos, apparebit, ubi prodierit hoc Commercium. Ego nescio, utrum ante Te sim conspecturus, cum tam longe absim a domo.

Vereor ut Nicolius Cycloïdis, Lagnius Tetragonismi circularis bonam dent Historiam, nisi nobiscum communicent. Concedis mihi, ut video: s i s i t a e q u a t i o g e n e r a l i s $2^e = x$, p o n a t u r q u e i n c a s u $x = 1$ e s s e $e = 0$, e t i n c a s u $x = 2$ [s i p l a c e t] e s s e $e = 1$, t u n c s e q u i, n o n p o s s e a s s i g n a r i e, c u m $x = -1$. Sed addis, hanc suppositionem logarithmorum pro numeris positivis esse arbitrariam, nam retenta aequatione generali $2^e = x$, posse assumi, ut e sit 0, cum $x = -1$. Verum enimvero, ut taceam priorem suppositionem esse magis naturalem, considerandum est 1° in posteriore effici, ut logarithmus aliquis quantitatis affirmativae, negativae et impossibilis sit idem. Nam cum duplum et dimidium ipsius 0 sit 0, erit 0 logarithmus tam ipsius -1, quam quadrati ejus $+1$, et radicis quadraticae ejus $\sqrt{-1}$. Et 2°. sequetur hoc amplius, 2^0 non esse quantitatem fixam, sed infinitos habentem significatus, nam non tantum 2^0 erit $= -1$, ut supponebatur, sed erit $2^0 = +1$ et $= \sqrt[2]{-1}$ et $= \sqrt[4]{-1}$ et $+\sqrt{-1}$ et sic in infinitum. Et ita nisi 2^0 sit quantitas ambigua, haec omnia coincident inter se. Sed si initio tantum ponamus $2^0 = 1$, nihil tale occurrit, quia, quaecunque potentia aut suppotentia ipsius 1 est 1, non vero quaevis potentia aut suppotentia ipsius -1 est -1.

Fit etiam 3°. per hypothesin Logarithmorum pro negativis, ut fiat transitus a negativis numeris ad positivos, et contra. Nam si duplices Logarithmum numeri negativi, habebis Logarithmum quadrati a numero positivo, ex. gr. si $x^e = -2$, erit $x^{2e} = +4$; sed hunc transitum Tu ipse improbas, vel ex spectata natura curvae.

Praeterea 4°. Logarithmis negativorum admissis, habentur et logarithmi possibiles impossibilium, qui erunt dimidiati Loga-

rithmi negativorum; sed sumtis Logarithmis nonnisi positivorum, nunquam venietur ad logarithmos possibiles impossibilium.

Denique 5°. admissa hypothesi Logarithmorum pro negativis, fiet falsum, quod concessisti. Nam concessisti ab initio, incompatibilia esse $2^e = 1$ et $2^e = -1$, ita ut e possit assignari. Sed si admittas hypothesin $2^0 = -1$, fiet etiam $2^0 = 1$. Ergo compatibilia sunt $2^0 = 1$ et $2^e = -1$, posito $e = 0$ contra concessa.

Ex his omnibus vides hypothesin de Logarithmis numerorum negativorum non tantum esse parum naturalem et inutilem, sed etiam non admittendam. Hinc etiam et aliunde quoque statui, proportiones non habere locum in quantitatibus negativis, nec dicendum esse -1 ad $+1$ ut $+1$ ad -1, licet productum ex extremis hic faciat aequale producto ex mediis, quia identitatis rationum fundamentum est in similitudine, quae hic nulla est. Nam quomodo potest $+1$ esse ad -1, ut est -1 ad $+1$, cum prior ratio sit majoris ad minus, posterior minoris ad majus. Etsi ergo verum sit, esse aequales has duas fractiones $\frac{+1}{-1}$ et $\frac{-1}{+1}$, non tamen fractiones idem sunt ac rationes, licet hae per illas indicentur. Ex quibus intelligitur, in ipsis rei Analyticae fundamentis aliqua adhuc neglecta fuisse.

Spero Dominum Hermannum nostrum jam apud vos esse, et iter suum Berolinense acceleraturum; ita enim omnino opus est; spero et rem Cathedrae Patavinae in statu quem volumus collocasse. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Viennae Austriae 26 Aprilis 1713.

P. S. Parisiis ad me destinati erant Loci Dni. Marchionis Hospitalii, et Analysis P. Reyneau; sed negligentia sive fraude Bibliopolae Galli, qui in Batavis agit, ad me non pervenere. Itaque rem pergratam faceret Dn. Agnatus Tuus, si mihi haec opera afferret, una cum Montmortiano opere, ac nonnullis Rollii et Lagnii aut similibus, velut Parentii Miscellaneis, nam nonnisi Mechanica ejus habeo. Basilea possent cum tempore Francofurtum deferri. Pretium, ut par est, lubens reddam. Quid Blanchinus, vir insignis et mihi olim amicus, Roma advectus, nunc in Gallia Angliaque egerit, nosse velim: praeclarus est in Astronomia et Antiquitate. —

CCXLIV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

In penultimis Tuis 25 Martii datis, in procinctu ad reditum Te dicebas, qui tamen 26 Aprilis, quo novissime ad me literae Tuae exaratae sunt, Viennae etiamnum haesisti: ego vero incertus, ubinam locorum Te quaeram, hasce meas Hanoveram dirigam, more solito, quae ut Te ibi offendant reducem, salvum et incolumem, est quod ex animo voveo. Biduo postquam accepissem postremas Tuas, Agnatus meus huc appulit ex Galliis, ita ut quos petiisti libros ipse asportare non potuerit.

Instantiae Tuae et objectiones contra logarithmos numerorum negativorum, omnes ex eodem falso principio fluunt, quod solo attentionis defectu pro vero assumis. Si enim vel tantillum mentem advertere voluisses, ejus falsitatem facile detexisses. Nunc quidem non litigabo, quod suppositio logarithmorum pro numeris negativis sit aeque naturalis, quam altera illa pro numeris positivis; definiendum esset, quid per naturale intelligeres; si naturale est id quod usu receptum est, quod per consuetudinem est introductum, concederem suppositionem logarithmorum pro numeris negativis minus naturalem esse, quam illam cui assueti sumus. Sic etiam logarithmi refluentes (ut vocant) minus naturales erunt, ut et Arithmetica Tua dyadica ac Weigelii Tetractys, quae usu tamen non carent, licet jam naturalius sit (quia usitatius) uti decem notis numeralibus, quam duabus, aut quatuor, vel quinque. Quod vero attinet ad ipsius Principii (quod tacite supponis) falsitatem, haec in eo consistit, quod quae vera sunt tantum pro logarithmis numerorum affirmativorum, ea quoque ad logarithmos numerorum negativorum applicare velis, non considerans, ex quo fundamento illa sint deducta, alias statim vidisses causam, ob quam applicatio ad logarithmos negativorum non valeat. Sed respondebo κατὰ πόδας ad quinque tuas objectiones.

Dicis (1) in suppositione logarithmorum numerorum negativorum effici, ut logarithmus aliquis quantitatis affirmativae, negativae et impossibilis sit idem, quod quidem de affirmativis et negativis verum est; concedo enim habere communes Logarithmos, sed consideremus rationem, ex qua concludis etiam quantitatis impossibilis logarithmum

esse eundem; nam cum duplum, ais, et dimidium ipsius 0 sit 0, erit Logarithmus tam ipsius -1, quam quadrati ejus $+1$, et radicis quadraticae ejus $\sqrt{-1}$. Hic non animadvertis, quod non absolute essentiale sit logarithmis, ut duplum alicujus logarithmi sit logarithmus numeri, quadrati, et dimidium logarithmi sit logarithmus radicis; oportet ut attendas, duplum logarithmi dare proprie logarithmum ejus numeri, qui est tertius geometrice proportionalis ad primum numerum (hoc est ad unitatem, sive affirmativam, sive negativam) et ad numerum propositum, qui tertius proportionalis in affirmativis tantum est numeri propositi quadratus, in negativis non item. Deinde attendere debes, dimidium alicujus logarithmi non absolute esse logarithmum radicis quadraticae, sed potius esse logarithmum medii proportionalis inter primum numerum (hoc est unitatem, sive affirmativam, sive negativam) et numerum propositum, qui medius proportionalis in affirmativis tantum est radix quadratica numeri propositi, non vero in negativis. Quod si itaque ratiocinium Tuum recte instituas dicendo: Nam cum duplum et dimidium ipsius 0 sit 0, erit 0 logarithmus tam ipsius -1, quam tertii proportionalis ad -1 et -1, qui est $\frac{-1 \times -1}{-1} = -1$, et medii proportionalis inter -1 et -1, qui est $\sqrt{-1 \times -1} = +\sqrt{+1}$ vel $-\sqrt{+1}$; nihil certe absurdi inde sequitur.

Dicis 2°. sequetur hoc amplius 2^0 non esse quantitatem fixam, sed infinitos habentem significatus, nam non tantum 2^0 erit $= -1$, ut supponebatur, sed erit $2^0 = +1$ et $= \sqrt[2]{-1}$ et $= \sqrt[4]{-1}$ et $= \sqrt[8]{-1}$, et sic in infinitum, et ita nisi 2^0 sit quantitas ambigua, haec omnia coincident inter se. Haec secunda objectio est tantum Corollarium prioris; illa itaque sublata et haec cessat: nego enim 2^0 fore $= \sqrt[2]{-1}$, et $= \sqrt[4]{-1}$, et $\sqrt[8]{-1}$ etc. sequitur enim nihil aliud quam quod 2^0 sit $= \sqrt[2]{-1 \times -1}$, et $\sqrt[4]{-1 \times -1 \times -1 \times -1}$, et $\sqrt[8]{-1}$ etc. quae omnia faciunt $\pm\sqrt{+1}$, hoc est $+1$, vel, quod hic valet, -1, id quod nihil absoni est.

Urges 3°. fieri per hypothesin Logarithmorum pro negativis, ut fiat transitus a negativis numeris ad positivos et contra: nam si duplicem Logarithmum numeri negativi, me habere asseris, Loga-

rithmum quadrati a numero positivo ex. gr. si $x^e = -2$, fore $x^{2e} = +4$: sed hunc transitum me ipsum negare, vel ex spectata natura curvae. Verum pristina recurrit responsio: nego scilicet duplicando logarithmum haberi logarithmum numeri quadrati. Vidisti enim ex duplicatione illa oriri Logarithmum tertii proportionalis ad unitatem (affirmativam aut negativam) et ad numerum propositum. Sic itaque, si $x^e = -2$, concludendum fore $x^{2e} = \frac{-2 \times -2}{-1} = -4$, quod nullum transitum arguit a negativis ad positivos.

Eadem est responsio ad Objectionem quartam, quando dicis: Logarithmis negativorum admissis, haberi et Logarithmos possibiles impossibilium, qui sint dimidiati Logarithmi negativorum; supra quippe in responsione ad objectionem primam vidisti dimidiationem logarithmi non dare (nisi per accidens) logarithmum radicis, sed medii proportionalis inter unitatem (affirmativam aut negativam) et numerum propositum, hic autem medius proportionalis unquam est impossibilis.

Quod denique objicis 5°. admissa hypothesi Logarithmorum pro negativis, fieri falsum quod concesserim; nam me concessisse ab initio incompatibilia esse $2^e = 1$ et $2^e = -1$, ita ut e possit assignari. Sed si admittam hypothesin $2^0 = -1$, fieri etiam $2^0 = 1$; ergo compatibilia esse $2^e = 1$ et $2^e = -1$, posito $e = 0$, contra concessa. Eandem repetis sequelam, quam falsam ostendi. Ex eo enim, quod admittam hypothesin $2^0 = -1$, non sequitur fieri etiam $2^0 = 1$, sed tantum $\frac{-1 \times -1}{-1} = -1$. Ita vides difficultates Tuas omnes dilutas. Non dubito quin, cum aliqua attentione rem perpendere velis, mihi sis assensurus. Volui hac vice distincte ad puncta singula respondere, ut in posterum lites serere circa rem leviculam abstineamus.

Attulit Agnatus meus Lutetia exemplar unum Commercii Epistolici Collinsii et aliorum de Analysi promota, quod Abbas Bignonius, qui plura Exemplaria Eruditis distrubuenda, Londino missa acceperat, ipsi tradidit. Legi illud, nec sine attentione sufficienti. Displicet inprimis modus procedendi parum urbanus; accusaris statim coram Tribunali, quod ut videtur ex ipsis Actoribus et Testibus consistit, tanquam plagii reus, postea productis documentis

contra Te, fertur sententia; causa cadis, damnaris. Recensionem in Actis Lipsiensibus Januarii 1705 editam Libri Newtoni De numero curvarum tertii generis deque quadratura figurarum, Tuo stylo conscriptam pronuntiant; imo postea Tibi, tanquam Auctori, diserte imputant. Haec recensio inprimis conquerendi ansam praebuit, bilemque movit accusatoribus Tuis, utpote quam Newtoni inventis nimium derogare existimant. His itaque permotum fuisse Keillium, ut in Epistola in Philosophicis Transactionibus impressa, Newtono quod suum est vindicaret ostenderetque fluxionum Arithmeticam inventam esse ante Calculum differentialem: imo hunc postea, mutatis tantum nomine et notationis modo, ab illa esse mutuatum et ita Newtono subreptum sub alia tantum facie in Actis Erud. a Te editum fuisse. Sed ut ego dicam, quod de hac re sentio, quantum quidem ex hac farragine Epistolarum constare potest, videtur Mercator primus Serierum inventor per continuam divisionem, Jac. Gregorius postea hanc materiam excolens incidit, ut apparet, primus in Circuli Quadraturam Arithmeticam $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. quam Tu, inscius sine dubio, quod jam ante Te fuerit detecta, tanquam Tuam in Actis edidisti, et revera Tua fuit aeque ac Gregorio; invenisti enim (licet posterior) aeque ac Gregorius, nam invenisse est industriae, sed primum invenisse est felicitatis, ut Wallisius alicubi dicit. Deinde videtur Newtonus, occasionem nactus, Serierum opus multum promovisse per extractiones radicum, quas primus in usum adhibuit, et quidem in iis excolendis, ut verisimile est, ab initio omne suum studium unice posuit, nec, credo, tunc temporis vel somniavit adhuc de Calculo suo fluxionum et fluentium, vel de reductione ejus ad generales operationes Analyticas, ad instar Algorithmi vel Regularum Arithmeticarum et Algebraïcarum inservientes. Cujus meae conjecturae validissimum indicium est, quod de literis $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$; $\dot{y}$, $\ddot{y}$ etc. quas pro differentialibus dx, ddx, d^3x; dy, ddy etc. nunc adhibet; in omnibus istis Epistolis nec volam nec vestigium invenias; imo nequidem in Principiis Philos. Natural. ubi Calculo suo fluxionum utendi tam frequentem habuisset occasionem, ejus vel verbulo fit mentio, aut notam hujusmodi unicam cernere licet, sed omnia fere per lineas figurarum, sine certa Analysi, ibi peraguntur, more, non ipsi tantum, sed et Hugenio, imo jam antea dudum Torricellio, Robervallio, Fermatio, Cavallerio, aliis usitato. Prima vice hae literae punctatae compa-

ruerunt in tertio Volumine Operum Wallisii, multis annis postquam Calculus differentialis jam ubique locorum invaluisset. Alterum indicium, quo conjicere licet, Calculum fluxionum non fuisse natum ante Calculum differentialem, hoc est, quod veram rationem fluxiones fluxionum capiendi, hoc est differentiandi differentialia per gradus ulteriores Newtonus nondum cognitam habuerit, quod patet ex ipsis Princ. Phil. Nat. pag. 263, ubi pro differentiis vel incrementis primo, secundo, tertio, quarto etc. alicujus potestatis ex. gr. x^n, judicat ponendos esse secundum, tertium, quartum, quintum etc. terminos ipsius $\overline{x+0}^n$ in Seriem expansae per extractionem, nempe $x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} 0 + \frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2} x^{n-2} 0^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2.\ \ 3} x^{n-3} 0^3$ etc. (intelligit per 0 incrementum constans ipsius x, quod nunc notaret per $\dot{x}$). Vides autem, quod vera differentiandi methodus evicit, hanc regulam Newtoni falsam esse. Nam, excepto primo et secundo termino, reliqui omnes abludunt a differentialibus superioribus potestatis x^n, nam differentialis secunda non est $\frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2} x^{n-2} 0^2$, sed simpliciter $n.\overline{n-1}.x^{n-2} 0^2$, et differentialis tertia non est $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.\ \ 3} x^{n-3} 0^3$, sed tantum $n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.x^{n-3} 0^3$, et ita de reliquis, et hoc ipsum est, quod in nupero meo schediasmate Actis Lipsiensibus inserto jam notavi. Sed ex eo tempore, quo haec scripseram, animadverti (quod Agnatus meus mihi ostendit) Newtonum in suo errore perseverasse usque ad annum 1711, quo Libellus ejus, cui Titulus: Analysis per quantitatum series fluxiones, ac differentias, cum Enumeratione Linearum tertii ordinis, qui antea Tractatui Optico erat adnexus, fuit recusus, utpote in quo (pag. 64) sicuti in praecedente editione Tractatui Optico adnexa, asserit adhuc terminos secundum, tertium, quartum etc. hujus seriei $z^n + n0z^{n-1} + \frac{n.n-n}{2} 00z^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6} 0^3 x^{n-3}$ etc. exprimere incrementa primum, secundum, tertium etc. ipsius z^n. Sed, quod notandum, in exemplari quod mihi dono misit per Agnatum meum, ibi calamo ascripsit altera vice voculam, ut: nam ubi habebantur haec verba: tertius (terminus) $\frac{nn-n}{2} 00z^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum etc. quartus

$\frac{n^3 - 3nn + 2n}{6} 0^3 z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium etc. interseruit ut, scribendo nunc: erit ut ejus etc. adeo ut errorem suum non animadverterit, nisi brevi ante, et forte nonnisi post adventum Agnati mei in Angliam, ex quo alia quoque expiscati sunt Angli. Hinc dubito, annon in Epistola Keillii ad Sloannium scripta et jussu Societatis Tecum communicata mense Majo 1711, duo paragraphi incipientes: Sit incrementum et Praetera si differentia, qui continent correctionem erroris Newtoniani, sint nunc demum intrusi in apographo impresso in Commercio Epistolico, quod non nisi post abitum Agnati mei ex Anglia in lucem prodiit; Tuum est videre, an hi paragraphi in originali Tecum communicato reperiantur. Saltem constat, Newtono rectam Methodum differentiandi differentialia non innotuisse, longo tempore postquam nobis fuisset familiaris. Sed cogor abrumpere hac vice; rogo vero, ut quae hic scribo, iis recte utaris, neque me committas cum Newtono ejusque popularibus; nollem enim immisceri hisce litibus, nedum apparere ingratus erga Newtonum, qui me multis benevolentiae testimoniis cumulavit. Alias plura; nunc vale et fave etc.

Basileae 7 Junii 1713.

P. S. Cl. Hermannus nondum appulit, sed in dies exspectatur. Nescio, in quo statu reliquerit vocationem Patavinam, aut quanta spes supersit Agnato meo ad eam obtinendam: ei nuper testimonium procuravi ab Academia Scientiarum Paris. Proceribus Venetis exhibendum.

CCXLV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non vacat nunc discutere, quae meae doctrinae de impossibilitate logarithmorum numeris negativis assignatorum iterum opponis; si quid enim judico, non potest facile hic controversia esse, nisi in modo loquendi. Res ipsa vero satis clara est, impossibilium quantitatum impossibiles esse Logarithmos; et duplum impossibilis impossibile esse; Logarithmum denique numeri esse duplum Logarithmi radicis; plura addi ad sententiam meam necesse non

putabam. Si aliter Logarithmum sumis, ut haec locum non habeant, nihil hoc ad me. Concessisti, si sit $2^e = x$, et posito $e = 0$, sit $x = 1$, non posse dari e, posito $x = -1$. Hoc mihi sufficit, nec aliud intelligo, cum dico, non dari Logarithmum negativorum, et in hac mea Logarithmi definitione utique continetur, Logarithmum numeri esse duplum Logarithmi radicis quadraticae. Alias tamen Tuas Annotationes examinabo. Magis naturale putem appellandum non id, cui magis assueti sumus, sed quod natura prius est et simplicius.

Cum heri demum Tuas literas Hanovera acceperim, iisque statim respondere velim, caetera differo.

Anglicanum libellum mihi oppositum nondum vidi; merentur illae insulsae rationes, quas afferri ex Tuis conjicio, sale satyrico defricari. Poterant Newtonum suum in compossessione inventi. Calculi conservare, sed apparet non magis, eum cognovisse Calculum nostrum, quam Apollonius cognovit calculum Vietae et Cartesii speciosum. Fluxiones cognovit, non Calculum fluxionum, quem demum, ut recte judicas, nostro jam edito conflavit. Itaque plus justo ei attribui ipse, et humanitatis meae hoc pretium fero.

Scribit mihi Dominus Agnatus Tuus, in recensione Lipsiensi, de qua queruntur, valde attolli Tschirnhausii inventa. Ego non bene memini, sed si ita est, facile judicas, illam Newtoniani libri recensionem non esse a me; ego enim tam magnifica mihi de Dno. Tschirnhausio, ut scis, non promittebam.

Ubi domum reversus fuero, Keillii dissertationem manuscriptam mihi missam inspiciam, quam ego, ut par est, sprevi. Volebat, credo, ille ut serram cum ipso reciprocarem. Respondi simpliciter ad amicum, hominem novum et parum versatum in Historia inventorum anteriorum, somnia sibi fingere de modo, quo me mea cognovisse putat. Jussu autem Societatis has nugas ad me missas non poteram suspicari, etsi miserit Sloanius.

Nunc primum audio Gregorio quoque attribui meum inventum magnitudinis Circuli: Hugenius et quoque alii Parisiis testes sunt inventionis meae et modi, quo inveni. Hugenii hac de re literas adhuc inter schedas meas esse puto. Quin ipse Newtonus inventum meum Oldenburgio tunc communicatum in literis suis laudavit, modumque inveniendi meum singularem esse fassus est. Ignorabat ergo tunc inventionem Gregorii.

Satis apparet, Newtonum id egisse suis blanditiis, ut benevo-

lentiam Tuam captaret; conscium sibi quam non recto }stent talo, quae molitus est. Ego tametsi nolim, ut in mei gratiam Tibi negotium facessas, expecto tamen ab aequitate Tua et candore, ut profitearis apud amicos quamprimum, et publice data occasione, Calculum Newtoni nostro posteriorem Tibi videri.

Fieri potest, ut una vel altera scheda librorum a Dno. Varignonio mihi missa perierit; sed constat et statim a me significatum est Delorunium hominem lucripetam oblatis schedis libros negasse.

Velim nosse quid judicent Parisini. Varignonium pro me stare, vix dubito; sed nonnulli alii invidia ducti libenter fortasse accipient occasionem carpendi sibi datam, sed haec, credo, a parum intelligentibus fient.

Jam a multis annis haec Anglis nonnullis, etiam insignibus Viris, vanitas est inolita, ut captarent occasionem res Germanorum involandi et pro suis venditandi. Boylius Glauberianum inventum Nitri regenerati sibi tribuit; idem totum inventum Anthliae Pneumaticae a Gerikio habuit et tantum minuta quaedam in ejus structura mutavit, et tamen Angli, et eorum exemplo alii, verum inventorem ignorantes, Machinam Boylianam appellarunt. Ita nunc libenter Nicolaum Mercatorem Holsatum gloria primae inventionis Serierum privare vellent, et mihi indignati sunt optimi Viri et mihi amici decus vindicanti. Sic Hugenius Heuratii inventum contra Wallisii oppositiones vindicavit Neilio cuidam id tribuentis.

Dicis a Dno. Agnato Tuo non tantum Newtonum habuisse videri quandam erroris sui correctionem, sed et alia nonnulla ab eo expiscatos esse Anglos; haec qualia sint rogo ut indices. Inservient enim nobis ad cautelam. Spero eis nondum innotuisse meum modum Tangentes inveniendi curvarum quarundam non vulgari modo compositarum, ex quo deinde praeclaras consequentias duxisti. Nondum enim, quod sciam, publicatas puto, spero etiam eum Italo illi, cui cum Dno. Hermanno lis fuit, non fuisse communicatum.

Dominum Hermannum credo ad vos appulisse: iter ei accelerandum putem. Scripsi Berolinum mox affore; Dn. Abbatem Fardellam ex Tarragonensi Hispania Neapolim profectum non ita pridem, quidem mihi narravit Venetias nunc venisse. Quod si verum est, sperem Dno. Hermanno fuisse visum, et cum eo potuisse consilia capere pro Dno. Agnato Tuo; sin minus, Dn. Hermannus

ad illum pro eo scribere poterit; ego jam ei in hanc rem Neapolim literas miseram, ut apud amicos Venetos auxilio esset. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Viennae Austriae 28 Junii 1713.

CCXLVI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Per me licet definire logarithmum pro arbitrio Tuo, modo non neges (quod ab initio concessisti) assumtionem unitatis affirmativae pro primo numero esse mere arbitrariam, adeoque licere unitatem negativam pro primo numero adhibere, ut scilicet supponatur $\log -1 = 0$; quo fit ut omnia, quae de logarithmis numerorum negativorum in anterioribus meis literis scripsi, bene procedant, nec tamen inde, quod metuis, sequatur, impossibilium quantitatum fore possibiles logarithmos. Vidisti quoque, quo sensu verum sit, logarithmum numeri esse duplum logarithmi radicis, et quam parum evertat existentiam duorum Logarithmicorum super eodem axe, a Te primo negatam, a me vero ex ipsa Hyperbolae natura postea demonstratam. Hoc autem unicum erat, quod volebam. Id, si mihi nunc concedas, patiar libenter, ut reliqua sint merae definitiones.

De libello Anglicano multa non habeo, quod addam jam in superioribus a me dictis. Forte invenies ipse plura, ubi ipsum libellum videris. Quid Parisini in universum de eo sentiant, nondum equidem mihi constat. Varignonium quod attinet, ille in suis literis Anglorum procedendi modum eorumque argutas in arrogando prensationes valde improbat: optat vero, ut in longa possessione Te non turbassent. Quo ipso mihi in mentem revocavit, communem fere sortem Tibi esse cum Principe Tuo, utpote quem iniquiores Angli dejectum cuperent a successione Regni, uti Te a possessione Tui calculi. Interim non dubito, quin Tibi cum vindicandi supersint argumenta bene multa, tam ex privatis literis, quam aliunde petenda. Quantum mihi de rei veritate innotescit, facile judicabis nihil me celaturum, sive apud amicos, sive publice, ubi occasio id postulaverit; nec est cur timeas aliquid blanditiis a

me obtineri posse in aequitatis meae praejudicium. Magni quidem facio Newtonum, ejusque benevolentiam minime contemno, sed non spero, eum aliquid praeter honestatem a me petiturum, uti certe nihil hactenus petiit. Et si quis peteret vel petere sustineret, nihil responsi a me aliud referret, quam tritum illud: Amicus Socrates, amicus Plato, sed magis amica veritas.

Quae Agnatus meus Anglis communicavit, partim Newtoni Principia Philosophiae spectant, quorum nonnulla in Actis Lipsiensibus videbis, partim alia, quae ad analyticam non pertinent, ideoque timere non debes revelatum ipsis esse modum illum singularem Tangentes inveniendi curvarum quarumdam, et de differentiationis transitu a curva in curvam, hoc est, de invenienda differentia inter duas curvas infinite propinquas, quam materiam, si bene memini, valde promovi et ad alia non vulgaria, nec facile obvia feliciter applicui. Qualia si tentaminis loco Anglis proponerentur, foret meo judicio brevissima via ad os obturandum illis, si nimirum infirmitatem suam et calculi sui, cujus tantopere jactant antiquitatem, insufficientiam proderent, atque sic inviti palmam cedere cogerentur, quamobrem problemata quaedam excogitare deberes hac sola methodo solubilia, ut inde discerent esse quaedam saltem, quae nos suo calculo fluxionum non debemus: sicuti Cheynaeus quondam inepte jactavit, nihil nempe intra hos 20 vel 30 annos prodiisse in lucem, quae non sint iteratae repetitiones vel ad summum levia tantum corollaria eorum, quae Newtonus jam pridem invenerit, quasi nobis nihil amplius relictum fuisset, vel nullius esset pretii, quod subinde a nobis publicatum extat, et cujus in Newtonianis ne vestigium quidem videre est: qualia sunt quae de Catenariis, Velariis, Isochronis Paracentricis, Brachystochronis, de novis proprietatibus Cycloidis, de ejus segmentis innumeris quadrabilibus, de Calculo exponentialium seu percurrentium eosque differentiandi modo, de Coëvolutarum dimensione, de Motu tractorio, de reptorio, de Curvarum reductione ad circulares, de earum transformatione, et de innumeris aliis, quae Angli pro parte tentarunt, sed omni suo calculo fluxionum adjuti irresoluta reliquerunt, quod vel ex solo problemate Catenariae et Curvarum transformandarum patet, cui pertinaciter et longo tempore insudantes, aliud nihil quam turpes paralogismos produxerunt. Reliqua vero nostra si spernere affectant, qui fit quod ea omnia corradere et in suam linguam convertere non dedignentur, exemplo illius Angli nobilis Des-Hayes,

cujus extat liber in folio, anglice conscriptus (nescio an videris) continens Marchionis Hospitalii Analysin et reliqua nostra hinc inde ex Actis Lipsiensibus aliisque Diariis compilata, et omnia verbotenus translata. Praeterea nihil fere, vel parum admodum, de Newtonianis suisve aliis, editor admiscuit, licet prodigus admodum sit in laudes Newtoni, nostri vero parcus laudator, nec nisi in praefatione, et quidem ita, ut qui nostra non cognoverit, non facile judicaturus sit, illa quae tractat inventa ad nos magis pertinere, quam ad alios obscuri nominis, quorum integram phalangem nobiscum memorat, et tantam multitudinem obtrudit, ut, quemadmodum persuadere conatur, plagii suspicionem a se moveat. Sed contrarium facit manifeste, dum veros Auctores et Inventores sub nube reliquorum, a quibus nihil mutuatus est, abscondit, et ita quod unicuique debet, subdole dissimulat. Num quid iniquius censes? Sed haec est horum hominum indoles, ut quod a peregrinis proficiscitur, eo quidem utantur et tacite laudent, sed publice vel spernant vel supprimant vel ad suos deferant.

Caeterum non denegavi Tibi gloriam inventionis quadraturae circuli per seriem $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. Dixi tantum ex literis Gregorii (si non sint suppositae) patere, Gregorium fuisse primum hujus seriei inventorem; sed ipse videbis, quid hac de re sit credendum, ubi ad manus habueris Libellum Epistolarum. Potest esse, ut Gregorius invenerit prius, quod Tu postea etiam Tuo marte invenisti, et inscius quod ante Te jam fuerit ab alio inventum. Interim, si per literas probare potes, ipsum Newtonum Te primum credidisse Inventorem et inventum laudasse, hoc in rem Tuam apprime faciet, simulat enim Newtonus, in aliquibus literis in Libello isto publicatis, se non adeo magnifacere hanc seriem ob segnem admodum advergentiam, ut et sibi dudum innotuisse, quod primo inventa fuerit a Gregorio.

Tandem Hermannus noster a catharro pectorali, quo laborabat, restitutus, ante octiduum iter ingressus est, Argentoratum petens, hinc Francofurtum ad Moenum, ubi non diu morabitur, sed citissime perget Francofurtum ad Viadrum, Provinciam sibi demandatam auspicaturus. Quid de sede Patavina, discessu suo vacante relicta, constituerint Proceres Veneti, aut quid sint constituturi, ipsi aeque ac mihi ignotum hactenus fuit. Fortasse aliquid a Fardella, cui in gratiam Agnati mei scripsisti, percipies. Tradidit nuper Cl. Hermannus illi Diploma a Domino Cuneo acceptum, quo

Agnatus meus in Societatem Regiam Berolinensem cooptatur, pro quo jam gratias egit Domino Cuneo per literas, per Dominum Hermannum ad eum deferendas. Hisce quidem vale, Vir amplissime, et fave etc.

Basileae a. d. 29 Julii 1713.

CCXLVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

A Te et a Dno. Abbate Fardella literas eodem fere tempore accepi. Fardella Barcinone in Aula, me commendante, egerat, ubi rebus suis non male consuluit. Inde gravi symptomate Apoplectico percussus, et praeter spem recreatus, aliquamdiu Neapoli egit, et nunc valetudinis causa Aponum ad aquas calidas prope Patavium accessit; scribit ad me Patavio 4. Augusti, Cathedram discessu Dni. Hermanni vacuefactam adhuc vacare, et operam suam promittit.

Interea aliquid in mentem venit, quod Tibi in aurem dicam. Quid, si Tibi ipsi, aucto stipendio, demandaretur sparta Patavina? Est enim, ni fallor, salarium multo pinguius Basileensi, et in Tui, credo, gratiam augeretur; nec magnum adeo est ab Helvetiis ad Patavinos iter, et locus credo magis conveniret Tuae valetudini, quam Germania inferior, nec Tibi Medico et Mathematico Religionis diversitas nocebit. Tibi Tuus ex Fratre Nepos Basileae succedere posset. Aperui sententiam meam Dno. Fardellae, literis hodie datis, addidique nihil posse Reformatores studii facere, quod magis faciat ad Academiae illius decus.

Addidi me Tibi in hunc sensum esse scripturum, et a Te petiturum, ut ipsi recta mentem Tuam significes, quod poteris facere aenigmatice, si modo ei dicas, an sententiae meae accedas, vel non. Nam si refutas, dissimulabit ille consilium, et pro Dno. Nepote Tuo laborabit; sin mihi accedis, poterit ille ostendere Senatoribus Venetis Academiae curam gerentibus, quantum Te vocato ornamenti sit Academiae accessurum.

Vereor ne Dno. Nepoti Tuo nonnihil obsit juventus; etsi enim Dno. Hermanno non obfuerit, erat tamen alius tunc habitus rerum,

et plus tunc fortasse poterat Fardella, qui nunc diu absens aliam, puto, rerum faciem invenit. Accepi Roma, cogitasse Proceres de Mathematico quodam Roma vocando, Viro ex ordine quodam Religioso, sed nomen excidit. Ea res facit, ut timeam, ne nostrae commendationes non satis validae fuerint . . . . Quidquid ejus sit, experiemur an consequi destinata liceat alterutro modo. Fardellae significabis, ut assensu etiam Tuo intellecto, tamen rem ita gerat, ut non procus, sed sollicitatus videare, quod famae Tuae meritisque convenit.

Certissimum est, omnes in Anglia ad novissima usque tempora ignorasse, Jacobum Gregorium Tetragonismum meum etiam habuisse; certe ipse ejus ex Fratre Nepos, David Gregorius, hoc ignoravit, et inventum in Libro suo De Quadraturis mihi adscripsit. Ubi ad meas schedas reversus fuero, inspiciam veteres literas, quae adhuc extant, in quibus, ni fallor, manifesta erunt vestigia, Newtonum Analysin nostram parum exploratam habuisse tunc, cum aliquod ei mecum per Oldenburgium commercium erat. Ego, neglecto Keilio, aliisque ejusmodi Newtoni adulatoribus, hominibus obscuris, cogar Newtono ipsi exprobrare animum parum sincerum et acta testimonio conscientiae contraria: nam ipse ignorare non potest, Analysin istam infinitesimalem ab ipso ad me proficisci non potuisse, et tamen nugatoribus imperitis talia asserentibus favet et indulget. Ita dum nimia, cum alterius injuria, affectat, cogit me ei jam negare, quae, ex meo candore alios aestimans, nimis liberaliter concesseram, credideramque asserenti, in Calculum nostrum de suo eum incidisse, quod verum non esse re diligentius excussa satis apparet.

Intelligo in Anglia esse Viros Eruditos, qui processum Viris gravibus et bonis indignum non probant. Et quod conjicis, non ab omni veri specie abest, eos, qui parum Domui Hanoveranae favent, etiam me lacerare voluisse; nam amicus Anglus ad me scribit, videri aliquibus non tam ut Mathematicos et Societatis Regiae socios in socium, sed ut Toryos in Whigium quosdam egisse. Sed ego exigua, credo, scheda efficiam, ut poeniteat eos nugarum. Utar inter alia argumentis Tuis, sed a Te nominando abstinebo. Quod superest vale et fave etc.

Dabam Viennae Austriae 19. Augusti 1713.

P. S. Spero Dominum Varignonium curaturum, Te praesertim hortatore, ne quid in Gallia fiat, de quo queri possim. . . .

CCXLVIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quo die novissimas Tuas accepi, eodem accepit Agnatus meus literas a Domino Michelotto, Celebri Medico Practico apud Venetos, qui significat Illustr. Ruzzinum amplexum esse partes Agnati mei, et jamjam in ejus gratiam Venetias scripsisse; addit se quoque ejus rem agere cum optimo successu apud Urbis Proceres et Academiae Curatores, quos visendi, ut medicus, crebram habeat occasionem. Respondit Agnatus Dno. Michelotto, prout rei ratio exigere videbatur. Scripsit quoque me suadente ad Dn. Abbatem Fardellam, ut, in quo statu res suae essent Venetiis, ille sciret, et huc quoque operam suam dirigere vellet. Haec quidem et Tibi sine mora perscribenda duxi, ut quid porro rebus sic stantibus factu opus sit, mature deliberes. Quod interim in mentem Tibi venit de sparta ista Patavina mihi ipsi demandanda, vereor vehementer ut unquam aliquem successum sortiri possit. Nosti enim me esse uxoratum, imo et numerosa familia onustum, unde difficillimum foret mutare domicilium, nisi forsan consultum putaveris, ut Hermanni exemplo me in sexennium adstringam, et, relicta familia, pro eo tempore Patavinis inserviam; sed dubito, num Academiae illius Curatores lantum satis salarium offerre vellent, quod suscepti consilii et tantae mutationis magnitudinem adaequet: nisi enim fortunae insignis melioratio evidentissime pateret, patriis laribus me avelli non paterer. Binis vicibus vocationem Ultrajectinam respui, quamvis honorificis conditionibus stipatam; et modo ante triennium repudiavi bis mille florenos annuos a Leydensibus oblatos cum Professorio munere, ut de emolumentis extraordinariis, quae in Academiis Hollandicis ordinaria fere superant, nihil dicam, qualia in Academiis Italicis non dantur, ut audivi ab Hermanno, et aliunde idem confirmatum habeo. Adde quod discrimen Religionis me valde moveret, ut Italiae praeferrem Belgium: quae omnia tantum ponderis habent, ut superari non possint, nisi notabili fortunae augmento, quod se ex Italia offerret. Tuum vero hac de re judicium et consilium lubenter audivero. Caeterum recte judicas, rem ita gerendam esse, ut non procus, sed sollicitatus videar; etenim famae meae non bene conveniret, si post tot honorificas invitationes ultro mihi oblatas, diceretur me ambivisse stationem de-

relictam ab Hermanno, qui in nonnullis Discipulus meus fuit: causa haec est, quare ipse non scripserim Dno. Fardellae, sed per Agnatum scribi curaverim.

Pro voto meo facies, si in scheda, quam paras contra libellum Anglicanum, argumentis a me suggestis ita utaris, ut Angli a me profecta non sentiant; nisi forte quaedam invenias, quae publice extant in Annotationibus meis in Actis Lipsiensibus nuper editis, de quibus aliquis Anglus, Discipulus antehac meus, nunc Parisiis agens, sequentia mihi scribit: „La semaine passée, inquit, il arriva un de mes amis d'Angleterre, qui m'informa qu'on n'avait pas encore achevé d'imprimer la Nouvelle Edition des Principes de Monsieur Newton; pour moy, je croy que le Chevalier tarde à dessein, pour voir, s'il peut, les remarques que vous avez faites sur la première Edition de ce livre: ce qui me confirme dans cette opinion, est que j'ay rencontré l'autre jour un Ecossois, qui se mêle un peu de Mathematiques, qui m'a informé qu'une faute, que vous aviez trouvée dans ce livre, faisait beaucoup de bruit en Angleterre; mais que les amis de Mr. Newton la faisaient passer pour une petite faute de calcul etc." Qualem vero intelligat errorem, quem detexerim (detexi enim plures) non facile conjiciam, nisi sit ille, de quo Agnatus meus eum praemonuit, cum nuper in Anglia versaretur, antequam schediasma meum fuisset impressum et cujus erroris correcturam postea, singulari scheda, suo libro nondum edito inseruit Newtonus. Habet autem error iste, qui respicit determinationem resistentiae medii pro data curva describenda a projectili, originem suam ex eo ipso, quod paralogizat Newtonus (ut ego ostendi) in differentiandis potestatibus ad ulteriores gradus, seu in capiendis fluxionum fluxionibus omnium ordinum, ope potestatis indefinitae in seriem expansae.

Utrum facile patiatur Varignonius, ut aliquid in Gallia fiat, de quo queri possis, in hac praesertim lite ab Anglis Tibi intentata, et quid ei hanc in rem perscripserim, intelliges ex sequentibus, quae responsi loco nuperrime mihi reposuit. „Je suis," inquit „comme vous, fort mecontent de la mauvaise querelle que Monsieur Keill vient de susciter à Monsieur Leibnitz. Il me parait, comme à vous, que le Commercium Epistolicum prouve seulement que Monsieur Newton, au temps des lettres qui y sont rapportées, avoit connaissance des infiniment petits, mais il n'y parait pas qu'il en eût le calcul tel que Monsieur de Leibnitz l'a pu-

blié en 1684, et que Monsieur Newton l'a donné 3 ans après dans les pages 251, 252, 253 de ses Princip. Mathem. où il reconnait que ce Calcul luy avoit été communiqué 10 ans auparavant par Monsieur Leibnitz auquel temps il dit qu'il l'avait aussy, ainsi que la phrase renversée le prouve, sans dire à quel point il l'avoit. Avant vous, Monsieur de Leibnitz et feu Monsieur vôtre Frère, je ne sçay point, qu'on eût passé les premières differences, employées dans les pages précedentes de Monsieur Newton, qui n'en a fait mention que longtemps depuis dans son Traité De Quadraturis. Je suis, dis-je, très faché de voir Monsieur de Leibnitz forcé de se distraire de ses occupations si utiles au public, pour se defendre d'un mauvais procès dont le public n'a que faire etc."

Ex quo Cl. Hermannus hinc discessit, nihil amplius de eo inaudivimus, nisi quod Francofurtum ad Moenum transierit. Speramus autem propediem literas ab eo Francofurti ad Oderam datas. Hae vero ut Te, feliciter emenso itinere, reducem inveniant Hanoverae salvum et incolumem, est quod ex animo voveo et precor. Hisce itaque vale et fave etc.

Basileae a. d. 9. Sept. 1713.

P. S. Fratris Opus posthumum de Arte conjectandi evasit tandem praelum; curabitur ut ad Te quoque exemplar ejus mittatur prima occasione.

CCXLIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo res Tuas eo loco esse, ut mutationem non quaeras. Quia Dno. Agnato Tuo firma spes est successus, merito prioribus inhaeremus, nec Dnus. Abbas Fardella deerit pro suo in nos affectu. Miror Dn. Hermannum ne verbo quidem rerum suarum statum significare mihi, ex quo Italia excessit.

Dnum. Newtonum poenitebit favisse adulatoribus, et nugaces eorum conjecturas de meis repertis comprobasse, quas non fundatas esse haud poterat ignorare. Certe quae Keilius ad me miserat, et quae publice repetiisse intelligo, erant plena ineptiis, mihique refutatione indigna videbantur.

Vellem doctrinam Serierum, in qua potissimum versatus fuit

Newtonus, promovisset longius, inprimis circa modum agnoscendi, utrum advergant, qui transcendentibus aeque ac ordinariis quadret. Ita enim multa in transcendentibus agnosci possent, quae alias non facile paterent. Ideo Dominum Agnatum Tuum hortatus sum, ut huic argumento diligentius incumbat, repetiique monitum in adjecta Epistola, vel ideo quod ille de mente mea ex priore praecipitantius judicavit, cum explicationem verborum meorum convenientiorem, credo, mererer.

Universalissima (id est ordinariis aeque ac transcendentibus quibuscunque communis) haec regula est, ut omnis valor per Seriem sit advergens, cum partes Seriei in infinitum decrescentes sunt alternis affirmativae et negativae. Et videtur methodus excogitari posse, quamvis Seriem advergentem transformandi in talem, quanquam et alias vias video, sed quae amplius excoli mererentur.

Nihilne ad Te Moivraeus scribit de moliminibus Newtonianorum, vel Burnetus, qui hoc anno fuit nonnihil implicatus negotio molesto, quod libellum Aulae ingratum protrusisse diceretur. Nam pater ejus, Episcopus Salisberiensis, qui nuper obiit, erat in partibus Aulae adversis.

Gratias ago, quod Dni. Varignonii sententiam sane aequitati consentaneam mecum communicasti. Is qui litem ab Anglis mihi motam in Diario Parisino attigit, merito irrisit judices in propria causa.

Non est cur Dnus. Varignonius vereatur, ne haec lis me magnopere turbet, aut tempus mihi perdat; excitabit potius ut aliquid molier, aut quod molitus sum, perficiam, a quo fortasse alias abstinuissem. Ἀγαθὴ δ' ἔρις ἥδε βροτοῖσι.

Non parvi momenti est, quod notas, errorem Newtonianum circa determinationem medii, cujus resistentia data curva describatur, etiam ex non bene intellecta ratione subdifferentiarum profectum esse.

Hugenius etiam ad marginem Exemplaris sui quosdam in Newtono errores notaverat, ut mihi narravit, qui in Batavis Exemplar vidit, cum Bibliotheca Viri distraheretur. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Viennae 25. Octobris 1713.

P. S. Gratissimus erit libellus Domini Fratris Tui p. m. de Arte conjectandi.

CCL.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nescio an Agnato aliqua spes successus supersit; ex quo enim a Michellotto literas accepit, in quibus multa promittebat, nihil amplius ab eo in hunc usque diem intellexit; pariter responsi nihil accepit ab Abbate Fardella, ita ut de felici eventu jamjam desperare incipiamus; fortasse Tibi quid certius ea de re constat. Quod ad meas res attinet, fateor eo loco illas esse, ut mutationem non facile permittant, eam tamen, si quae sese offerret, avidissime arriperem praesertim si fructuosa foret; habeo quippe peculiares mutandi causas, quas nunc aperire non attinet. Utinam ex Batavis nunquam migrassem! utinam praevidissem olim, quae nunc video atque praevideo!

Dn. Hermanni Pater mihi dixit, se a Filio suo intellexisse, quod Francofurti ad Oderam feliciter appulerit et paucis post diebus suam docendi Provinciam auspicatus fuerit ab Oratione quadam inaugurali: ante abitum ex hoc loco ad Te literas misit, nisi vehementer fallor, quas vero intercidisse oportet si non acceperis.

Tecum sentio fore ut aliquando poeniteat Dn. Newtonum, quod tam faciles aures praebuerit adulatoribus; consultum interim erit, ut quam responsionem moliris contra Commercium Epistolicum, mature absolvas et in publicum edas, ne ob retardationem gloriandi causam habeant. Inprimis Keylius et Cheynaeus mereri videntur, ut probe defricentur, omnium quippe Idololatrorum Newtonianorum acerrimi et in Exteros iniquissimi. Sed vereor, ne non vacare possis huic negotio, antequam ad Lares Tuos redieris.

Bene mones de Doctrina serierum, multa per eas agnosci posse in Transcendentibus, quae alias non facile paterent; Agnàtus meus qui ob negotia quaedam extra urbem agit, super hoc argumento ad Te scribet; interim nescio, an demonstrari possit quod asseris, omnem valorem per seriem esse advergentem, per consequens finitum, cum partes seriei continuo decrescentes sunt alternatim affirmativae et negativae.

A longo jam tempore nihil literarum accepi a Moivraeo et Burneto, quanquam uterque responsionem mihi debeat, sed aliunde audivi Novam Editionem Princip. Phil. Nat. Newtoni jam a 4 aut 5 mensibus publice prostare; eam vero nondum vidi, etsi aliquis An-

glus ejus exemplar ex Gallia mittendum quam primum acciperet, mihi promiserit. Quem notavi errorem Newtoni circa determinationem medii, cujus resistentia data curva describatur, correxit in Nova Editione, antequam publicaretur, per interpolationem alicujus schedae idque ex monitu Agnati mei; reliquos errores suos potuit etiam corrigere ex scripto meo, quod publicavi in Actis Lips. sub initium hujus anni et quod ille vidit aut sane videre potuit, antequam lucem aspexisset nova ipsius Editio; sed sicuti priorem correctionem ita inseruit, quasi a semet ipso haberet, nulla facta mentione mei vel ejus, a quo fuerit monitus, ita haud dubie, quod ad caeteros, eadem sinceritate egit.

Errores illi, quos dicis, Hugenium ad marginem exemplaris sui in Newtono notasse, sunt forte non alii, quam qui jam dudum publice extant ad calcem Historiae Cycloidis a quodam Groningio Wismariensi editae; forte etiam ab ipso Groningio Tibi hoc narratum fuit, nam et mihi narravit, cum ex Batavis veniens Groninga transiret et in transitu Gradum Doct. Juris capesseret; sed nihil eorum omnium, quae ego notavi in Newtono, ab Hugenio notatum fuit. Et certe haud valde magni momenti sunt notae Hugenianae, possetque Newtonus gloriari, si caetera omnia in opere suo recte se haberent.

Curabimus ut in Nundinas Lipsienses vel Francofurtenses mittantur ibique Bibliopolae Hanoverano tradantur, si quae aderunt Tibi destinata juxta Libellum fraternum de Arte conjectandi.

Quod superest, vale et fave etc.

Basileae a. d. 6 Decbr. 1713.

CCLI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

. . . .

Scripsi ad Fardellam, etsi restitisses, mihi tamen spem subnatam, si honorificae satis conditiones offerentur, posse Te Patavinis vindicari, quo nihil in hoc genere a Republica fieri posset gloriosius.

Dno. Hermanno tandem literas Francofurto-Oderano accepi, sed ex quibus non intelligo, utrum mihi antea scripserit, ex quo Italia discessit.

Ipse, ubi animum attenderis, facile animadvertes, omnem valorem per seriem esse advergentem, per consequens finitum, cum partes seriei continuo decrescentes sunt alternationis affirmativae et negativae. Et ecce demonstrationem:

$$\text{Sit Series } \overbrace{a - b + c - d}^{L} \underbrace{\;+ e - f}_{M} + g - h + i - k + \text{etc.}$$

cujus termini decrescant in infinitum, ita ut quivis sit minor proxime antecedente.

Dico 1°. quantitatem ejus esse finitam, et 2°. Seriei portionem ab initio sumtam terminatam per +, verbi gratia L, esse majorem Serie ipsa, at 3°. portionem ab ipso sumtam terminatam per —, veluti M, esse minorem Serie; sed 4°. errorem semper esse minorem, quam terminum ultimum aut ultimo proximum signo — affectum, et 5°. Seriem finitam continuatam esse advergentem ad infinitam.

Series vocetur S. Primum L est major quam S, quia ex L fit S, plus subtrahendo (nempe f, h, k etc.) quam addendo (nempe g, h, i etc.) quae fuit Assertio secunda. At M est minor quam S, nam ex M fit S plus addendo (nempe g, i etc.) quam subtrahendo (nempe h, k etc.) quae fuit Assertio tertia. Quare S cadit inter L et M, adeoque est quantitas finita, quae fuit Assertio prima. Sed error seu differentia ipsius S ab extremis L et M est minor, quam differentia extremorum (nempe f) secundum Assertionem quartam. Continuandoque quantum lubet, f est minor data ex hypothesi; itaque habetur et Assertio quinta.

Judicio Tuo pro me usus sum, sed nomine Tuo suppresso; atque ita ut indicio non sit, Te esse Autorem ejus; dico, ita judicasse Mathematicum insignem, et qui partialitatis accusari non possit. Sed ut Apologiam justam edam, opus est ut Commentarium ipsum Epistolicum videam, et cum meis schedis conferam. Fortasse recudi curabo auctius.

Nescio an in eo Commercio, quod nuper Londini edidere, repetantur eae literae, quas Wallisius, me consentiente, edidit, et quae satis manifeste Newtonianam praetensionem destruunt.

Keilius vix meretur ut nominetur, homo enim vanus gloriolam me impugnando quaesisse videtur. Velim nosse, an Cheynaeus se negotio immiscuerit.

Newtonus multis modis effecit, ut jam de candore ejus, adde etiam de Propositionibus dubitare cogamur. Debebat agnoscere, per quem profecisset. Ajunt doctrinam de explicando motu Planetarum per simplicem trajectionem combinatam gravitati, ab Hookio jam propositam fuisse. Paralogismi, quos in scriptis ejus notasti, faciunt ut dubitare cogamur, utrum recte numerum Curvarum tertii gradus determinaverit. Digna foret disquisitio illa cura Dni. Agnati Tui, quem consilio Tuo ad profunda ejusmodi eruenda juvare posses. Gratissimam etiam mihi rem et in publicum utilissimam faciet, si in Seriebus porro elaborabit, quarum doctrina multum adhuc abest a perfectione. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Viennae 10 Januarii 1714.

P. S. Scripsit ad me Dnus. Hermannus, Hanoverae jam agere Nobilem Venetum Venier, amicum Procuratoris Loredani, Academiae Curatoris, et per eum juvari consilia nostra posse. Statim scripsi Hanoveram ad amicum, ut si illic esset Venerius, significaretur illi, quanta sit laus, quanta merita Gentis Bernoulliae in rem mathematicam, quamque res ad gloriam suae Reipublicae pertineat. Peto ut inclusas ad Dominum Scheuchzerum cures.

CCLII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Accepimus nuper, Agnatus meus et ego, literas ab Abbate Fardella, in quibus quod ipsi de me scripseras significat, sciscitaturus, num, si conditiones honestae et lautae satis mihi offerrentur, eas acceptare vellem, urgetque ut ipsemet ego eas perscribam, promittens se omnem lapidem moturum, ut Proceres Veneti in eas consentiant, ita tamen ut hoc non noceat Agnato meo, si forte ego recusavero; quare spem de novo concepimus felicioris successus. Respondimus nos ambo Dno. Fardellae sine mora hunc circiter in modum: nos scilicet gratias agere pro summa qua est erga nos benevolentia, ipsumque proin rogatos nos velle, ut in hoc affectu perseveret atque incoeptum opus absolvat; me quidem magnas habere difficultates superandas, cum sim uxoratus atque sex liberorum parens, impeditus numerosa familia atque aedes proprias inhabitans; me vergere ad quinquagesimum annum, qua ae-

tate vigor et vires languescere incipiant; nondum triennium esse elapsum, quo Vocationem Leydensem repudiaverim cum oblato salario bis mille florenorum Hollandicorum annuorum et emolumentis extraordinariis (qualia in Academia Patavina non habeantur) tantumdem minimum efficientibus non computatis, nullaque habita ratione ejus, quod Leydae invenissem meae Religionis homines, cum quibus et tutius et liberius, quam in Italia, degere potuissem; haec omnia proinde tantum apud me ponderis et rationis esse, ut, sine evidentissima et notabili fortunae melioratione, a me impetrare non quem tam magnam tamque molestam subire mutationem, atque de novo lares aliorsum transferre; cum vero temeritatis, ne dicam imprudentiae, quaedam nota in me esset, si peterem stipendium insolitae adeo magnitudinis, me convenientius judicare ut ab ea re animum abducam atque mentem meam candide aperiam, quam ut vana spe diu lactem eos, qui forte existimant me pretio ordinario obtineri posse; quod vero spectet ad Agnatum meum, adhuc coelibem neque tanta obstacula habentem, eum utique non rejecturum invitationem, si praesertim stipata foret salario annuo non minori, quam quo fruebatur Praedecessor Cl. Hermannus. Haec cum ita se habeant, addidi porro, me Dn. Fardellam rogare, ut quod sibi sit auctoritatis apud Proceres Venetos, illud impendat in gratiam Agnati mei; me plane non dubitare, quin Agnatus meus Provinciam sibi demandatam omni ex parte sit adimpleturus, ac quam de ipso conceperunt spem minime delusurus. Haec sunt, quod ad substantiam, quae Dno. Fardellae pro responso dedi, quaeque et Tibi perscribere volui, ut in literis, quas forte dabis ad ipsum, ejus quod e re esse censuerimus, mentionem facere possis.

Bona est demonstratio, quam dedisti de advergentia valoris seriei, cujus termini alternatim affirmativi et negativi continuo decrescunt, ita nempe, ut quivis sit minor proxime antecedente; sed putabam Te posse demonstrare valorem quoque finitum esse, cum seriei termini ita sunt comparati, ut quivis affirmativus proxime antecedente affirmativo, et quivis negativus proxime antecedente negativo sit minor, et si forte non minor, sed major esset quam immediate praecedens: quod utique impossibile est demonstratu; dantur enim exempla in contrarium, ut $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{32}$ etc. cujus termini in infinitum decrescunt, et alternatim sunt affirmativi et negativi; habet tamen series valorem infinitum; nam termini affirmativi constituunt seriem

harmonicam, quae, ut constat, summam habet infinitam; negativi vero faciunt seriem geometrice proportionalium, cujus valor est finitus. Caeterum in suppositione Tua, qua terminus proxime praecedente minor supponitur, finitus valor seriei facillime aliter ita demonstratur: $a-b+c-d+e-f+$ etc. $< a-b+b-d+d-f+f-$ etc. $= a$. Ergo $a-b+c-d+e-f$ etc. minor quam a; ergo ejus seriei valor finitus. Reliquae assertiones a Te demonstratae etiam hinc facile demonstrantur.

Optime facies, si quae suppeditavi, ea a me profecta dissimules in Apologia, quam paras contra Commercium Epistolicum ab Anglis editum, in quo quidem repetuntur quaedam ex literis, quas Wallisius edidit. Nescio autem, annon quaedam, quae in Tui defensionem facerent, sint omissa, neque hactenus vacavit omnia inter se conferre. Ante annum et ultra promisit Dn. Moivraeus, nomine Newtoni, hunc mihi missurum hoc Commercium una cum exemplari novae Editionis suorum Princip. Philos. Jam vero dudum exemplaria distribuenda misit in Galliam; ad me vero nihil hactenus, nec libri, nec literarum amplius pervenit. Unde animum subiit suspicio, an forte Newtonus mihi succenseat, quod animadversiones quasdam meas superioris Anni mensibus Februario et Martio in Actis Lipsiensibus publicaverim in veterem Editionem Princip. Phil. Keilius Newtoni simia videtur; quidquid ab eo vidi ex Newtono compilatum est. Cheynaeus, quondam magnus Newtoni Idololatra, valedixit, ut audio, rebus Mathematicis; victurus postbac inter nescio cujus sectae Visionarios, Fatii exemplum secutus, nisi omnino Wistoni, qui Arianismum resuscitare conatur.

An Newtonus non erraverit in Enumeratione Linearum tertii ordinis, omittendo forte quasdam, quasdam alias bis sumendo, pro diversis quae eaedem sunt habendo, ut accidit Craigio et aliis, qui problema de transformatione Curvarum solvere volentes, eandem cum data exhibuerunt ad diversum tantum axem; an, inquam, Newtono non simile quid contigerit, asseverare non ausim: ejus enim Tractatum hac de materia ut examinarem, nondum a me impetrare potui, quia non libenter hisce tricis, utpote haud valde utilibus me immisceo. Frater meus aliquando hoc vadum tentavit; quo vero successu non memini, fortasse in Scriptis ejus aliquid invenire est.

Sub praelo habeo aliquem Tractatum Gallicum de Manuaria Nautica, cui titulus: Essai d'une Nouvelle Theorie de

a Manoevre des Vaisseaux, quem ante Pascha praelum evadere spero, ita ut ad Nundinas Francofurtenses pro Te exemplar mittendi tempus supersit. Huic scriptioni ansam dedit Renaldus Gallus, Eques et Ingeniarius Navalis, qui circa medium anni superioris ad me misit libellum, in quo litem exoletam, quam olim habuit cum Hugenio, refricavit atque contra Objectiones Hugenianas aliter quam olim, sed non magis feliciter, Theoriam suam vindicare voluit. Respondi Renaldo, sed damnando ipsius opinionem, aliumque errorem maximi in hac re momenti ostendendo, quem ipse Hugenius non animadverterat: quam itaque jam antea excogitaveram novam Theoriam novasque pro ea regulas, quales Hugenius construendas in se suscipere non ausus est, in singularem Dissertationem redegi, Tibi, ut spero, non displicituram.

Dn. Scheuchzerus Senior, Professor Mathesis Tigurinus, cui literas Tuas illis quas ad me scripsisti inclusas, transmisi, postquam per 20 annos Professionem sine salario administrasset, nunc cum in demortui alicujus locum succedere ejusque salario, vi Decreti, gaudere debuisset, spe sua excidit; quare animo dejectus anhelat stationem extraneam. Sicubi aliquam ipsi procurare posses, operam Tuam non male collocares: est enim Vir multi laboris et scribendo et observando, sed cui, ob fortunae tenuitatem et facultatum angustiam, multa desunt ad studiorum promotionem; eum itaque curvae Tuae commendo. Vale et fave etc.

Basileae a. d. 28 Febr. 1714.

CCLIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Hoc momento literas Tuas accipio, ac statim respondeo, quia Dn. Cognatus Tuus ait, mittendum esse Francofurtum Libellum Dni. Fratris Tui p. m. si indicem, quis ibi recipere debeat. Et cum tempus instet, significo posse ibi dari Bibliopolae Hanoverano Forstero, vel alicui alteri Brunsvicensi aut Hanoverano Mercatori. Quod si ergo missus est jam Francofurtum liber, de quo non dubito, per literas significari fortasse adhuc poterit, cui tradi debeat, nisi forte id jam factum est. Posset fortasse etiam in Lipsienses Nundinas pari ratione mitti. Gaudebo simul videre praeclarum

Tuum, haud dubie, libellum De Navibus regendis. Caetera ad Te et Dn. Cognatum Tuum scribenda, ob brevitatem temporis, dum cursor publicus instat, in sequentes differo.

Est Hanoverae quidam Dnus. Venier, Nobilis Venetus, cujus Frater, ut intellexi, aliquam in rebus Patavinis auctoritatem habet: huic etiam causam Dni. Cognati Tui commendavi. Putem Doctrinam Serierum absolutam majoris momenti fore, quam prima fronte videtur. Quod superest, vale et fave et Dnum. Cognatum interim a me saluta etc.

Dabam Viennae 31 Martii 1714.

CCLIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Mitto ecce Forsteri Chirographum de accepto fasciculo, in quo continentur Ars Conjectandi, Opusculum Fratris mei posthumum, et Manuaria Nautica, a me nuper edita: Tuum nunc est fasciculum repetere a Dno. Forstero. Cl. Wolfius mihi misit non ita pridem Tomum primum sui Cursus mathematici, et cum eo plura exemplaria schediasmatis continentis responsionem Tuam (nam Tuam esse dixit Wolfius et publice extat in Diario illo Germanico: Büchersaal, quod Lipsiae imprimitur) meque rogavit, ut ea inter Mathematicos mihi notos distribuerem, quod equidem jam feci, praesertim in Galliam non pauca misi; sed in Angliam mittere nulla volui, ne me Angli pro Auctore suspicentur hujus Responsionis, aut saltem illius Epistolae, quam inseruisti. Si Tibi ad manus fuisset scripta et literae inter Te Anglosque olim reciprocatae, invenisses fortasse plura et fortiora argumenta in usum Tuum facientia: quales enim hae Literae extant in Commercio Epistolico, quaedam earum valde suspectae videntur, si non omnino confictionis, saltem alterationis et falsificationis. En aliquod exemplum: „Pag. 25 Commercii Epistolici habetur Epistola Jacobi Gregorii ad Collinsium 15. Februarii 1670 data, ubi haec leguntur: Quod attinet Newtoni Methodum universalem, aliqua ex parte, ut opinor, mihi innotuit, tam quoad Geometricas quam Mechanicas curvas. Nihilo tamen minus ob series ad me missas gratias ha-

beo, quas ut remunerem, mitto quae sequuntur. Sit Radius = r, Arcus = a, Tangens = t, Secans = s, et erit

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^6}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} \text{ etc. eritque}$$

$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} \text{ etc. et}$$

$$s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7} \text{ etc.}$$

Sit nunc tangens artificialis etc.

Jam quod spectat ad primam seriem $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^6}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6}$ etc. potest esse, ut ea nunc demum ab Editore Commercii Epistolici huic Epistolae Gregorianae fuerit callide inserta, ut Tua quadratura Arithmetica Circuli $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. jam ante a Jacobo Gregorio communicata adeoque inventi gloria non Tibi, sed Gregorio deferenda dici posset: probabilem enim reddit hanc conjecturam locus quidam, in quem nuperrime incidi, legens in Davidis Gregorii Exercitatione Geometrica de Dimensione Figurarum, impressa Edinburgi anno 1684, ubi haec diserta habentur verba: „Fortassis notatu erit dignum, hinc consequi Praestantissimi Geometrae Gothofredi Gilberti (Guilielmi) Leibnitii Circuli Quadraturam Transact. Phil. Mensis Aprilis anni 1682 editam, si nempe ponatur DA = $\frac{1}{2}$, arcus AF 45 grad. erit AC etiam $\frac{1}{2}$; unde erit sector DAF = $\frac{1}{2}$ DA × AF arc. $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} +$ etc. ejusque octuplum, nimirum Circulus, cujus quadratum circumscriptum est 1, erit $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ etc. in infinitum.

Ergo David Gregorius asserit Tibi primae inventionis gloriam. Quis autem tam vecors esset, ut putaret, Davidem hoc fecisse in praejudicium Jacobi, Patrui sui, cujus inventum, si Inventor fuisset, ipse ignorare non potuisset, depraedicans alioquin singulis fere paginis ejus Methodos et Series, fatensque ab initio suae Exercitationis se nactum fuisse post mortem Patrui sui ejusdem adversaria, in quibus utique reperturus fuisset seriem Tibi ab Anglis controversam; si vel maxime Jacobus vivens eam celare voluisset Davidem; quod tamen minime verisimile est, nam ne umbram quidem verisimilitudinis haberet, si quis diceret Jacobum Gregorium studio abscondidisse Davidi, sanguine sibi proximo, quod cum Collinsio, homine ad se nihil pertinente, tam liberaliter communi-

caverit? Quae cum ita sint, nescio quid sentiam de eo, quod habetur in Epistola quadam Oldenburgi ad Te scripta d. 15. Aprilis 1675, et Commercio Epistolico inserta pag. 39, in qua nempe haec verba reperio: „Et conversim ex tangente invenire arcum ejus $a = t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} -$ etc." Forsitan haec ab Editore Commercii Epistolici nunc sunt per fraudem intrusa; quare operae pretium esset, ut autographum ipsum inspiceres; talem enim si dolum detegere posses, actum esset de candore Adversariorum Tuorum, et nullam fidem amplius inveniret narratio alias satis speciosa, quam contexunt et per epistolas ubique probant. Incumbit igitur Tibi, ut montres publice, has epistolas fuisse corruptas et adulteratas, adeoque reliqua omnia esse sublestae fidei. Haec me judice brevissima est via confundendi Antagonistas eosque ad turpe silentium redigendi.

Ex Gallia intelligo Fontenellium, Academiae Secretarium, scribere librum de infinite parvis et magnis, quem brevi absoluturus sit. Caeterum ab Agnato meo quam officiosissime salutaris. Vale, Vir Amplissime, et fave etc.

Basileae a. d. 23 Maji 1714.

CCLV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Pulcherrima Tua de Phoronomia navium dissertatio tandem ad me pervenit, postquam conversio rerum Britannicarum reditum Hannoveram meum acceleravit. Praeclara edis specimina Artis Analyticae in re maxime utili humano generi. Et spero futuros, qui Tabulas condant, quales proponis, quibus calculus sublevetur. Equidem distractissimus negotiis et laboribus diversi longe generis, non aliter legere potui librum tuum, quam ut solemus Historias vel Romaniscos, nec figuras cum verbis conferre, aut ratiocinationum plicas evolvere licuit; tantum tamen in his rebus tribuo ingenio judicioque Tuo, ut non dubitem, summam rei Tuo studio recte esse explicatam. Placuit etiam quod magni utique viri, Christiani Hugenii, et judicium vindicasti et defectus supplevisti. Eleganter etiam notasti objectionem Renaldinam similem esse illi,

qua Vannius olim, Jesuita Italus, regulam plani inclinati impugnabat. Cum Britanni nuper praemium ingens longitudinum Inventori constituerint, fortasse dabunt operam, ut caetera ad rem nauticam pertinentia accuratius elaborentur, Tuaeque profundae meditationes in consilium adhibeantur.

Multi illic Viri praeclari adulatorum Newtoni temeritatem parum probant. Cl. Camberlanus (celebris Statu Magnae Britanniae novissime edito) cum literas quasdam ad se meas in conventu Societatis Regiae ostendisset, quibus male mecum actum esse querebar, misit ad me excerptum ex Protocollo Societatis ea die habito, quibus negant litem a se decisam, neque viam esse praeclusam ajunt ei, qui aliquid relationi Commissariorum (male proinde pro sententia Societatis editae) opponere velit.

At Keilius interea Gallicum quemdam libellum edidit, quibus inter alia errorem, quem in Newtono deprehenderas, removere conatur frustra.

Mihi consilium est, edere aliquod Commercium literarium meum, unde apparebit, quam in aliis quoque Newtonus olim tenuis fuerit. Et quia video, ex Collinsianis homines partium studio deditos ea suppressisse, quae Newtono minus placere debere judicabant, sollicitabo ut ea ipsa quoque producant. Dabo etiam operam, ut quaedam edam, in quibus Newtono aquam haerere scio.

Fieri potest, ut Gregorius etiam invenerit seriem, qua arcus circuli exprimitur per tangentem, quamquam meas schedas (quarum pars vel periit vel latet) nondum omnes excutere licuerit: nec putem . . . . homines quantumvis iniquos falsificare literas Gregorii vel Collinsii, sed arbitror mihi non fuisse communicatam hanc Gregorii seriem, nisi tunc cum meam jam in Angliam misissem. Itaque cum varias series Gregorianas et Newtonianas acciperem, credo me judicasse hanc inter caeteras post meum initium relatam. Certe Newtonus ipse in suis literis ejus inventionem tum mihi tribuit. Itaque de Gregorio inventionis participe nulla ad me suspicio pervenit. Ubi vacavit haec minutatim excutere, inspiciam etiam, an Keilius in sua scheda olim per Secretarium Societatis jam correctum dederit errorem Newtoni.

Cum a multo tempore nihil a Dno. Hermanno, vel ab Amicis Venetis viderim, nescio quo nunc sit loco negotium Professionis Mathematicae Patavinae. Hermannus verebatur, ne Polenus favore quorundam Nobilium Venetorum subnixus Brabium auferret.

Si res adhuc integra est, nulla re magis capi possunt Veneti, quam fama scientiae motus aquarum, quae in ea Republica merito maxime momenti habetur; itaque optaveram doctissimum Dominum Nepotem Tuum huc incumbere, et quae in hanc rem dedere Michelinus et Guilielminus accuratius examinare, eos enim tractasse rem puto superficie tenus, et ὡς ἐν πλάτει: a Te adjutus longius ibit, quam quisquam.

Dominus Scheuchzerus iter Russicum excusavit, retentus a sua Republica auctusque beneficiis. Vellem in aliquot annos Virum Magno Principi commodare statuissent. Ita rem juvissent publicam, nec suis commodis obstitissent.

Annum quem mox inibimus aliorumque multorum seriem Tibi felicem obvenire Tuisque ex animo precor, ut quam diutissime de republica bene mereare. Vale etc.

Dabam Hanoverae 30 Decembris 1714.

CCLVI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postquam longo tempore nihil abs Te responsi accepissem, cujus equidem silentii causam ignorabam, tandem, magno meo gaudio, literae Tuae, ultimo anni superioris die datae, ad me sunt perlatae, ex quibus prosperam Tuam valetudinem (quam Deus per hunc pluresque alios secuturos annos sartam tectamque conservet, bono universae Reipublicae Literariae, quam hactenus tam insigniter inventis scriptisque Tuis exornasti) valde laetus collegi. Gratum fuit intelligere, traditum Tibi fuisse neque displicuisse libellum meum Gallicum De praxi Nautica. Optassem vero, ut eum aliqua cum attentione legere Tibi licuisset, quo sententiam ferre potuisses de lite, quae hac in re etiamnum intercedit mihi cum Dno. Renaldo, quem omnibus meis rationibus, partim in Libro meo, partim in variis literis, quas ad objectiones ab eo mihi motas diluendum ad ipsum perscripsi, ab erronea opinione sua nondum avellere potui. Sed vereor ut candide mecum agat, dubitoque annon ex obstinatione potius, quam ex nondum agnito errore nolit arma abjicere: aliquis enim amicus Parisiis ita mihi scripsit, quasi Renaldum puderet fateri er-

roneum esse, quem publicavit jussu Regis, modum tractandi praxin nauticam, et quasi ipsi, tanquam hujus artis Magistro, imo per longos annos Navis praefecto, esset ignominiosum erroris argui et convinci ab Homine hujus praxeos imperito et in Museo suo vitam agente. „C'est l'envie d'avoir raison" sunt verba illius amici „qui le rend si opiniatre."

Facile credam, quod postquam Serenissimus Tuus Princeps Magnae Britanniae thronum conscendit, Societas Anglicana nolit jam haberi pro sua sententia, quod tamen ejus auctoritate et nomine prodiit in Commercio Epistolico, tanquam Iudicis sententia decisoria pro Newtono. Fortassis etiam Keilius suum libellum Gallicum (quem ante Reginae obitum publicavit) non fuisset publicaturus, si praesensisset optatam illam, quae paulo post contigit, conversionem rerum Britannicarum.

Consultissimum erit, quod formasti consilium, edere aliquod Commercium Literarium alteri illi Anglico opponendum. Cum enim Angli omnia per literas et rerum gestarum historias evincere contendant, de quibus autem nobis non constat qua fide referantur, aequum est, ut et Tua producas ad Commercium illud pertinentia, ab adulatoribus Newtonianis omissa aut dolose suppressa, quod Newtono minus favere vel placere posse judicaverint. Optarim libenter videre libellum illum Gallicum Keilii; nihil ex eo vidi, quam quod nuper noster Hermannus perscripsit, excerptum ex Diario Hagiensi mensis Julii et Augusti 1714 maximam partem ad me spectans, nisi quod dicat, Keilium Te parum honorifice tractare, pariter ac Auctorem vel Auctores illius Epistolae, quae Apologiae loco pro Te in lucem prodiit. Tuum Schediasma quoque circa motus Planetarum, Actis Lipsiensibus mensis Februarii 1689 insertum, sub examen revocari, in quo Keilius duos paralogismos notare moliatur. Ad me vero quod attinet, agnoscit quidem errorem, quem detexi in Newtono circa determinationem resistentiae commissum (vide Schediasma meum in Actis Lipsiensibus mensium Februarii et Martii 1713) sed multis persuadere conatur Keilius, me multo gravius lapsum esse, quod erroris Newtoniani originem rejicere voluerim in series ipsius, cujus terminos a Newtono pro fluxionibus vel differentialibus superioribus adhibitos esse Keilius contra me negat, licet Newtonus alicubi disertis verbis hoc dicat; quem locum, si opus fuerit, ostendere possum, quidquid nunc dicat Keilius, vel

Newtonus ipse aliive Cultores ejus, ad dissimulandum quod veram differentiandi continuationem ignoraverit. Sed de ipso, quem indicavi, errore Newtoni mollissime loquitur Keilius, dicendo eum ex accidente irrepsisse, producta aliqua tangente ad partem oppositam ei, ad quam produci oportuisset, et ideo facile fuisse errorem ejus indolis committere. Interim non addit, quod hic error, quantumvis facilis, mansisset incorrectus in nova Editione Principiorum Phil. si Newtonus de eo non fuisset opportune monitus ab Agnato meo in Anglia tum degente, cum liber jam esset praelo evasurus. De reliquis quibusdam erroribus, quos pariter notavi, nihil dicit Keilius. Caeterum mihi lepida videtur excusatio Keilii, dicentis errorem commissum esse per accidens, producendo lineam in plagam non debitam, sed debitae omnino contrariam; quid hoc aliud est, quam dicere errorem, qui diametraliter pugnat cum veritate et ab ea quam longissime abest, esse errorem accidentalem? Tandem me hortatur Keilius, ut justitiam faciam Newtono circa series, et ut publice agnoscam me in erroris Newtoniani origine indicanda errasse, quanquam Newtonus ipse tantam aequitatem non habuerit, ut in nova Libri sui editione fateretur, a quo erroris sui commonefactus fuerit, eum nempe ita corrigens, quasi a nemine monitus sponte lapsum suum animadvertisset.

Recte facies, si quaedam edas, in quibus Newtono aquam haerere scis. Suppetunt haud dubie multa eorum, quae olim inter nos agitata fuere, et quae per communem differentialium methodum non facile obvia sunt: qualia sunt quae de transitu ex curva in curvam habuimus, quae peraguntur singulari quadam differentiatione adhibita. Proposui olim, si meministi, publice quaedam problemata hujus generis, sed quae pro curvis dissimilibus a nemine hactenus fuerunt soluta; ea ipsi de novo possent proponi. Ex. gr. inter infinitas Ellipses super communi axe AC (fig. 183) descriptas quaeritur illa ABC, quae secans rectam positione datam, vel quamcunque etiam curvam datam LBN, relinquat arcum AB inter omnes AR, AS etc. minimum longitudine. Aliud problema foret, sed difficilius: Iisdem positis, determinare Ellipsin ABC, cujus arcus AB a gravi ex A descendente brevissimo tempore percurratur. Hujusmodi multa alia sunt, quae Anglis forte plus negotii facessent, quam sibi statim imaginabuntur. Ex eorum numero, quae singularem differentiandi

et integrandi methodum requirunt, etiam hoc esset, ubi petitur modus complanandi superficies conoideas obliquas, vel quasvis alias datas superficies curvas, etsi non conoideas. Intelligo per superficiem curvam datam, cujus singula puncta determinantur (sic ut lineae curvae datae puncta) per ordinatas tres x, y, z, quarum relatio data aequatione exprimeretur: sunt autem tres illae coordinatae nihil aliud, quam tres rectae ex quolibet superficiei curvae puncto perpendiculariter ductae in tria plana positione data, et se mutuo ad angulos rectos secantia. Sit aequatio inter coordinatas ex. gr. haec $xyz = a^3$, quaeritur hujus superficiei dimensio, vel saltem reductio ad figuram aliquam planam. Quod attinet ad solidum ipsum inter superficiem datam et plana positione data comprehensum, ejus quidem dimensio facilius habetur, quam superficiei, non tamen omni difficultate caret. Vale etc.

Basileae a. d. 6. Februar. 1715.

CCLVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Praeclaram, quantum intelligo, in re nautica ex Mathesi illustranda navasti operam. Rectius talibus inventis mediocria praemia statuerentur, quam immensa pro inveniendo, quod nonnisi multorum collatis inventis perfici potest, atque ita mea sententia, ei soli non deberetur, qui aliorum inventis tantum ultimam manum imponeret, quale est Longitudinum marinarum problema. Scriptum est mihi ex Anglia, Commissarios rei discutiendae causa nominatos hactenus ne consedisse quidem; cujus ratio est, quod Parlamentum Inventori quidem futuro, sed non Commissariis providit,

Et gratis poenitet esse probum.

Optem, quando Tibi tam pulchre ejusmodi Meditationes succedunt, ut negotium aquarum currentium in manus sumas. Ea de re scripsit Gulielminus, cui contradixit Papinus. Libellus Gulielmini Latinus mihi jejunus videbatur, sed Italicus qui praxin attingebat, non spernendus. Hunc examinari a Te, vel Te directore, a Domino Agnato Tuo, operae pretium esset, vel Venetorum causa, ut intelligant quantum sibi defuerint. Et cum Gu-

lielmino, praeclaro quidem caetera Viro, sed in profundiore Mathesi minus provecto, non satis in hoc argumento fidam, sufficeret, gustus praebendi causa, initio notari, in quo Gulielminus rem acu non tetigerit.

Cum accepissem Newtonum mira quaedam de Deo dicere in Optices suae editione latina, quam hactenus nondum videram, inspexi et risi, spatium esse sensorium Dei, quasi Deus, a quo cuncta procedunt, sensorio opus habeat. Praeterea spatium nihil aliud est, quam ordo coexistendi, ut tempus ordo mutationum generalis seu ordo existendi incompatibilium; unde spatium abstractum a rebus non magis est res vel substantia, quam tempus. Atque ita Metaphysica huic Viro parum succedunt. Notavi etiam quaedam, unde apparet Dynamicen seu virium leges non esse ipsi penitus exploratas. Vacui demonstratio, quam cum asseclis molitur, paralogistica est.

Perplacent quae Anglis proponi posse judicas, velut de tangentibus curvae per magnitudines arcuum dissimilium curvarum determinatae. Ni fallor jam alicubi in Actis vel Diariis tale quid publice proposuisti. Quae etiam cum Fratre egisti, et minima a puncto ad punctum superficiei ducenda, aliaque hujusmodi multa ex Methodis, quas jam didicere, non facile derivabunt. Doctrinam de aequationibus localibus trium coordinatarum, seu de Locis vere solidis, olim aggredi coepi, eorumque intersectiones seu curvas etiam non planas, sed prosequi non vacavit. Operae pretium faceret, qui studium impenderet. Viderisque in eo argumento nonnihil laborasse, quae velim ne supprimas.

Paralogismus, quem mihi Keilius imputat, nihil est et redit ad modum loquendi. Cum scribat inciviliter et indecenter, a me responsum non habebit. De re ipsa agam, hominem non curabo. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 9 Aprilis 1715.

P. S. Italus quidam ingeniosus, ut apparet, et in Calculo nostro versatus, misit mihi schedam adjunctam de provehenda methodo tangentium inversa. Hanc peto ut examines, et mihi cum judicio Tuo remittas. Est haec pars Matheseos, velut illa Diophanti, ut varias artes in nonnullis casibus utiliter adhibere liceat.

CCLVIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si Tibi arrident, quae de re nautica scripsi, habeo de quo mihi gratuler; eum enim finem assecutus sum, quem intenderam, scilicet ut nihil de ea materia scripturus essem, quod a Viris doctis et judiciosis approbari non posset. Tecum sentio, quod non male actum foret, si talibus inventis mediocria praemia statuerentur, ut saltem excitarentur ingenia ad moliendum aliquid pro bono publico; quis enim libenter operam suam commodabit, si praesertim ex ea nec gloria, nec lucrum, sed dispendium potius et temporis et pecuniae (ut mihi sane accidit) ipsi enascatur. Dn. Renaldus, quem ad agnitionem erroris sui vel potius ad confessionem ejus nondum adigere potui, invitis omnibus meis rationibus, tam in libro, quam in literis meis pluribus postea cum ipso commutatis, ad sollicitationem Melitensium, missus est a Rege Galli. cum aliquot navibus bellicis in Melitensium auxilium contra Turcas. Ita mea cum ipso disputatio aliquamdiu sopita jacebit. Sed interim Parentius, Homo Gallus arrogantissimus, ipsisque quoque Gallis sanioribus odiosus, libellum meum suggillandum suscepit, primo peculiari quodam scripto quod in lucem protrusit, postea etiam in Diario Trevultiensi, Mense Aprili; sed pro more suo nihil nisi ineptias mira obscuritate involutas opposuit: multa mihi imputat quae non dixi; multa praevertit, et verba mea detorquet in alienum sensum; sed, quod pessimum est, quaedam mihi furatur et sua facit, dum me refutare videtur: scilicet hoc artificio utitur, ceu aliunde jam noveram, ut dissimulet plagium suum, quod quidem ob tantam, quam affectat, obscuritatem facile ipsi succedit. Etsi interim ratione civilitatis qua me tractat, conqueri non possim de ejus modo scribendi; quia est litigiosus, in hoc unico gloriam quaerens, ut lites in infinitum protrahat, novasque ex litibus serat, idque imprimis, ut audio, ambit, ut adversarios acquirat alicujus nominis et famae, ex quibus victis (nam impudentes et garruli semper vincunt, si postremum loqui vel scribere est vincere) sibi famam comparare nititur. Tamen quaedam ad Dnum. Varignonium ex annotatis meis misi, ut si e re esse autumaverit, non sub meo, sed sub alieno nomine edat, ut aequus lector videat quid de in-

genio Parentii sit tenendum. Dubito autem an sit editurus ea Varignonius, utpote qui quam maxime dissuadet altercationem, sive tecto sive aperto nomine cum Parentio inchoandam, nisi et honorem et tranquillitatem meam periclitari velim.

Pulchre quidem mones, ut negotium aquarum currentium in manus sumam: sed, ob supra memoratas rationes, non video quid me eo permovere possit vel debeat, obrutum in dies longe diversis negotiis, partim Academicis, partim domesticis aliisque: praesertim si id fieri non possit, nisi magno temporis et laboris dispendio, sed parva vel nulla prorsus spe emolumenti, et modico admodum famae augmento. Gulielmini libellos hac de re scriptos nunquam ego vidi, et de Papini contradictione nihil pariter, nisi quod in Actis Lipsiensibus extat. Ea itaque omnia examinandi copia non datur. Si quidem autem Veneti maluerint me carere, quam promissam summam offerre, sane non multum sollicitus sum de eorum favore mihi conciliando per scriptiunculas hujusmodi: norunt jam satis aliunde, quid praestiterim vel porro praestare possim.

Verum est, olim partim in Actis Lipsiensibus, partim in Diariis Gallicis proposui problemata de tangentibus curvae per magnitudines arcuum curvarum determinatae, et de aliis huc spectantibus: quaedam eorum soluta fuere per Fratrem meum, et Hospitalium, sed tantum pro curvis similibus, quae quidem cum meis conspirarunt eatenus, sed nemo rem praestitit pro curvis dissimilibus. Angli ne digiti quidem apice ea attingere voluerunt, qui alias prompti satis fuerunt in respondendo, si quid ad captum suum deprehenderunt; nosti quippe quanta ferocia exceperit nostra Duillerius Anglisatus, postquam tandem eo pertingere se posse putavit! nosti quam contemptim Cheynaeus nos habuerit in libello suo de Fluxionibus! Keilius nunc ejus vestigia premit.

Remitto ecce Scriptum, quod mecum communicasti, Itali illius, mihi quidem ignoti, nisi per conjecturam asserere ausim, quod ille sit vel Verzalia, hospes quondam et discipulus meus ingratissimus, vel Comes Riccatus; prior omnia mea manuscripta vidit et exscripsit, cum in aedibus meis commoraretur; alter vero eadem communicata habuit a Dno. Hermanno, eorumdem scriptorum meorum possessore. Riccatus autem, forte nescius unde Hermannus habuerit, nuper in Diario Veneto, ubi Hermanni partes contra me (licet nulla lite inter nos duos existente) agere vo-

luit, ingenue fassus est, se talia a Dno. Hermanno didicisse: sed, si verum dicere fas est, nisi alia haberemus multo generaliora, quam quae in hoc schediasmate continentur, et quae a nostris tantum vel mutuando vel mutando originem habent, parum sane provecta esset methodus tangentium inversa. Substitutio illa et transmutatio indeterminatarum, quae fundamentum scriptoris hujus est, nobis dudum est familiarissima. Regulae, quas dat, ad exempla sunt accommodatae, adeoque haud magni pretii: nam quodlibet exemplum peculiarem Regulam posceret. Adspersi hinc inde notulas, idem fere aliudque nonnihil indicantes. Caeterum vale et fave etc.

Datum Basileae a. d. 22 Maj. 1715.

CCLIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Has literas jam ad Te exaro in eum praecipue finem, ut commendare possim hunc, cui eas ad Te perferendas tradidi, Virum*). Is quidem natione Anglus, sed minime Keilii aliorumque invidorum amicus, per aliquot annos meus in Mathematicis Discipulus, peculiare monstravit probavitque mihi suum ingenium, non in vulgaribus tantum, sed etiam in penitioribus nostris Analyticis. Certe in Calculo differentialium et integralium non parum profecit; habebis in eo, ubi Patriam redierit, Tuum defensorem contra invidos et malevolos, utpote, cui totius controversiae, quae Te inter et Keilium viget, statum exposui, et ostendi ipsum Keilium aliosque ex Anglis non semper bona fide et qua deceret sinceritate nobiscum agere; ac saepe verborum sensum malevole detorquere et studio res ipsas confundere, ut eo melius Lectori imponere queant; quod imprimis factum video in Keilii responsione, vel potius in Libello illo famoso, Tibi maxime injuriose in Diario Literario Hagiensi mensibus Junio et Julio anni superioris edito, cujus excerpta quaedam mihi transmisit Cl. Hermannus noster. Meo quidem judicio optime feceris, si injurias

---

*) John Arnold of Exon, Medicus.

istas promtissime retundas nuda rei expositione, conquisitis hunc in finem ex scriptis Tuis literis omnibusque Schedis et Actis; quo quid inter Vios actum sit, et quantum unicuique sit tribuendum et quousque quilibet, ut par est, de Inventorum gloria participet, toti Mundo constet, et ita oblatranti Keilio os obturetur. De caetero ad praecedentes meas literas me refero. Vale, Vir Illustrissime, et fave etc.

Basileae a. d. 13 Julii 1715.

CCLX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

. . . .

Aquarum currentium argumentum eo maxime consilio suasi, ut Veneti melius intelligant quantum amittant. Sed putabam Domino Cognato Tuo id esse committendum, Te tamen dirigente.

Rectissime facis, quod Dn. Parentium suo sensu abundare pateris; videtur enim lites quaerere, et me etiam aliquoties mordere voluit. Inter alia objecit mihi, quod negem Conservationem esse continuatam creationem (quod sano sensu ferri potest) et quod concursui Divino sim contrarius, quae non in meis scriptis invenit, sed per pravas consequentias illis intulit. Respondit re ipsa potius quam verbis, dum in Theodicaea naturam concursus conservationisque satis explicui. Genium viri statim agnovi ex praefatione Elementorum Mechanicorum (quod ni fallor primum ejus Opus fuit) ubi dicit, se via quadam ea demonstrasse, quam deseruerit, ubi ab aliis (Varignonio inprimis) jam usurpatam intellexisset, et novam excogitasse. Sed illa, quam pro nova venditat, Hugeniana est, sumta ex Analogia navis, quam ipse Parentius involvit, ut alia videatur. Objecit etiam quaedam contra Harmoniam praestabilitam, sed in quibus nihil responsione dignum notavi.

Recte judicasti: scriptum, quod tibi misi, profectum fuit a Dno. Riccato, ut postea didici ex Epistola quadam Dni. Zendrini, quam nunc Tibi mitto. In responsione petii a Dno. Zendrino, ut Comitem Riccatum moderationis admoneat, quod ille Tibi tan-

quam communi et suo et Dni. Hermanni praeceptori plurimum deferat: nolim etiam in malam partem interpretetur, quod Italis speciatim problema quoddam solvendum proposuisti; quid enim habent in hoc genere Itali, quod Tibi non debeant?

Cum aliquando Viennae legerem Dni. Hermanni collationes cum Dn. Versaglia (quibus finem impositum puto) videbantur mihi quaedam monenda occurrere, sed nunc Diaria Veneta non sunt ad manus.

Videntur adhuc quaedam excutienda superesse in materia conatuum paracentricorum, quid nimirum fiat, si centrum ipsum est mobile.

Dn. Hermannus edet librum de motu fluidorum, in quo non dubito quin multa pulchra sit allaturus; sed dubito an excessurus sit materiam fluminum.

Ex adjunctis Dni. Zendrini literis, quas remitti peto, videbis hunc animum nonnihil adjecisse ad hoc de fluminibus argumentum: quo successu, ego non definiverim.

Miror tanto proposito Longitudinibus praemio, Anglos non in eo laborare, ut perficiant Theoriam Lunae: nam si ea satis haberetur, res sic satis confecta foret, ut jam olim Johannes Baptista Morinus in Gallia ostendit, qui Commissarios a Cardinali Richelieu impetraverat. Et sane fassi sunt illi, ex Lunae motu sufficienter cognito problema solvi, sed recte negarunt rem eo usque productam, quemadmodum memini mihi Bullialdum olim Parisiis dicere. Si secundum Newtoni sententiam tota res pendet a gravitate Planetarum in se invicem et in Solem, deberet esse in potestate. Sed verendum est ne aliae adhuc causae interveniant, et hoc ipsum vellem accuratius examinari, et quid ex sola illa gravitate consequatur, in Tabulas redigi, ut comparatione cum observationibus appareat, utrum et quantum inde natura discedat: hic enim fortasse propius ad hoc naturae mysterium accedere licebit. Et vero ex omnibus Observationibus Astronomicis (post satellites Jovis in ordinem redactos) nullae mihi videntur utiliores, quam quae circa Lunam instituuntur, diametros ejus apparentes et appulsus ad Fixas accurate notando.

Legistine aliquando Dni. Hartsoekeri Conjecturas Physicas? Sunt eae quidem sic satis ingeniosae, sed plerumque, ni fallor, audaciores. Cum ante annos aliquot huc transiret, mon-

straverat mihi sua Experimenta magnetica, et omnium rationem a se redditam putabat; sed mihi longissime adhuc abesse videtur a verae rationis explicatione. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 5 Augusti 1715.

CCLXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Abrupi tractationem cum Venetis, quia quod promissum erat, praestare postea nolebant, non sine poenitenda temporis et sumtuum in commercium istud . . . . . jactura. Nunc quidem Agnatus meus de novo in scenam protrahitur, sed de feliciori successu dubito. Solent, ut videtur, nos habere ut pilas, quas aliquamdiu hinc inde jactatas tandem explodunt. Quodsi ex animi sententia loqui velim, fateri cogor, quod non admodum aegre tulerim negotium istud in fumum abiisse, ideo praesertim quod jamjam sentire incipio aetatis ingravescentis incommoda, quae sine dubio mutationem victus et aëris non parum molestam, si non omnino periculosam reddidisset: Lampada nunc tradam Filio meo, natu maximo, Juveni XXI annorum, ingenio mathematico aliisque dotibus satis instructo. Absolvit nuper studium suum juridicum, et in eo nunc est, ut hac hebdomada pro Licentia gradus Doctoratus disputet; quo peracto permittam ei ad exteros peregrinari, quantum quid licebit per tenuitatem facultatum mearum. Spero fore ut ille Tuo auxilio et commendatione suffultus, stationem quandam convenientem invenire aliquando possit. Hoc si fieret, me adhuc vivente, vix quicquam jucundius mihi per totam vitam contigisse arbitrarer. Gratum foret, si modo ab initio occasio offeretur operam suam in privata informatione navandi apud quendam nobilem Adolescentem, nam juxta mathemata etiam Linguas callet Germanicam, Latinam, Gallicam et Belgicam. Pro ea, qua polles auctoritate, et qua es erga me benevolentia, difficile Tibi non erit voti mei compotem me reddere, et qui jam sum totus Tuus, me Tibi porro arctissime obstringere.

De Parentio sentis, quod ego dudum observavi; ille scilicet data opera lites quaerit; gloriam videtur affectare ex eo, ut non-

nisi illustres habeat adversarios, quos dum refutare conatur, sibi eorundem inventa tribuit, et sub alio habitu, quamvis plerumque valde ineptô, pro suis venditat; hoc quippe artificio plagium celari posse putat. Vidi ex ejus Disquisitionibus (Recherches) quod Te quoque mordere voluerit, sugillando Systema Tuum de Ordine praestabilito; quomodo autem ipsi responderis in Theodicaea Tua, videre mihi nondum contigit, quia hic Liber ad manus meas nondum pervenit. Caeterum etsi Parentium indignum censeam, cui respondeam, non tamen abstinere possum, quin data occassione eum ictu ferulae perstringam; id quod nuper feci in aliquo specimine meo de Centro Turbinationis, Actis Lipsiensibus mense Junio novissimo inserto, ubi notavi absurditatem et falsitatem censurae Parentianae, qua quondam Theoremata Hugeniana de oscillationibus Pendulorum exagitabat.

Remitto, ut jubes, Epistolam Dni. Zendrini. Ex ea video Auctorem, ut et Riccatum aliosque quosdam Italos velle agere simias nostras, non tamen agnoscere, quod nil faciunt, nisi nostra tantum imitari. In Novissimo Tomo XXI. Diarii Veneti edidit Riccatus illam, quam in literis suis comminatus est Zendrinus, responsionem ad defensionem, quam Agnatus meus pro me ediderat in Tomo praecedenti XX. ejusdem Diarii. Responsio ista est ejus naturae, ut nesciam an Agnatus meus sit replicaturus: video enim Auctorem pruritu contradicendi laborare; nos autem cum tali homine, qui rationibus se vinci nunquam pateretur, serram reciprocare et tempus perdere vix utile esse posse judicamus.

Problematis ab Agnato Italis propositi nullam Riccatus exhibet solutionem; cujus quidem hanc dedit rationem vel potius praetextum, se scilicet non satis ambitiosum esse ad captandam gloriam ex solutione problematum, imitatus forte vulpeculam in fabula, pyra ad quae pertingere non poterat spernentem. Interim solutio ejusdem problematis, quam Tibi perscribit in Epistola sua Zendrinus, bona est et legitima, sed sine dubio eam ab Hermanno accepit, siquidem verum sit, quod Michelotti nobis significavit, Hermannum nempe solutionem nostri problematis ad amicos suos in Italiam misisse: ipse vero Hermannus forte nunquam soluturus fuisset, nisi fundamentum ejus a me ipso didicisset eo tempore quo ex Italia redux iter parabat Francofurtum. Sciendum enim est, quod postquam ipsi hoc problema, sed generaliter conceptum, proposuissem, aliquot post diebus mihi dederit aliquam solutionem

sed erroneam et paralogisticam, cujus paralogismum a me sibi monstratum ingenue agnovit atque ultro fassus se nullam perspicere viam ad veram solutionem perveniendi, eam a me expectare aperte testabatur: quam etiam dedi pro parabolis, ostendendo quod curva virium existente ex parabolarum genere, etiam curva temporum sit aliqua ex parabolis; quod plusquam satis erat Hermanno ad casum illum particularem Italis propositum solvendum.

Recte statuis, adhuc quaedam excutienda superesse in materia conatuum paracentricorum, ubi praesertim centrum virium supponitur mobile. Sunt mihi de ea re varia Theoremata, quae juncta cum Methodo, qua usus sum in Actis Lipsiensibus 1713, Mensibus Februario et Martio, subsidia praebebunt ad maximas difficultates superandas. Certe Newtonus ipse àliique Angli methodi ejus praestantiam agnoverunt et laudarunt.

Hermanni Librum vidi hic manuscriptum, sed multa ab eo tempore se adjecisse mihi scribit. Oportet jam praelum evasisse Librum hunc, prout ex novissimis ejus literis intelligo.

Non videtur magni momenti, quod Zendrinus habet de curvitate ripae fluminis alicujus. Nititur enim hypothesibus, ut apparet, mere precariis.

Imo perlustravi Hartsoekeri Conjecturas Physicas, ut et ejus Dilucidationes (Eclaircissemens) in quibus vidi contemptim satis loquentem de Phosphoro meo Mercuriali, et indignantem Fontenellio, quod nimis honorifice de eo conscripserit; sed ignosco homini, qui, ceu alter Thraso, omnes provocat et de Newtono aliisque eruditis acerbe et ignominiose jocatur, adeo ut tanto minus miratus fuerim, quod nec mihi pepercit. Interim et mihi licebit eum comparare cum Parentio, cum quo egregiam Thrasonum bigam constituit.

Metuendum est ne cum morte Regis Galliarum etiam literae et Scientiae aliquod detrimentum patiantur: nisi forte gravior rerum catastrophe regno Galliae immineat, quod tempus docebit. Tu vero vale quam diutissime, et favere perge etc.

Basileae a. d. 11 Septembris 1715.

CCLXII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Transiit hac nuper Dn. Johannes Arnoldus Anglus, Vir, ut apparet, doctus et bonus, et a Te mihi literas gratissimas attulit. Dedi ipsi aliquot exempla Schedae impressae, cui judicium Tuum est insertum, quod adversarios non parum urit. Keilius quidem responsione indignus est, sed rem ipsam brevi narratione complecti e re erit et adjicere problemata quaedam, unde intelligamus, quid ipsi possint. Cum illam novam differentiandi rationem considerasses, cujus ope problemata solvuntur, quale illud de minimo arcu Elliptico intercepto, excogitaveras inde applicationem quandam sic satis generalem, qua, si bene memini, problemata quaedam, quae ad differentio-differentiales descendere solent, intra differentiales primi gradus coërcentur. Ego nunc non bene memini, nec in literis antiquis quaerere vacat. Te autem melius meminisse puto, itaque rogo ut si commodum est, iterum communices. Inserviet enim fortasse ad aliquod problema proponendum, cujus non statim apparebunt fontes.

Gaudeo etiam Dn. Filium Tuum Bernoullizare, et hereditarium familiae decus tueri. Mallem Physicae et Medicinae, quam Jurisprudentiae operam dedisset. Abundamus etiam bonis Jure-Consultis, sed pene caremus bonis Medicis; sed in his optimum est cujusque inclinationem sequi. Si qua se det occasio, commendabo lubens merito.

Dn. Generalis Schulenburgius, mihi a multis annis amicus, in eo est, ut conditionem Venetorum accipiat, qui ei Praefecturam rei militaris terrestris offerunt. Ipse mihi nuper scribit Viennа, Caesarem et Principem Eugenium hortari, ut conditionem accipiat. Ubi Venetias proficiscetur, quod credo mox fiet, penes Te erit jubere, si quid a me per ipsum in rem fieri posse putes. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 4. Novembris 1715.

P. S. Dni. Hermanni Librum accepi. Multa sunt bona, sed quaedam moneri possunt. Videtur nimium Anglis deferre. Problema Trajectoriae, si centrum locum mutet, tentavit; meo judicio, non absolvit. Flamstedius mihi per amicum significavit, in Newtoniana Lunae Theoria esse quaedam falsa, quaedam incerta. Si Riccatus, ut audio, officioe et ut par est respondit, optimum for-

tasse erit litem cessare. Ego scripsi Zendrino, merita Tua in scientiam ipsosque Italos ejus cultores tanta esse, ut aequum videatur judicio Tuo, quantum fieri potest, deferri. Parentio non respondi in Theodicaea. Curabo ut hujus Libelli exemplum, occasione data, ad Te perferatur. Spero Regentem Regni Galliarum, Scientiarum amantem, non passurum, ut morte Regis Respublica Scientiarum aliquid detrimenti capiat.

CCLXIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz *).

Ut petito Tuo satisfacerem, incunctanter perlustravi Adversaria mea, et tandem inveni Apographum Epistolae cujusdam meae, olim ad Te datae, unde hoc, quod Tibi mitto, excerptum fieri curavi, continens duas Methodos ex nova illa differentiandi secundum parametrorum variabilitatem ratione erutas, quarum ope solvuntur problemata circa curvas ordinatim positione datas, licet non similes, ex quibus ex. gr. quaeritur ea, quae vel maximum vel minimum praestet, aut quae sint trajiciendae per novam aliquam curvam, sive in dato angulo, sive in angulis data lege variabilibus. Si quid invenias, quod in usum Tuum faciet contra Keilium aliosve adversarios, gratissimum mihi erit. Latent certe quaedam in ista materia, quibus exerceri possunt Thrasones Anglici pro Keilio militantes. Hi forte invenient, ex quo se non facile extricabunt, licet omni fluxionum methodo adjuti.

Etiam mihi videtur Hermannus in Libro suo nimium Anglis deferre, adeo quidem ut Newtoni morem demonstrandi affectet per totius fere Libri decursum: unde fit ut demonstrationes, quas vocat lineares, saepissime magno legentium fastidio et fatigatione plures occupent paginas, cum si Analysi uti voluisset, eas quandoque 3 aut 4 lineis absolvere potuisset. Videtur voluisse Libri molem extendere praeter necessitatem, nisi forte majorem inde sibi gloriam nascituram putaverit. Quae sunt alicujus momenti,

*) Von diesem Briefe bis zu dem vom 14. Jul. 1716 lagen die Originale nicht vor.

praecipue vero in prima Libri parte, ea certe pleraque jam complexus sum, partim in Schediasmate meo Actis Lipsiensibus 1713, mensibus Februario et Martio inserto, partim in posterioribus capitibus Libelli mei Gallici de praxi nautica. Quosdam etiam notavi paralogismos. Modum considerandi vectem in omnibus suis punctis impulsum a potentiis variantibus, quem ego adhibui in meo Libello pro invenienda media directione potentiarum velum, superficiem navis vel alius corporis superficiem impellentium, Hermannus sibi quoque arrogat in sua Praefatione, sed quo jure nescio. Dicit quidem me vidisse manuscriptum suum, quod non nego; an autem Theoremata huc facientia inibi reperta fuerint, ut innuit, certe asseverare non possum. Male itaque agit, quando ad memoriam meam appellat. Quomodo enim quamlibet minutiam attendere potuissem intra biduum vel triduum, quo manuscriptum ejus perlustrare mibi datum fuit? Profecto non aliter consideravi quam minutiam, id quod jam illum ut magni quid aestimare video, cujus se mecum inventorem audire gestit. Nihil utique naturalius, nihil magis obvium quam referre potentias agentes in superficiem aliquam ad vectem imaginarium, prolongando nempe eorum directiones. Dedi hoc in Libello meo sine ulla pompa; nihil quippe hic suspicabar jactantia dignum. Habeo vero, ut et hoc addam, quod querar de Hermanni sive non satis felici memoria sive non sufficienti candore. Etenim quando in Appendice pag. 393 in fine audacter dicit neminem alium, quod sciat, demonstrasse aquam aliumve liquorem ea velocitate ex vase erumpere, quam aquae guttulae orificio proxima acquirere potest, casu accelerato ex altitudine liquoris supra orificium, Lectori persuadere conatur se, primum fuisse hujus rei demonstratorem. Sed imponit Lectori, habuit enim demonstrationem a me eo tempore, quo ex Italia redierat, et tantum abest, ut aliquam antea habuerit demonstrationem, ut cum interrogassem, num hoc Theorema hydraulicum demonstrare posset vel apud quemquam Auctorem demonstratum vidisset, ingenue fassus fuerit, se illud, licet multoties tentasset, nunquam demonstrare potuisse, neque ab aliis demonstratum fuisse. Dedi itaque meam demonstrationem, quam tum approbabat et laudabat, nunc vero sub mutato habitu intricatiorem redditam pro sua venditat. Nunc judices, quo jure quave conscientia dicere possit, neminem alium, quod sciat, illud demonstrasse. Caeterum Proble-

ma Trajectoriae, si centrum locum mutet, nequidem tentavit, nedum absolvit. Habet fateor, quaedam de Trajectoria mobili, ut circa centrum immobile moveatur, quod jam Newtonus uberrime pertractavit.

. . . .

Gratias ago, quod data occasione Filium meum Tibi commendatum fore promittas. Praetulit studium Juridicum Medico, suam inclinationem secutus: in Physicis tamen non prorsus est hospes.

Riccatus non valde officiose respondit, dum varios in me meumque Agnatum aculeos sparsit, quos autem hic in nupera sua Replicatione, ut par est, retorsit. . . . .

Gratissimum erit, ubi me compotem feceris Theodiceae Tuae. Vale et fave etc.

Basileae a. d. 23. Novemb. 1715.

CCLXIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Scripsi literas ad Illustrissimum Schulenburgium, easque Clarissimo Michelotto misi, ut ipse reddat, et cum eo consilia conferat, neque enim dubito Virum insignem libenter nobis fauturum, cum mihi sit amicus singularis. Hoc volui ut scires, ita enim ipse Domino Michelotto poteris significare, quae videbuntur.

Dominus Abbas De Conti scripsit ad amicum Parisinum, qui mihi significavit, Anglos longa recensione Commercii Epistolici in Transactionum aliqua suas contra me argutationes iterasse, atque inter alia etiam Philosophiam meam impugnasse. De Analysi nostra dicunt, Newtonum originarium esse, nos tantum nomina adjecisse, eaque apta ad controversias in Mathesin introducendas. Philosophiam Newtoni esse mere experimentalem, meam conjecturalem: sed, ni fallor, harmonia praestabilita seu, quale nos statuimus, Commercium Animae et Corporis res demonstrata est; demonstratum etiam, ni fallor, firmitatis seu nexus in corporibus originem non posse desumi nisi a motibus conspirantibus, atomosque esse rem absurdam. At Newtonus minime per sua experimenta demonstrat, materiam ubique esse gravem, seu quamvis partem a quavis attrahi, aut vacuum dari, ut ipse quidem jactat.

De Deo etiam miras fovet sententias; extensum esse, sensorium habere, et vereor ne revera inclinet in sententiam Averrhois et aliorum, etiam Aristoteli tributam de Anima seu Intellectu agente generali in corpore quovis pro ratione organorum operante. Illud etiam mihi plane absurdum videtur, quod putat machinaè mundanae motum ex se desiturum, nisi a Deo subinde rursus animaretur. Itaque miraculis opus habet, nec sine perpetuis miraculis suam attractionem explicare poterit.

Dominus Abbas Contius Parisiis discedens Epistolam ad me reliquit, quae mihi nunc reddita est. Ipsi jam respondeo, et ut pulsum Anglorum Analystarum nonnihil tentemus, rogo ut, quasi suo proprio motu aut amici rogatu, Problema hoc illis proponat: Invenire lineam BCD, quae ad angulos rectos secet omnes curvas determinati ordinis ejusdem generis, exempli causa, omnes hyperbolas ejusdem verticis et ejusdem centri AB, AC, AD etc. idque via generali. Ita videbimus, quousque suis fluxionibus profecerint.

An excerptum ex antiqua Epistola Domini Filii Tui manuscriptum est?

Significavi Dno. Hermanno, mihi non videri bene demonstratam, imo nec veram ipsius Propositionem pag. 7, quod causa gravitatis agat in omnes corporis partes; nam si misceantur aequabiliter in corpore partes graves et non graves, eadem gravitas manebit variato scilicet situ. Et si per partes corporis intelligit, quicquid ejus volumine comprehenditur, patet materiam gravificam permeantem comprehendi, quae ipsa gravis non est.

Dn. Hermannus erga me protestatur, se plane inscio esse natam illam cum Riccato litem, et adeo non a se foveri ut desisti sit suasurus, in quo recte faciet. Caeterum et ego quaedam notavi acta ab ipso paulo aliquius erga me; inter alia loquitur de meo Theoremate compositionis tendentiarum, quasi ipse demonstraverit; sed ego in Diario Gallico vetere demonstrationem addideram eandem, ni fallor, cum ea quam affert. Suo erga Newtonum Anglosque affectato studio nihil lucrabitur; audio enim Keilium jam in ipsum stricturas quasdam dedisse. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae Decemb. 1715.

P. S. Vidi quae in Actis hujus anni de Turbinatione dedisti pulcherrima. Velim nosse an Tibi nota sit constructio Ho-

rologii turbinatorii, quale, ni fallor, Campanus Romae, aliique confecere; quae Horologia id habent, ut sonum pene nullum edant, eoque iis conveniant, qui difficulter obdormiscunt. Vellem hanc constructionem discere.

CCLXV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

. . . .

. . . .

Etiam Monmortius in suis ad Agnatum meum literis meminit ejus, quod amicum Parisinum Tibi significasse dicis, Anglos scilicet, longa recensione Commercii Epistolici in Transactionum aliqua suas contra Te argutationes iterasse. Quare necesse puto, ut nonnihil matures alterum illud, quod paras, Commercium Epistolicum priori ab Anglis edito opponendum.

Excerptum illud ex antiqua Epistola, quod Tibi petenti miseram, non Filii mei (qui in negotiis pro me obeundis absens erat ab urbe) sed alicujus ex Discipulis meis manuscriptum est. Interim ut scriptionem Filii mei et quid in Mathematicis praestare possit, videas, ecce mitto ad Te solutionem ab ipso inventam problematis de invenienda curva, omnes Hyperbolas ejusdem axis transversi ad angulos rectos secante, quod per Dominum Abbatem Contium Anglis Analystis proposuisti, in exemplum problematis illius generalis, quo quaeritur Trajectoria omnes curvas determinatas ordinis ejusdem generis ad angulos rectos trajiciens. Fateor hoc problema generaliter sumptum ab Analystis illis non facile solutum iri, nisi cogitent de modo nostro differentiandi parametros, vel alias lineas quae parametrorum loco sunt, seu de transitu differentiationis a curva in curvam. Sed velim animadvertas, non omnia hujus exempla particularia aeque difficilia esse: sunt enim quae peculiari hac differentiandi ratione non indigent, ut sunt ea curvarum, ad quarum tangentes determinandas parametri variabiles in considerationem non veniunt; ex horum numero est exemplum, quod proposuisti, de Hyperbolis, utpote quae, sicut et omnes Sectiones conicae commune centrum et verticem habentes, habent eandem subtangentem pro communi ab-

scissa, quascunque habeant parametros: est enim pro omnibus (fig. 184) $OF : OA = OA : OE$, sic itaque timendum est, ne Analystae Angli hoc exemplum solvant per communes methodos, et postea ubi vident, rem tam facile sibi successisse, inde evadant inflatiores et in opinione suae superioritatis magis confirmentur. Quod si tale quid futurum ex Abbate Contio mature intelligeres, quando scilicet publicationem hujus exempli a se solvendi mirarentur Angli, meo judicio non inconsultum erit, si illi statim praeveniantur, Typis mandando in Actis Lipsiensibus (vel in alio, quod Tibi placuerit, Diario) hanc Filii mei solutionem, ut videant eos, qui nostras methodos possident, ubi vix tyrocinium evaserint, jam in potestate habere talia, ad quae Thrasones . . . . nonnisi aegre vel plane non pertingunt, si praesertim alia exempla nonnihil difficiliora ejusdem problematis proposuisses, vel adhuc proponeres. Quale foret, si pro Hyperbolis ejusdem verticis et axis transversi, sed parametrorum variabilium supponerentur Hyperbolae ejusdem verticis et ejusdem parametri, sed axium transversorum variabilium: invenietur enim quidem satis facile (si dextre procedatur) pro natura curvae trajectoriae quaesitae (ponendo nunc AE, x; EC, y) haec aequatio differentialis $2xydx = (-2yy + cx)dy$: haec vero aequatio, in qua c significat parametrum constantem et invariabilem Hyperbolarum, nullam adhuc admittit constructionem, concessis licet quadraturis, ob implicationem indeterminatorum cum suis differentialibus x, y, dx et dy, quae necessario prius sunt separandae, ut constructio obtineatur. Dubito autem an Angli (quos nihil hactenus de hoc separationis negotio scripsisse vidi) in hunc gurgitem se demittere audeant. Non minus curiosum esset hoc exemplum, ubi proponerentur omnes omnium graduum Parabolae ejusdem parametri, verticis et super eodem axe descriptae a Trajectoria normaliter secandae, ita ut solus index vel exponens Parabolarum esset variabilis. Aequatio enim pro natura curvae quaesitae satis quidem simplex, sed non per viam tritam eruitur haec $x\,lx\,dx = -y\,ly\,dy$, ubi x et y designant coordinatas originem a vertice communi Parabolarum sumentes: integrando terminos, haec altera obtinetur $2xxlx - xx = -2yyly + yy \pm aa$, quae porro ad exponentialem reducitur $x^{2xx}y^{2yy} = n^{xx+yy\pm aa}$.

Mihi videtur, si Hermanno placuisset dissuadere Riccato diutius litigare, litem jam diu sopiri potuisse: quod idem non ob-

scure insinuavi nuper ipsi Dno. Hermanno, eumque simul monui, ut citissime scribat ad scriptorem alicujus Diarii Belgici sub nomine Reipublicae Eruditorum (Republyk der Geleerden) ut reparet injuriam, quam in recensione Operis Hermanniani mihi intulit, quando excerpens verba ex praefatione, ubi Hermannus mentionem facit proprietatis alicujus circa Centrum gravitatis, quam proprietatem inventam sibi et mihi attribuit Hermannus; scriptor Diarii verba Hermanni truncata affert, eaque ita interpretatur, quasi Hermannus me plagii insimulare voluisset. An scriptor studio et ex malitia id fecerit, ut commendabilem et vendibilem redderet librum Hermanni, quippe qui typis eorundem Bibliopolarum quorum Diarium, nempe Westeniorum, excusus est, aut an fecerit quia sensum Hermanni, obscure satis ibi loquentis, non perceperit, definire jam non cupio.

Si Tibi placuerint, quae dedi in Actis Lipsiensibus superioris anni de turbinationibus, habeo de quo mihi gratuler. Hugenii horologium turbinatorium hisce meis meditationibus ansam utique dedit, sed de constructione hujus horologii nihil aliud mihi notum est, quam quod habetur in ipso Opere Hugenii, cui titulus: Horologium oscillatorium, pag. 155: ex quo autem facile intelligo, ejusmodi horologium ratione constructionis et dispositionis internae rotarum non multum differre a communibus horologiis, et nihil hic aliud requiri, quam ut pro Pendulo oscillante, cujus vibrationes reciprocantes motum horologii in isochronismo conservant, adaptetur Pendulum turbinans, cujus turbinationes continuae sint isochronae; id quod fieri potest, si filum Penduli circumplicatum sit laminae incurvatae secundum evolutam Parabolae. Sic enim sive intendatur, sive remittatur vis turbinans, adeoque sive ampliores sive angustiores superficies Conicas describat filum Penduli; erunt tamen omnes ejusdem altitudinis, et proinde turbinationes isochronae. Quod superest, annus hic novus cum plurimis aliis sequentibus Tibi sit felicissimus; vale et fave etc.

Basileae a. d. 15. Januar. 1716.

CCLXVI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non sine multo applausu legi specimen Domini Filii Tui, Juvenis, ut video, magna nobis promittentis. Solutio elegans ingeniosis Scholii observationibus ornatur, dum eam etiam ad Ellipses transfert. Caeterum a me in literis ad Dnum. Abbatem Contium Hyperbolarum communis verticis centrique mentio facta est, non quasi problema in iis cousisteret, sed ut intelligeretur. Addidi enim diserte, quaeri methodum generalem. Quod si mihi suppeditare exemplum voles, quod non particulari aliqua facilitate adjuvari putes, sed ad generalem adigere, rem gratam facies. Id enim pro specimine solutionis verae Domino Abbati nominare potero; vellem autem tale esse, ut factis evolutionibus tandem ad quadraturas reducatur, ne dicant, ne a nobis quidem sufficientem solutionem dari posse. Quanquam revera sine nostra methodo a Te provecta (quemadmodum olim, ni fallor, animadverti) recurrendum sit ad differentias secundi gradus, nostra autem methodo inter primas consistatur. Gratum erit etiam, si opera Domini Filii Tui (modo vacet) analysin, cum vertex et parameter manent et cum Parabolae mutant exponentem, adjeceris.

Constructionem Horologii turbinatorii ab oscillatorio putem nonnihil debere differre in applicatione rotae proximae ad Pendulum, nam in oscillatione pendulum tendit huc illuc, seu itque reditque, sed in turbinatorio semper tendit in easdem partes. Inde etiam turbinatione quidam usi sunt ad Horologium conficiendum, quod careret ictibus illis, qui molesti sunt aegre dormiscentibus.

Dominus Michelottus mihi scripsit, se literas meas ad Dn. Generalem Schulenburgium attulisse, et cum eo de negotio fuisse locutum, neque illum defore occassione data. Putat ille Dn. Michelottus . . . . facile deinde effici posse, ut Dnus. Agnatus Tuus succedat. . . . .
Non dubito, quin ipse Tibi amplius de toto negotio scripserit.

Domini Comitis Schulenburgii Frater, cum nuper hic esset, mihi dixit ex Fraternis literis, ipsum mox iter facturum in Dalmatiam, ut praesidia Veneta visat et omnia ad expeditionem instantem paret; itaque haud scio an satis occasionem habiturus sit nego-

tium nostrum adjuvandi, ob distractiones et absentiam. Spero tamen Dominum Michelottum invigilaturum ubi aderit, ut optima ejus voluntate utatur.

Ego nunc totus sum in absolvendo magno Opere Historico meo, cujus apparatum a multis annis collegi, quod antiquitates Brunswicenses, simulque Annales Imperii Occidentis ab initio regno Caroli Magni usque ad finem Imperii Henrici Secundi complectitur. In hoc enim intervallo origines fere ignotae a me erutae continentur. Si Deus mihi iis, quae adhuc supersunt, viribus amplius uti concedit, hoc anno Colophonem imponam. Atque inde liberior, si quid temporis superest, aliis nonnullis meditationibus non proletariis absolvendis tribuam. Caeterum hic labor praesens me fere totum sibi vindicat. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 31. Januarii 1716.

CCLXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Habeo de quo mihi gratuler, quod usque adeo Tibi placuerit Filii mei specimen, continens solutionem problematis a Te propositi, de secandis normaliter per curvam aliquam Hyperbolis axis transversi et verticis communis, quam et Ellipsibus normaliter secandis convenire monstravit. Ecce nunc, quia petis, Analysin a Filio meo conceptam pro determinandis Trajectoriis Parabolarum, in quibus, vertice et parametro manentibus, exponentes sunt variabiles. Communicabo (quamvis sine Analysi) solutionem exempli, quod omnia quae desideras habet requisita; nulla quippe particulari facilitate resolvitur, sed potius particulari quadam dexteritate opus est, quae non cuivis obvia erit; deinde recurrendum quoque est ad differentias secundas, quae autem per Methodum nostram ad primam reducuntur; postremo tale est, ut factis evolutionibus, arte quadam singulari ad quadraturas reducatur, cum alioquin, nisi rite tractetur, aequatio prodeat, in qua indeterminatae cum suis differentialibus intricatae adeo invicem permixtae reperiantur, ut inseparabiles videantur. Problema autem, quod duabus partibus constat, in hunc modum propono:

Problema 1°. Super recta (fig. 185) AG tanquam axe ex puncto A construere infinitas curvas, qualis est ABD, ejus naturae, ut radii osculi ex singulis singularum curvarum punctis B educti, secentur ab axe AG in C in data ratione, ut nempe sit $BO:BC = 1:n$.

2°. Construendae sunt trajectoriae, qualis est ENF, priores curvas ABD ad angulos rectos secantes.

Solutio 1°. Esto AL perpendicularis ad AG: vocetur AJ, x; JB, y; et quaedam constans ad arbitrium assumpta, a: fiat y seu $JB = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$, erit punctum B in quadam curva ABD, quae desideratam habet conditionem $BO:BC = 1:n$. Quod si jam mutetur a eaque major minorve sumatur, prodibit alia ABD a priori diversa, eandem conditionem habens. Et sic infinitae construentur curvae optatae. Quod erat faciendum pro primo.

2°. Fiat nova Curva AH habens (nominatis abscissis AM, z) applicatas $MH = \frac{a^n}{z^n \sqrt{a^{2n} - z^{2n}}}$, ubi a denotat eadem arbitrariam, quae assumta est pro curva ABD. In hac nova curva AH fiat area AHM aequalis magnitudini arbitrariae constanti C: secabit HM producta curvam ABD in puncto N, quod erit in aliqua ex trajectoriis quaesitis ENF: mutata jam C, aliae orientur trajectoriae. Quod erat faciendum pro altero.

Notetur si $n = +\frac{1}{2p+1}$ aut $= -\frac{1}{2p}$, erunt curvae omnes ABD, ut et omnes CNF algebraïcae (intelligo per p quemvis numerum integrum et positivum). Si vero $n = +\frac{1}{2p}$, utrarumque constructiones dependent a quadratura Circuli. Et tandem si $n = -\frac{1}{2p+1}$, dependent a quadratura Hyperbolae.

Constructio interna horologii turbinatorii in nihilo alio differre potest a communi, quam in applicatione solius rotae proximae, quae axem penduli turbinantis sine reciprocatione movere debet gyratione continua. Hugenius asserit, hujus generis horologia plura, nec sine successu, constructa fuisse. Habent, ut probe animadvertis, hoc commodi, quod careant ictibus illis repetitis, qui aegre obdormiscentibus molesti sunt. Motus enim turbinationis, ut facile conjicio, sine strepitu peragitur. . . . .

. . . .
Vale Vir, Illustrissime, et favere perge etc.
Basiliae 11. Mart. 1716.

CCLXVIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Opportune literas Tuas accipio, renovata jam lite Anglicana. Newtonus ipse, cum videret mihi Keilium indignum responsione haberi, in arenam descendit, literis ad Dnum. Abbatem Contium scriptis, qui ad me misit. Ego respondi, et versionem Anglicae Newtoni Epistolae cum responsione me ad Dn. Remondum misi Parisios, Abbati Contio transmittendam, et amicis Parisinis ostendendam. Ex Gallia Tibi omnia communicabuntur, miraberis tam levibus argumentis actum. Potissimum est, me aliquoties ipsi inventum concessisse, ergo nunc salvo candore negare non posse. Respondeo, me tantam de ipsius candore tunc opinionem habuisse, ut quidvis affirmanti facile crediderim, nunc dum accusationi contra me connivet, imo accedit, quam falsam novit, dubitare de ejus sinceritate coactum. Epistolam quam Tuam esse scit, ait a Mathematico vel Mathematicum affectante scriptam (par un Mathématicien ou prétendu Mathématicien) quasi merita Tua ignoret. Totam chartam, cui Epistola Tua inserta est, vocat diffamatoriam, quasi magis famam laedat, quam addita Commercio Epistolico.

Dominus Arnoldus mihi scripsit, Keilium in novo quodam Transactionum loco contendere, Te quoque ignorare Calculum differentialem, sed homo indignus est cui respondeatur.

Caeterum Contius, qui ad partes novorum amicorum nonnihil accedere videtur, scribit Anglos facile solvisse Problema duarum Serierum curvarum invicem perpendicularium; Moivraeum enim, praeter alios, scilicet ut figeret ideas, rem reduxisse ad subtangentem; verba Contii sunt: il faut supposer la même soutangente pour la même abscisse, quae non satis intelligo. Quidquid vero sit, hoc non est solvere problema, sed ejus casum. Problema ipsum jam in Actis Lipsiensibus proposuimus Majo anni 1697, pag. 211, et cum Fatius insurrexisset, Maji

1700, pag. 204. Commodum autem evenit, ut exemplum a Te acceperim, quod non ita facile solutum iri judicas; nihil potuit fieri accommodatius. Id nunc Contio mittam, ut habeant, in quo ideas figant, tantisper dum solutionem generalem inveniant. Interim Domini Filii Tui solutionem elegantem casus Hyperbolici vel Elliptici ad Dn. Wolfium misi, ut Actis Eruditorum Lipsiensibus inseri curet.

Operae pretium erit, inquiri apud amicos Parisiis vel in Italia, an ibi extent horologia turbinatoria: mereretur enim eorum constructio exacte cognosci . . . .

. . . .

Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 13. Aprilis 1716.

CCLXIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Bene se habet, quod Newtonus ipse tandem in arenam descenderit, pugnaturus sub proprio suo nomine, et seposita larva.

. . . .

. . . .

Quidquid sit, spero nunc veritatem historicam melius detectum iri, siquidem Newtonus pro suo, quem habere suppono et confido, candore res gestas fideliter enarrabit, eorumque quae a Te producentur, veritatem publice agnoscet.

Ex Gallia nihil aliud intellexi, nisi quod a Domino Montmortio (Frater ni fallor Remondi, qui Tecum in Commercio est) Agnatus meus literas accepit, in quibus aliquid de ea re commemorat confirmatque idem, quod de Contio habes, qui nimirum perscripsit, Anglos exemplum Hyperbolarum ad angulos rectos secandarum solvisse; quod equidem non miror, quia exemplum facillimum et a Filio quoque meo solutum. Addit vero, Anglos jactare generalem solutionem problematis, sed dubito solutionem fore talem, qualem desideramus. Nam si per s o l v e r e intelligant exhibere utcunque aliquam aequationem differentialem ex indeterminatis invicem permixtis complicatam, eorum solutio non erit perfecta, quia nulla constructio inde deduci potest, concessis licet

figurarum quadraturis. Ideoque cum forte pro solutione exempli postremo a me transmissi dederint aliquam aequationem, in qua indeterminatas cum suis differentialibus sibi mutuo intricatas observaveris, nullo modo acquiescendum erit, sed insistendum et urgendum, ut quod superest absolvant, separentque a se invicem indeterminatas, sinequo gloriari non queunt: se solvisse exemplum, hoc est enim ex eorum numero, ubi separatio ita succedit, si rite tractentur, sed hic singulari quadam arte opus est. Taylorum, subjungit Montmortius, etiam solvisse prius exemplum Hyperbolarum, tum etiam jactasse, se quoque habere exempla quaedam, quae Tibi vicissim propositurus sit, refertque unum a Tayloro perscriptum, quod hoc est: Determinare Trajectorias normaliter secantes curvas, quibus respondet haec aequatio $zzddx = 2xdz^2$, in qua supponitur dz constans; et definire naturam harum curvarum, quibus ista aequatio respondet. Post brevem applicationem solvi hoc problema, et postea etiam solvit Agnatus meus, amboque invenimus, quod triplex curvarum species satisfaciat aequationi isti $zzddx = 2xdz^2$, nempe Parabolas, Hyperbolas et Curvas quasdam, quae sunt trium dimensionum. Quod si nunc Parabolae illae normaliter sunt secandae, erit Trajectoria aliqua Ellipsis: si vero Hyperbolae illae, habebimus pro Trajectoriis alias Hyperbolas prioribus similes et concentricas; si Curvae illae trium dimensionum sint secandae, erit etiam Trajectoria altioris ordinis: sic itaque pars posterior problematis triplicem solutionem admittit: prior vero etiam triplicem, nisi per conditionem aliquam, qualem Taylorus addit (quam vero non satis intelligo) restringatur ad unam aliquam simplicem.

Miror quomodo Newtonus scire potuerit, me auctorem esse Epistolae illius, quam inseri curasti chartae illi contra Newtonum publicatae, cum tamen nemo mortalium sciverit, me illam scripsisse, nisi Tu, ad quem scripta est, et ego, a quo scripta est. Fortassis autem expressio ista: par un Mathématicien ou prétendu Mathématicien, alium habet sensum, quam putas: potest enim etiam ita sumi, quasi Newtonus crediderit, Epistolam istam esse supposititiam et tanquam a Mathematico quodam conficto exaratam, revera tamen ab ipso Auctore chartae inventam et intrusam; quod si rem ita sumas, videbis par un prétendu Mathématicien intelligendum esse Mathematicum confictum et nunquam existentem.

Vellem Arnoldus locum indicasset in Transactionibus, ubi Keilius dicet, me quoque ignorare Calculum differentialem: interim parum me moveret, quod Keilius ex ira furiosus contra me deblaterat; etsi crederem, verum esse quod Arnoldus retulit, sed cum nec ex Gallia, nec aliunde simile quid audiverim, Arnoldus forte deceptus est, eo quod intellexerit Keilium alicubi dicere, me usum Serierum convergentium Newtoni non satis intelligere. Alias enim Keilius, si me dicere vellet Calculi differentialis ignarum, sibimet ipsi turpiter contradiceret, quippe qui in Diario Gallico Hagiensi, ubi contra Chartam illam, de qua supra, disputans ad me provocat tanquam ad Judicem idoneum et Calculi differentialis callentissimum, quique adeo quam optime decidere possim, annon problema illud: Data area curvae, invenire ejus applicatam (quod Newtonus jam dudum solverit) idem sit, quam hoc: Datae quantitatis invenire differentialem. Praeterea alia in me cumulat elogia, quae omnia ejus sunt naturae, ut me necessario Calculi differentialis peritissimum crediderit, adeo ut vel calumniator, vel mente captus censendus esset, si nunc contrarium diceret.

. . . .

Vale et fave.

Basileae a. d. 20 Maji 1716.

P. S. Scripsi ad Filium Venetias, ut de Horologiis turbinatoriis inquirat . . . .

CCLXX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Solutionem Trajectoriarum perpendicularium ad Hyperbolas Domini Filii Tui reperies in Actis Lipsiensibus.*) Adjectum est, inservire ad intellectum problematis generalis, quod ad explicandos progressus in Calculo infinitesimali inservire possit. Equidem dictum non est, per se tamen intelligitur, in generali illo saltem efficiendum esse, ut res reducatur ad aequationem differentialem primi gradus, et in specialibus reducendam rem ad quadraturas, quoties per notas hactenus artes licet.

---

*) Acta Erudit. 1716 pag. 226.

Misi Contio problema Tuum speciale, et videbimus, quid Taylorus vel alii in eo sint praestituri.

Accepi Taylori Methodum, quam vocat, incrementorum. Est applicatio Calculi differentialis et integralis ad numeros, vel potius ad magnitudines generales. Ita Angli equos, ut in Proverbio est, adjungunt post currum. Ego incepi calculum differentialem a numerorum seriebus, eoque utiliter usus sum ad summas serierum numericarum, et postea animadvertens in Geometria differentias et summas dare quadraturas, et multa ob incomparabilitatem evanescere in lineis, via naturali perveni a Calculo generali ad specialem geometricum seu infinitesimalem. Isti contra procedunt, nempe quod veram inveniendi methodum non habuerunt. In toto suo Libello neminem citat, nisi Newtonum. Scriptus est satis obscure, et cum ad usum venit, suarumque artium specimen exhibere vult, vix habet nisi jam dicta . . . .

. . . .

Serram etiam Philosophicam nunc cum Newtono, vel quod eodem redit, cum ejus Hyperaspita Clarkio, Regis Eleemosynario, me reciprocare fortasse jam intellexeris. Scis, Keilium et Praefatorem*) novae Editionis Principiorum Newtoni etiam Philosophiam meam pungere voluisse. Itaque scripseram ego forte Serenissimae Principi Regiae Walliae, pro excellenti ingenio suo harum rerum non incuriosae, degenerare nonnihil apud Anglos Philosophiam vel potius Theologiam Naturalem; Lockium et similes dubitare de immaterialitate animae, Newtonum Deo tribuere sensorium, quasi spatio tanquam organo sensationis opus habeat; inde alicui in mentem venire posse, quasi non sit nisi anima mundi secundum veteres Stoicos. Eundem Auctorem Dei Sapientiae et perfectionibus derogare, dum velit Mundum esse Machinam non minus imperfectam, quam horologia nostrorum artificum, quae saepe retendi debent aut alias corrigi; ita Machinam Mundi, secundum Newtonum et asseclas, correctione quadam extraordinaria subinde indigere, quod parum sit dignum Deo Auctore. Mea sententia Deum omnia tam sapienter ab initio constituisse, ut correctione non sit opus, quae imprudentiam arguat. Serenissima Princeps Walliae excerpta hujus Epistolae Clarkio communicavit. Is scriptum contra Anglico sermone ipsi dedit, quod illa ad me misit; re-

*) Roger Cotes.

spondi, replicavit; duplicavi, triplicavit; ego novissime quadruplicavi, seu ad tertium ejus scriptum respondi. Inter alia improbat formulam a me in Theodicaea usurpatam, quod Deus sit Intelligentia supramundana, tanquam a me a mundi gubernatione excludatur. Ego quaesivi, an ergo velit Deum nihil aliud esse, quam Intelligentiam mundanam, seu animam mundi? Male excusat doctrinam Newtonianam de spontanea virium activarum diminutione et tandem cessatione in mundo, nisi a Deo reparentur. Ex quo intelligitur, Newtonum ejusque asseclas veram scientiam rei dynamicae nondum habere. Ex nostris enim principiis semper servatur eadem quantitas virium. Male etiam excusat phrasin Newtonianam de spatio sensorio Dei. Et quia spatium hodie est Idolum Anglorum, ego ipsi ostendo, spatium non esse aliquid reale absolutum, non magis quam tempus, sed ordinem quemdam generalem coëxistendi, uti tempus est ordo existendi successive. Itaque esse aliquid ideale, quod si creaturae tollerentur, non futurum esset, nisi in ideis Dei. Ostendi etiam, secundum Newtonum crebris miraculis ad sustentandum naturae censum opus esse, et ex Clarkii excusationibus deprehendo, ipsum non habere bonam notionem miraculi. Ipsi enim miracula tantum secundum nos a naturalibus differre videntur, tanquam minus usitata: sed secundum Theologos et veritatem, miracula (saltem ea, quae sunt superioris ordinis, velut creare, annihilare) transcendunt omnes naturae creatae vires. Itaque quidquid ex naturis rerum inexplicabile est, quemadmodum attractio generalis materiae Newtoniana aliaque ejusmodi, vel miraculorum est, vel absurdum. Fortasse nonnihil adhuc continuabitur nostra collatio, in qua absunt quae offendere possint, et videbo quo res sit evasura. Hujusmodi enim collationes mihi ludus jocusque sunt, quia in Philosophia

Omnia praecepi atque animo mecum ante peregi.

. . . .

. . . .

Gratum erit aliquando intelligere, Tibi innotuisse structuram Horologiorum turbinatoriorum jam usitatorum: ni fallor, olim Romae Campanus (Frater ejus, qui vitris terendis excellebat) talia parabat. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 7. Juni 1716.

CCLXXI.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nondum vidi Acta Lipsiensia, in quibus dicis extare solutionem Filii mei Trajectoriarum perpendicularium ad Hyperbolas: etenim nonnisi semel tantum singulis annis, quod de istis Actis prodiit, accipio; nimirum Mercator ex nostratibus, qui frequentant Nundinas Lipsienses Majales, Actorum fasciculum pro me mercibus suis huc advehendis adjungit. Postremum vero, quod miror, nondum accepi, ita ut quid inde ab anno in Actis proditum est, nesciam.

Taylori librum pariter nondum vidi: Montmortius ab aliquo jam tempore promisit, se duo ejus exemplaria nobis transmissurum, sed forsan occassionem mittendi nondum habuit. Facile credo Taylorum neminem citare, nisi Newtonum; hoc enim multis Anglis in more est, ut omnia invideant caeteris, vel omnia ad se vel ad suos derivent. Sic Taylorus Theoriam meam de Centro oscillationis pene totam, ut scribit Cl. Hermannus, ex Actis Lipsiensibus desumsit, eamque, ne plagium esset nimis manifestum, obscuritatis quodam peplo ita involvit, ut fere inintelligibilis sit, quam tamen clarissime exposui. Ais, quod suarum artium specimen exhibere volens vix habeat nisi jam dicta, quodque totus Liber scriptus sit satis obscure; hoc ego non miror, quomodo enim quae aliena sunt sua facere posset, nisi obscuritatem studio affectaret ad furtum celandum, sed hoc maxime miror, quod dum Angli illi sunt omnium impudentissimi plagiarii, eo temeritatis procedant, ut aliis hoc vitium exprobrare audeant. Quis tulerit Gracchos etc. .

Placet quod Cl. Wolfius epistolam meam Tibi miserit; hoc enim ab eo petii, quia nolebam aliquid circa materiam, quam continet, a me publicari Te inscio, nedum invito: nunc mihi gratissimum contingit, quod pro aequitate Tua agnoscis mihique tribuis, me sine alterius ope ad artem summandi vel integrandi pervenisse, atque mea potissimum opera calculum infinitesimalem celebrem redditum fuisse: ego vero vicissim lubenter patior, quod addidisti, Tibi quoque aliquam summandi integrandive atque etiam Exponentiales adhibendi artem non defuisse; si bene memini, simile quid in epistola illa jam dixi, imo fortius rem eandem in Tui

honorem expressi. Tecum quoque sentio, praestare, ut Keilius non nominetur, quam ut nominando ansam ei demus sibi applaudendi.

De disceptatione philosophica, quae Tibi est cum Clarkio, nihil ante intellexeram. Ex iis, quae refers, video nihil tam absurdum proferri posse a Newtono, quod inter Anglos non inveniat Patronos ac Defensores suos. Hi non disputant, ut veritatem tueantur, sed quia de Nationis gloria agi putant, quando vident, Magistrum suum, in cujus verba jurarunt, in discrimine causae suae sive bonae sive malae (hoc non attendunt) versari. Hinc dubito, utrum hoc tantum ab ipsis sis consecuturus, ut agnoscant Newtonum errare posse, aut omnino aliqua in re errasse. Mihi quoque dudum absona visa est ejus doctrina de spontanea virium diminutione et tandem cessatione in mundo: siquidem per se clarissimum mihi apparet nullam vim destrui, quae non simul effectum edat sibi aequivalentem, quia nihil tendit ad sui annihilationem: effectus autem nihil est aliud, quam vis ipsa efficienti substituta, ita ut eandem virium quantitatem servare necesse sit. Dicit Newtonus alicubi in Principiis Philosophiae Naturalis, Vortices Caelestes Cartesii ideo admitti non posse, quia ob partium suarum attritionem et frictionem tandem a motu cessarent: sed jam sibi ipsi contradicit. Si enim, secundum ipsum, jactura virium in Mundo reparari a Deo, et tota Machina mundana subinde quasi retendi debet, annon et idem Cartesius in Vorticum suorum defensionem reponere posset, quod nempe, si vel maxime per attritionem partium in motu retardarentur, Deus tamen decrementum motus resarcire possit, eos quandoque per novam impulsionem in pristinam celeritatem incitando.

Significavit nuper Dominus Michelottus, Moderatores Archilycei Patavini tandem decrevisse, ut Agnatus meus ad docendam Mathesin invitetur, et nihil aliud superesse quam ut Decretum suum Senatui proponant ad ejus confirmationem et ratificationem habendam: monet ut se ad iter praeparet et instruat, quo sub initium proximi Novembris Lectiones suas publicas Patavii inchoare queat. Interim, quod miror, solemnes literae vocationis nondum transmissae huc sunt, etsi jam ante sesquimensem fere Michelottus perscripserit Moderatorum Decretum. Quod superest, vale et fave etc.

Basileae a. d. 14. Julii 1716.

P. S. Hisce jam scriptis accipio fasciculum Actorum Lipsiensium, in quibus video Filii mei solutionem problematis Trajectoriarum Hyperbolarum. Adjecit Dominus Menkenius Lexicon Mathematicum Cl. Wolfii, et Nova sua litteraria Germanica, quae omnia legam per otium.

CCLXXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratulor Domino Nepoti Tuo rem apud Venetos confectam, quemadmodum ex amici nostri Veneti literis intellexi. Quibus conditionibus et in quot annos pactum sit, discere gratum erit. Deum precor, ut res pulchre succedat ipsius commodo et publico.

Dn. Hermannus scripsit ad Dn. Wolfium, problema illud de ductu perpendicularium ad seriem curvarum non videri tam difficile. Ecce Methodum, qua solvi posse scribit, quam ex literis ejus a Dno. Wolfio transcriptam Tibi mitto, petoque ut eam examinare velis:

„Lineam rectam, quae in una eademque linea curva constans „est, sed variabilis variata curva, vocabo Modulum. Differentietur „curvae datae aequatio, sumto etiam Modulo pro quantitate varia„bili, et eadem aequatio adhuc semel differentietur, sed ita tamen „ut x velut constans tractetur, et pro Elemento ipsius y ponatur „$\delta y = (dxdx + dydy) : dy$. Ope duarum ejusmodi aequationum „eliminari potest Modulus, ejusque Elementum, adeo ut habeatur „aequatio ad curvam omnes datas ad angulos rectos trajicientem. „Haec solutio generalissima est, sed exemplo Bernouillii junioris „illam illustrare placet. Esto aequatio Hyperbolarum $y =$ „$b\sqrt{xx - aa} : a$, in qua x sunt abscissae a centro, y applicatae, a „semilatus transversum, et b semiaxis conjugatus, quem pro mo„dulo accipere oportet. Ergo aequationem logarithmice exprimendo „erit $ly = lb + l\sqrt{xx - aa} - la$, et sumta x pro constante et „differentiando fiet $\delta y : y = db : b$, sed per regulam est $\delta y =$ „$(dxdx + dydy) : dy$, ergo etiam $db : b (= \delta y : y) = (dxdx$ „$+ dydy) : ydy$; qui valor substitutus in praecedenti $dy : y =$ „$db : b + xdx : (xx - aa)$ dat $dydy : ydy = (dxdx + dydy) :$ „$ydy + xdx : xx - aa)$, vel $-dx : ydy = x : (xx - aa)$, seu „$aadx - xxdx = xydy$, id est $aadx : x - xdx = ydy$, quae „est aequatio, quam Bernoullius invenit in Actis."

Haec Dn. Hermannus; quae si recte se habent, non erunt spernenda; eximent enim nos a necessitate adhibendi differentiationem meam axtraordinariam, quae tamen alibi usus suos retinebit. Eam suspicor nec Dno. Hermanno nec Italo illi vitilitigatori a Te fuisse communicatam.

Ego pene integro octiduo in acidulis Pirmontanis magni Russorum Monarchae asseclam egi et quanto magis hujus Principis indolem perspicio, tanto eam magis admiror. Male factum est, quod Tigurina Respublica ei Scheuchzeros non saltem in aliquot annos indulsit. Id Reipublicae Tigurinae honorificum, Scheuchzeris autem et Reipublicae literariae utile futurum fuisset. A Dnis. Scheuchzeris ab eo inde tempore nihil amplius intellexi aut accepi.

Cum acidulas bibere Monarcha decrevisset, sanguinem misit: misere et alii ex Comitatu, quibus idem bibendi consilium, et inter alios sacerdos Russus, quem unum secum habet. Hujus sanguis erat omnium pessimus, subalbidus crassusque. Transacto bibendi tempore, Princeps, ut est ingeniosus, experimentum profectus ex aquis sumere decrevit, sacerdotique iterum venam pertundi jussit. Allatus est sanguis emendatissimus, floridus utique et qualem a sanissimo homine expectares; affui ipse, cum afferretur. Applausit Princeps non immerito; nam vix est ut soli diaetae tam brevis temporis tam insignis mutatio adscribatur. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 26. Julii 1716.

CCLXXIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

De conditionibus futurae vocationis Patavinae nihil adhuc nobis constat, nec in quot annos se adstringere debeat Agnatus, hactenus est pactum. Interim Cl. Michelottus de negotio isto scribit, tanquam confecto, jubetque nos securos esse de vocatione certo et infallibiliter forteque brevi subsecutura: nihil enim aliud superesse, quam notificationem Moderatorum Decreti in Senatu peragendam: Decretum autem ipsum nondum fuisse propositum propter Turcicum bellum, in quod Senatus jam omnes suas cogitationes vertat: expectandum itaque esse momentum, quo Senatus

de rebus aliis tranquillius deliberare possit. Speramus fore ut, accepto nuntio de Turcarum gravissima clade in Hungaria, Veneti a pavore nonnihil redeant animumque resumant.

Facile crediderim, Hermanno difficile non videri (saltem in ea qua sumpsit extensione) problema de ductu perpendicularium ad seriem curvarum. Miror namque, quod non perceperis, methodum qua solvi posse scripsit, esse Tuam ipsissimam, quam ante complures annos in literis Tuis, postquam Tibi meam aperuissem, mecum vicissim communicasti; ego vero publicavi, excerptum ex Epistola Tua ad Acta Lipsiensia mittens. Vid. Acta Lipsiensia Anno 1698, pag. 471. Hermannus, qui mirificum expiscandi donum habet et felicissimam memoriam revocandi ea, quae diu ante in Libris legit, rem istam suam facere volens, habitu nonnihil mutato, aliis obtrudit. Si locum citatum conferes, videbis facillime potissimam diversitatem in eo consistere, ut Hermannus vocet modulum, quod Tu vocabas constantem, sed variabilem b, ego vero Lineam locum parametri variabilis habentem. Fallitur autem Hermannus, quando putat methodum hanc, sive Tuam, sive suam tam facile ad omnia exempla applicari posse. Si pro curvis transcendentibus tentare voluisset solutionem, observare potuisset mirum quantum adhuc deesse, quominus ista methodus succedat. Aliquid profecto in casu transcendentium deprehendo, quod et mihi etiamnum remoram injicit, facitque, ut nondum plenariam solutionem talemque qualem optarem, invenisse me jactare possim, saltem in quibusdam transcendentium generibus, nam in permultis aliis res mihi perpulchre succedit. Non bene memini, num aperuerim Hermanno differentiationem extraordinariam; videtur tamen probabile ob frequentem, quam habuimus, de his rebus sermocinandi occassionem. Ut enim minime sum mysteriosus, ita liberalissimus semper fui, praesertim erga Hermannum in communicando, quamvis ille subinde ita se gerat, ut meae facilitatis me poenitere possit. Quod ad Verzaliam attinet, meum quondam ingratum hospitem et discipulum, fateor illum hinc discessisse onustum spoliis nostris secretissimis; sed hoc solatii restat, quod etsi illis abutendi satis quidem malitiae, non tamen satis ingenii habeat. De eo nuper scripsit Michelottus, quod Libellum contra Hermannum ediderit injuriis plenum, in quo Te quoque, non minus ac alios Mathematicos, quos Ultramontanos vocat, sugillet, et quidem hisce verbis: Si Italia non produ-

xisset suos Galilaeos, suos Borellos, suos Cavallerios, Ultramontani nullos vidissent Wallisios, Newtonos, Leibnitios. Sed non meritur, ut ipsi respondeatur.

Accepi tandem Taylori Libellum. Quid, bone Deus, sibi vult scriptor sua affectata ista caligine, qua involvit res quoque sua natura clarissimas? Haud dubie, ut tegat sui furandi studium: quantum enim capio, quantum sapio, nihil nisi res nostras nobis surreptas ibi observo per densissimam obscuritatis nebulam. Quae de Isoperimetris habet, Fratri meo debentur; quae de Catenariis, Velariis, Linteis liquore plenis etc. tradit, a me habet. Et, quod novissimum est plagium, sub finem Libelli proponit methodum determinandi Centrum oscillationis in pendulis compositis, quae tota desumta est ex nova mea Theoria Actis Lipsiensibus 1714 inserta. Atque haec omnia ita profert scriptor, quasi ex propria penu deprompsisset. Nemo interim ex Anglis illis, justi verique vindicibus, reperitur, qui contra hunc plagiarium clamitet; nemo qui nobis quod nostrum est tribuat: silet Keilius, ubi videt a suis peccari, praesertim cum nec ipse ab hoc peccato sit immunis.

Argentorato nuper accepi, fortasse Tuo dono, exemplum Theodiceae: pro eo itaque gratias ago. Legam quam primum vacaverit: spero me multa egregia et utilia in hoc Libro inventurum. Interim vale et favere perge etc.

Basileae a. d. 22. Augusti 1716.

CCLXXIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Expectavi quid parituri essent Angli: nunc ergo Dn. Wolfius mihi, quae in Scheda adjecta vides, scripsit misitque. An Methodus solvendi in Transactionibus illorum sit sufficiens, nemo Te melius judicaverit. Itaque judicium de ea Tuum exspecto: mihi enim in tantis distractionibus nunc vix possibile talia discutere, ut par est. Interim suspectum est, quod non adjecere solutionem problematis specialis a Te propositi, et a me transmissi, et forte a Te quoque per Montmortium, cum Tu speciale ipsorum solvisses, illis communicati. Sed quidquid sit, imperfecta videtur Anglo-

rum solutio, cum recurrat ad differentias secundi gradus in re praestabili per primas.

Etiam mihi Venetiis scribitur negotium Domini Cognati Tui Nicolai Bernoullii esse confectum, de quo gaudeo.

Gratum mihi valde erit, habere judicium Tuum de variis in Theodicaea mea contentis.

Clarkium videor mibi reduxisse ad absurdum. Coactus enim est mihi in effectu negare hanc Propositionem: Nihil existere, evenire, locum habere, cujus non detur sufficiens ratio, cur sit potius vel non sit, aut cur sic potius quam aliter sit. Nam coactus est recurrere ad meram, ut vocat, Dei voluntatem nulla ratione, nullo motivo nixam, quod mihi absurdum, et Divinae Sapientiae pariter ac rerum naturae contrarium videtur. Nam cum scias Anglos ex spatio facere aliquod absolutum ac reale, vacuum etiam admittere, ostendo, admissa absoluta realitate spatii, cum id ubique sit uniforme, impossibile esse dari rationem, cur res Deus in hac potius, quam alia parte spatii, aut hoc potius quam inverso situ locet. Mihi vero spatium nihil aliud est quam ordo coëxistendi, adeoque sublatis rebus nullum est, et eodem manente rerum omnium situ, idem. Videtur et in aliis vadimonium deseruisse Clarkius. Expecto adhuc responsionem ad novissimam meam scripturam, quae videbo an replicationem a me mereatur. Omnia finito certamine edentur. Sed cum per manus eant Serenissimae Principis Walliae, ejus id venia fiet.

Rectissime faciet Dominus Hermannus, si Verzaliam omittat: generatim enim illis non respondendum censeo, qui a Legibus honestae disputationis recedunt.

Galilaeum merito extollit Verzalia, qui certe ad Phoronomica aliis viam aperuit. Sed Cavallerio multum adeo tribui posse non arbitror. Et notatum jam est a Guldino aliisque, Keplerum in libro de Dolio Austriaco ipsi Cavallerio ad hanc Geometriam, quam indivisibilium vocat, viam aperuisse. In Borello multum diligentiae agnosco, ingenio mediocri fuisse videtur.

Facile judicabam, Taylori vel Sartorii Angli Librum Tibi parum fuisse satisfacturum. Hujusmodi scriptor mihi haud satis aptus videtur ad obeundum officium Secretarii Societatis Regiae, quod postularet hominem minus fortasse mathematicum, sed magis clarum, factumque ad Commercia literaria.

Dominus Montmortius significavit mihi se literas prolixas ad hunc Sartorium parare contra hodierna Anglorum Philosophemata. Et jure meritoque fictitias illorum attractiones aliaque ejusmodi ἄῤῥητα impugnabit.

Diu nihil a Dno. Abbate Varignonio intellexi, ut verear ne adversa valetudine utatur, quemadmodum superiori tempore factum ad me scripsit.

Parentius quaedam in Trevultianis, si bene memini, contra Tua Nautica edidit. Dominus Bernardus Trevisanus, Nobilis Venetus, parat opus de Lacunis Venetis et remediis, quibus caventur, ne obarenescant. Argumentum est nobile et Reipublicae cura dignum. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 23. Octobris 1716.

CCLXXV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.*)

Discessit hinc Agnatus meus ante quindecim circiter dies. En ejus literas, quas Tibi mittendas mihi reliquerat; volui haec pauca adjicere, in responsionem ad ea, quae nuperrime a Te accepi. Nihil intelligo ex scripto Anglicano illo a Cl. Wolfio ad Te transmisso, mecumque porro communicato, neque capio quid generalis illa ab Anonymo jactata solutio contribuat ad casum aliquem specialem solvendum. Vellem tentasset exemplum, quod a me suggestum Anglis proposueras, sed id ipsum quod Anglus anonymus (quem Taylorum**) esse credo) ne apice quidem digiti attigit, satis arguit quod aqua ipsi haeserit; quis enim sibi imaginabitur, Anglum illum ad provocationem Tuam non statim explorasse vires suas in solvendo isto exemplo particulari? Quis item putabit, illum, si feliciter solvisset, non protinus in lucem laetanter protrusurum fuisse solutionem suam? Scribit Cl. Wolfius Anglos de hoc nostro problemate, ceu videatur, abjecte sentire; sed nihil novi est in quibusdam, ut contemnant quod attingere

*) Dieser Brief hat höchst wahrscheinlich Leibniz, der den 14. November 1716 starb, nicht mehr lebend angetroffen.

**) Die Lösung war von Newton.

nequeunt, vulpeculum nimirum in Fabula imitantes. Putem igitur urgendos esse Anglos, atque inprimis insistendum proposito exemplo particulari. Optarim etiam, ut idem tentet Dominus Hermannus per suam Methodum universalem, antequam ea publicetur. Videbit latere aliquem modum intricatissimum, qui in quampluri-mis curvis transcendentibus methodum generalem facit inapplicabilem. Hoc haud dubie jam senserunt Angli: alias jam dedissent quaesiti solutionem.

Theodicaeam Tuam, Opus sane elegantissimum, nondum vacavit perlegere totam. Legi magna cum voluptate Dissertationem De Conformitate fidei cum ratione: deprehendo solidissime scriptam, mihique in plerisque, nec satis memini an non in omnibus, mirifice arridentem; imprimis vero placuere, quae contra Baylium, Rationis inimicum, disputas. Clarkium, ut videtur, ad incitas redegisti, quando coactus est dicere Dei voluntatem nulla ratione esse nixam: hoc enim pacto ex Deo fieret Ens brutum et irrationale, quod ageret tantum caeco quodam impetu, nisi omnino cum Democrito et Epicuro recurrendum esset ad fortuitum atomorum concursum.

Dominus Varignonius ante aliquot menses, ut quotannis facere solet, in Patriam excurrit; sed jamjam tempus est ut Lutetiam repetat. Parentius, qui Nautica mea suggillavit aliaque, neque Tibi, neque aliis Viris magnis parcit: mihi habetur in eorum numero, qui responsione non sunt digni. Spero Agnatum meum hac hebdomada ad Venetias appulsurum. Caeterum vale et fave etc.

Basileae a. d. 11 Novembris 1716.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Nicolaus Bernoulli.

Nicolaus Bernoulli (geb. 1687, gest. 1759), der Brudersohn von Jacob und Johann Bernoulli, und nicht zu verwechseln mit Nicolaus Bernoulli (gest. 1726 zu Petersburg), dem Sohne von Johann Bernoulli, war in der Mathematik ein Schüler von Jacob Bernoulli, dessen nachgelassenes Werk: Ars conjectandi, er im Jahre 1713 herausgab. Als Hermann Padua verliess, um die Professur der Mathematik an der Universitat in Frankfurt an der Oder zu übernehmen, wurde Nicolaus Bernoulli sein Nachfolger; er kehrte jedoch später in seine Vaterstadt Basel zurück, wo er einen Lehrstuhl der Jurisprudenz bis an das Ende seines Lebens bekleidete.

Als Mathematiker debütirte Nicolaus Bernoulli mit der Abhandlung: Regula generalis inveniendi aequationes, per quas alia quaepiam data, modo reducibilis sit, dividi potest, die er auf Veranlassung Joh. Bernoulli's verfasste, um die von Newton in der Arithmetica universalis gegebene Regel über die Reduction der Gleichungen von einem höheren auf einem niederen Grad zu verallgemeinern und zu begründen. Sie ist in dem vorliegenden Bande abgedruckt. Ausserdem hat Nicolaus Bernoulli noch einige mathematische Abhandlungen geschrieben, die in verschiedenen Sammlungen zerstreut sind; seine amtliche Stellung als Lehrer der Jurisprudenz, so wie andere Berufsgeschäfte, verhinderten ihn mit mathematischen Studien sich anhaltend zu befassen *); er hat indess überall in dem Wenigen, was er auf diesem Gebiet geliefert,

*) Doleo sane quam maxime, quod contra animi mei propensionem rebus mathematicis jam a longo tempore vacare non possim, impeditus variis, praeter academica, negotiis, schreibt er an Euler, 13 Jul. 1742.

den feinsten analytischen Scharfsinn documentirt. Namentlich beweisen dies auch seine Briefe an Euler, die Fuss in der Correspondance mathématique et physique du XVIIIe siècle, Tom. II. veröffentlicht hat.

In dem vorliegenden kurzen Briefwechsel zwischen Leibniz und Nicolaus Bernoulli ist fast nur von den unendlichen Reihen die Rede, ein Gegenstand, in den Nicolaus Bernoulli unter Anleitung seines Lehrers, Jacob Bernoulli, besonders tief eingedrungen war. Es werden die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz besprochen, namentlich aber wird davon gehandelt, wie aus der unendlichen Reihe selbst zu erkennen ist, ob und in welchem Falle der Werth, dem sie sich als Gränze ins Unendliche nähert, eine mögliche oder unmögliche Grösse ist, um daraus einen Rückschluss auf ihre Convergenz oder Divergenz zu machen. Interessant ist die Bemerkung von Nicolaus Bernoulli, dass, um die genaue Beschaffenheit des Gränzwerthes einer Reihe zu ermitteln, der Rest, welcher als unendlich klein gewöhnlich unberücksichtigt bleibt, nicht zu vernachlässigen ist.

I.
Nic. Bernoulli an Leibniz.

Incidi hic in Juvenem Ornatissimum et Doctissimum D. Goldbach Regiomontanum, quem ob communia studia Juris et Matheseos amicum nactus sum singularem. Is opportunam mihi suppeditavit occassionem ad Te scribendi mediante Domino D. Brandshagen, cui frequens, ut ait, Tecum commercium est. Ignosces, Vir Amplissime, quod ad ultimas Tuas literas, quas sub ipsum tempus discessus mei ex Helvetia accepi, citius non responderim; causa silentii fuit peregrinatio et continua sedis mutatio. Est quod mihi maxime gratuler de prona Tua in me voluntate, quam non solum literis Tuis, sed ipso opere plus satis mihi testatam dedisti. Commendatitias Tuas binas ad Illustres Viros, Trevisanum et Quirinum, Cl. Hermannum accepisse mihi nuntiavit Patruus prioremque, qua valde honorificam magnaque cum laude mei mentionem feceris, jam reddidisse. Gratias Tibi ago ingentes pro singulari hoc favoris Tui testimonio, quem ut observantia in Te mea et obsequio ulterius demereri, eximiaeque Tuae de me expectationi satisfacere aliquando possim, vehementer opto. Significavit porro Patruus, Illustrissimum Trevisanum satis benigne commendationem Tuam accepisse, seque faviturum promisisse, adjecisse autem maxime e re esse, ut Inclytus Vir Carolus Ruzzini, Reipublicae Ablegatus et Plenipotentiarius in Pacificatione Ultrajectina, in partes nostras trahatur, quam ob rem suasit mihi Patruus, ut a Te commendatitias peterem, easque Illustrissimo huic Viro post reditum meum in Hollandiam ipse exhiberem; rem igitur facies gratissimam, si mihi tunc quoque Virum, dummodo aliquod Tibi cum eo sit commer-

cium, fautorem conciliabis. Constitui intra paucos dies transire in Hollandiam, ibique per duas vel tres hebdomadas commorari, quibus exactis forte per Galliam domum redibo.

Quae de perficiendis methodis scripsisti, optime monuisti; fateor multa adhuc circa hanc rem desiderari, praecipue quod materiam infiniti concernit. Pro assignandis limitibus seriebus infinitis, ut scire possimus, quando fiant impossibiles, non meliorem habeo methodum, quam sequentem, quam tamen satis generalem esse puto. Observavi omnes series determinata aliqua lege progredientes per praeviam aliquam (si opus est) additionem aut multiplicationem, vel etiam differentiationem, reduci tandem posse ad sequentem formulam $1 + nx + \frac{n-1}{2} xA + \frac{n-2}{3} xB + \frac{n-3}{4} xC$ etc ubi A, B, C etc. significant terminos immediate praecedentes; scimus autem hanc seriem esse impossibilem, quando x est numerus negativus major unitate, et n numerus fractus vel integer cum fracto, cujus denominator est numerus par. Proponatur ex. gr. series ista: $\frac{1}{2.3} \times \frac{x^3}{a} + \frac{1.3}{4.5} \times \frac{xx}{aa} A + \frac{3.5}{6.7} \times \frac{xx}{aa} B + \frac{5.7}{8.9} \times \frac{xx}{aa} C$ etc. quae quidem nullius quantitatis additione aut multiplicatione reduci potest ad praedictam formulam, sed ejus differentialis, si multiplicetur per $\frac{1}{a\,dx}$, et postea subtrahatur ab unitate, evadit $1 - \frac{1}{2}\frac{xx}{aa} - \frac{1}{4}\frac{xx}{aa} A - \frac{3}{6}\frac{xx}{aa} B - \frac{5}{8}\frac{xx}{aa} C$ etc. quae series est casus specialis dictae formulae, nam quod ibi est n, hic est $\frac{1}{2}$, et quod ibi est x, hic est $-\frac{xx}{aa}$, unde concludimus quod existente $\frac{xx}{aa}$ majore quam 1, sive x majore quam a, series ista $1 - \frac{1}{2}\frac{xx}{aa} - \frac{1}{4}\frac{xx}{aa} A - \frac{3}{6}\frac{xx}{aa} B - \frac{5}{8}\frac{xx}{aa} C$ etc. et per consequens etiam proposita $\frac{1}{2.3}\frac{x^3}{a} + \frac{1.3}{4.5}\frac{xx}{aa} A + \frac{3.5}{6.7}\frac{xx}{aa} B + \frac{5.7}{8.9}\frac{xx}{aa} C$ etc. sit quantitas imaginaria, quod etiam aliunde scimus, series enim ista existente a = AB radio circuli CEB (fig. 186) et x = abscissae AD, exprimit aream trianguli mixtilinei CEF, quae area, existente abscissa AD majore quam radius AB, est quantitas imaginaria.

De novis literariis nihil fere habeo memoratu dignum. For-

tassis Tibi jam notum erit, imprimi hic jussu Societatis Collectionem Epistolarum Collinsii etc.; audio multa ibi fore, quae Te tangant. Queruntur Angli, Collectores Actorum Lipsiensium debitam D. Newtono laudem non tribuisse, passimque nimis contemptim de ipso locutos fuisse; hinc nullam aliam ob causam opusculum hoc in publicum edunt, quam ut D. Newtono calculi infinite parvorum, quo nunc utimur, aliarumque inventionum gloriam asserant. D. Newtonus aliique jam in eo laborant, ut ostendant leges attractionum, quas corpora in se mutuo exercent. Ajunt observatum fuisse, aquam intra duas laminas vitreas ad angulum valde exiguum ad se invicem inclinatas altius ascendere propter attractionem laminarum versus partem, qua laminae convergunt, idque ea lege, ut sectio aquae et laminarum sit hyperbola; idem accidere, quando experimentum fiat in vacuo, adeoque non posse locum babere Cartesianorum responsionem, qui causam similium phaenomenorum deducent ab aëris pressione minus liberiore.

Altera Editio Principiorum Philosophiae Naturalis D. Newtoni nondum absoluta est, nec ante finem hujus anni, ut credo, absolvetur. D. Hallejus edit Menelai Sphaericorum Libros Tres. Basileae imprimitur Patrui mei Tractatus posthumus de Arte Conjectandi, sed imperfectus; si post reditum meum in Patriam heredes defuncti mihi schedas ejus confidere velint, tractabo supplere, quae desunt. D. Goldbach cultum suum Tibi humillime defert. Vale etc.

Londini 25. Octobris S. N. 1712.

Quando rescribere placebit, diriges literas ad D. Sch. Carolum Balde, mercatorem Amstelodamensem.

Aus Leibnizens Antwort auf dieses Schreiben fand sich nur folgendes Bruchstück vor:

Newtoni tantum abest ut debitas laudes negaverim, ut potius eas concesserim, de quibus poterat dubitari. Sed Angli nimia jactando efficient, ut etiam concessa amittant.

Dudum constat assurrectionem liquoris in tubis augustis ultra libellam non pendere ab aëris pressione, cum etiam in Vacuo Gerikiano contingat. Ab impulsionibus ad attractiones redire, est inventa fruge glandibus vesci.

II.
Nic. Bernoulli an Leibniz.

Redux sum hoc ipso die Lutetiae Montmortio; locus est in Campania situs, quo ante aliquot hebdomadas non multo post adventum meum in hanc urbem me abduxerat Auctor Libri, cui titulus: Essai d'Analyse sur les jeux du Hazard, ejusque loci Dominus. Sub idem tempus acceperam literas Tuas mihi ab amico, cui eas mercator Amstelodamensis tradiderat, ex Hollandia missas. Consilium, quod mihi das quodque jam antea Patruus mihi dederat, non neglexi; statim enim post nuntium a Patruo acceptum, Te pro insigni Tua in me bonitate Illustrissimum Dominum Bothmarium per literas orasse, ut me Domino Ruzzino, Legato Veneto, commendaret, ipsumque Dominum Bothmarium literis Tuis ad inclytum hunc Virum missis me revera jam commendasse, me Lugduno, ubi tunc degeram, Hagam Comitum contuli, illustrissimumque Bothmarium adivi ipsique pro benevolentia sua et officio mihi praestito debitas gratias egi, qui me perquam humaniter excepit promisitque se data occasione mihi ulteriore commendatione apud Ruzzinum adfuturum. Ipsum postea Dominum Ruzzini Ultrajecti salutavi, a quo pari cum humanitate exceptus nec cum inani successus spe dimissus fui. Post adventum meum in hanc urbem salutavi hic Nobilissimi Quirini, ad quem pariter negotii hujus causa scribere dignatus fuisti, Fratrem et Rev. Patrem Banduri, conterraneum ejus, Ordinis S. Benedicti Monachos, Viros humanissimos pariter atque Eruditissimos, qui non exigui ponderis commendatitias in mei favorem Venetias miserunt. Tot igitur insignibus commendationibus, Tuaque praecipue, pro qua denuo summas ago gratias, adjutus non dubitarem de felici negotii successu, nisi Dominus Hermannus nuntiasset, se metuere ne Dnus. Marchio Poleni, ejusdem stationis procus, scriptis quibusdam editis inter suos celebris et fortassis Professione ista dignior quam ego, sibi successor detur.

Quod materiam attinet de impossibilitate quantitatis ex serie agnoscenda, nondum ea in re mihi satisfacere potui. Existimo, divergentiam seriei non sufficere ad concludendam ipsius impossibilitatem, cum plurimae series divergentes exhibere possint valorem realem etiam finitum. Ex. gr. inter series duas sequentes

$1+\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}xx+\frac{1.4.7.}{3.6.9}x^3+\frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4+$ etc. et $1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}xx+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4+$ etc. quae sunt ejusdem formae et quarum utraque, quando x major est quam 1, est divergens, prior habet valorem possibilem, nemque $\overline{1-x}^{-\frac{1}{3}}$, cum tamen summa posterioris sit $\overline{1-x}^{-\frac{1}{2}}$, quae est quantitas imaginaria. Ratio, cur ex sola divergentia seriei ejusdem impossibilitas dignosci nequeat, mihi videtur esse, quod impossibilitas latet in solo ultimo termino vel potius in eo, quod seriei ad complendum valorem exactum quantitatis in seriem conversae deest, et quod in formatione seriei tanquam infinite parvum (quod in casu x majoris quam 1 evadit infinite magnum) neglectum fuit. Ut me explicem, proponatur binomium $\overline{1-x}^{-n}$ sive $\frac{1}{\overline{1-x}^n}$, quod per divisionem continuam convertatur in seriem $1+nx+\frac{n.\overline{n+1}}{2}xx+\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}x^3+$ etc.; scimus per istam divisionem semper aliquid residui manere, appelletur istud residuum R, ergo quantitas proposita $\frac{1}{\overline{1-x}^n}$ proprie non est aequalis seriei praedictae $1+nx+\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}xx+$ etc. sed $1+nx+\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}xx+$ etc. $+\frac{R}{\overline{1-x}^n}$; unde liquet, quod si n denotet potestatem aliquam fractam, cujus denominator numerus par, et x major sit quam 1, solum istud residuum $\frac{R}{\overline{1-x}^n}$ fiat imaginarium. Concludo itaque, nullam seriem ex terminis mere rationalibus constantem unquam dici posse impossibilem, nisi sciamus quid in formanda serie neglectum et unde ipsa series deducta fuerit; adeoque ad casum impossibilitatis seriei detegendum oportet ut ipsa quantitas, ex qua series fluxit, detegatur, i. e. omnibus modis tentari debet, num series proposita per praeviam aliquam operationem, ex. gr. additionem, multiplicationem, differentiationem quantitatis inconstantis, quae seriem ingreditur, reduci possit ad seriem binomium $1\pm x$ ad potestatem indefinitam $\pm n$ elevatum exhibentem. Pro ista vero reductione, quae ut mihi videtur semper fieri potest,

si series imaginarium habet valorem, nullae certae regulae praescribi possunt; similis enim hic occurrit difficultas, quae in inventione integralium quemadmodum cujuslibet quantitatis differentialis facile habetur, ita etiam quaelibet quantitas in seriem converti potest, et quemadmodum a differentialibus ad integralia, sic a seriebus ad quantitates, unde series fluxerunt, non ita facilis est regressus, uti notissimum. Obiter hic observo hinc decidi etiam posse Logomachiam, quae fuit inter P. Guidonem Grandi et D. Varignonium circa spatia plusquam infinita Wallisii; ratio enim $\frac{1}{1+1}$, quae exprimit rationem inter spatia parabolica et hyperbolica ad rectangulum circumscriptum, existente l numero negativo majore quam 1, considerari potest vel ut negativa, vel ut infinities infinita; nam $\frac{1}{1+l}$ in seriem conversa dat $1-l+ll-l^3+l^4-$ etc. quae series infinite major est, quam $1+1+1+1+$ etc. cujus summa est infinita.

Doleo, Anglos Tibi molestias facessere tantasque temere excitare turbas; non dubito, quin ipsorum insultus eo modo, quo par est, depulsurus sis. Nescio autem, cur quae de querimonia Anglorum contra Collectores Actorum scripsi, in Te dicta accepisti. Vix crediderim ipsos eadem de Te queri, quod scilicet quidpiam debitae laudis D. Newtono denegaveris. Male quosdam habuit Recensio, quam Collectores fecerunt, Tractatus de Enumeratione linearum tertii ordinis et de Quadraturis Curvarum. Inter alia sinistra interpretatione acceperunt verba, quae habentur in Actis Anni 1705 pag. 34, ac si dictum esset, inventionem focorum altioris esse indaginis, quam quae a Newtono perfici queat, eamque rem a solo D. Tschirnhausii ingenio esse expectandam; quae verba atque alia similia male accepta occasionem litigio dedisse suspicor.

Prodiit hic non ita pridem nova Editio Scrutinii Veritatis Celeb. Malebrancii cum additionibus quibusdam, in quibus praecipuorum naturae phaenomenorum causas demonstrare conatur. Gravitatem ex. gr. dicit oriri a vi centrifuga non vorticis terreni, sed materiae subtilis poros aëris corporumque terrestrium replentis motuque rapidissimo in vorticibus perexiguis circumagitatae; ab eodem principio derivat etiam omnia, quae circa lucem, colores, reflexionem, refractionem etc. observantur. Valde scire aveo quid Angli, qui tantopere attractiones stabilire student, viso hoc libro

contra istam opinionem, quae attractiones omnino destruit, objecturi sunt.

Dn. de Montmort novam Editionem parat Libri sui Essai d'Analyse sur les jeux du Hazard, priori multo correctiorem et ampliorem. Exemplar unum hujus Libri una cum epistola se ante triennium ad Te misisse mihi dixit, sed quia nullum hactenus de reddito Tibi hoc libro accepit nuntium, eundem vel incuria vel fraude Bibliopolae, cui Librum confiderat, intercidisse suspicatur; dubium ipsi eximes, si vel me vel ipsum Dominum Montmortium, qui cultum suum Tibi humillime defert, hac de re certiorem facere dignaberis.

Constitui intra paucos dies redire Basileam, ubi brevi quoque adfuturus est D. Hermannus noster, qui ea, quae negotium Patavinum spectant, me plenius edocebit. Vale et mihi porro fave etc.

Dabam Parisiis d. 7 Aprilis An. 1713.

III.
Leibniz an Nic. Bernoulli.

Gaudeo quod hortatu meo de modo ex serie infinita indagandi, an et quo casu valor ejus finitus sit quantitas impossibilis, cogitare coepisti, et jam non spernenda attulisti. Illud certum est, quoties quantitas est impossibilis, seriem non posse esse advergentem seu talem, quae tamdiu continuari possit, ut a quantitate aliqua finita possibili differat quantitate minore quam sit data: alioquin enim utique possibili illi finitae aequabitur. Etsi autem non possit pro certo dici, vice versa seriem non advergentem exprimere quantitatem finitam impossibilem, cum fortasse infinitam exprimere possit: crediderim tamen, si expressio aliqua generalis limites habeat, quos transsiliendo significet aliquid impossibile, et ea expressio valoris habeatur etiam per seriem infinitam, necesse esse ut in casu limitis seu incipientis impossibilitatis series ex advergente fiat non advergens. Et putem, inquisitionem incipiendam esse ab aequationibus, quae generaliter sumtae in eodem gradu saepe tam possibiles quam impossibiles aequationes comprehendunt, et ideo radix aequationis generalis per seriem etiam generalem ex-

primetur, quam oportet comprehendere casus tam possibiles quam impossibiles, et in priori casu esse advergentem, in posteriore non advergentem.

Exemplum dabit radix $\sqrt{(1-x)}$; haec exprimi potest per seriem $\sqrt{(1-x)} = 1 - \frac{1}{2;1}x - \frac{1}{2^2;1.2}xx - \frac{1.3}{2^3;1.2.3}x^3 - \frac{1.3.5}{2^4;1.2.3.4}x^4$ etc. Hic cum x est minor unitate, quantitas est possibilis et series est advergens, sed cum x est major unitate, quantitas fit impossibilis adeoque necesse est, ut series sit non advergens. Id autem scimus ex finita expressione $\sqrt{(1-x)}$, sed operae pretium esset, idem etiam agnosci ex serie, ignorato vel dissimulato valore finito. Nempe cum $x = 1$, sequitur hinc

$$1 = \frac{1}{2;1} + \frac{1}{2^2;1.2} + \frac{1.3}{2^3;1.2.3} + \frac{1.3.5}{2^4;1.2.3.4} \text{ etc.}$$

et tunc quidem hoc aliunde inveniri poterat, habemus enim complurium ejusmodi serierum summas; sed ostendendum restat ex serie, posito x majore quam 1, advergentem cessare. Malo autem hic dicere advergentiam, quam convergentiam et divergentiam, nam cum duae series sibi continue accedunt, recte convergentes appellatae sunt a Jacobo Gregorio; sed cum de una serie ad valorem accedente agitur, rectius advergens dicetur. A seriebus aequationum seu quantitatum ordinatarum expressivis transeundum foret ad series quantitatum transcendentium vel saltem earum, quae finita expressione non habentur. Ibi enim haec impossibilitatis determinatio maxime utilis foret.

Putasti, quae Angli in Recensionem Newtoniani libri Lipsiensem dixere, non fuisse proprie dicta in me; sed ex Dni. Patrui literis intelligo, eos recensionem illam mihi attribuere, quod falso facere, vel ex immodicis laudibus Tschirnhausio attributis judicare poteris, quas a me non fuisse profectas facile intelligent, qui nos norunt.

Exiguos esse circa corpora vortices, facile praeclaro Malebranchio assenserim, sed vereor ut ab iis repeti possit gravitas, res tam generalis et quae decrescit cum distantia centri.

Interim non dubito, omnes attractiones esse ab impulsione, et miror, Anglos tanquam inventa fruge glandibus vescentes ad qualitates occultas attractrices redire. Sed talia figmenta sunt brevis aevi, et cum autoribus suis intercidere solent.

Epistola Dni. de Montmort nunquam ad me pervenit, et velim nosse, cui fuerit commissa. Itaque nec liber ejus mihi redditus est. Interea non minus me ipsi obstrictum agnosco, quam si accepissem. Vidi non ineleganter ab eo promotam doctrinam Summarum, et rogo, ut eum a me officiose salutes. Tales viros de scientiis promovendis cogitare, reipublicae interest. Interea vale et me ama etc.

Dabam Viennae Austriae 28 Jun. 1713.

P. S. Obiter addo, quandocunque series constat ex membris alternatim positivis et privativis et membra ipsa decrescunt in infinitum, seriem esse advergentem seu errorem quoque continuando decrescere in infinitum sive minorem dato fieri. Hinc si excogitaretur modus propositam aliquam seriem infinitam mutandi in talem, cujus membra essent alternatim positiva et privativa, haberetur intentum.

IV.

Nic. Bernoulli an Leibniz.

Basileae d. 9 Septembris Ao. 1713.

Intellexi ex Tuis ad Patruum literis, Te continuis commendationibus negotium Patavinum magis ac magis adjuvare, nuperque D. Abbatem Fardellam in partes nostras traxisse, quod insigne in nos studium grato animo colere nunquam desinam. De consilio Tuo scripsi ad D. Fardellam jussu Patrui, qui ipse sententiam suam Tibi significabit, nempe res suas et familiam aegre permittere, ut spartam hanc in se suscipiat. Juventutem meam non adeo mihi nocituram spero; ipsum enim Dominum Ruzzini commendatitias in mei favorem Venetias misisse mihi nuper perscripsit Dns. Michelotti, qui non obstantibus aliquibus difficultatibus non exiguam successus spem fecit.

De modo detegendi impossibilitatem quantitatis hortatu Tuo ulterius cogitavi; inveni non melius id fieri posse, quam si valor quantitatis propositae datus quomodocunque h. e. per aequationem sive finiti sive infiniti gradus, per seriem exprimatur; quae si sit advergens, certum est valorem hunc esse possibilem, sed si sit

non advergens, series non exaequabit valorem quantitatis propositae, sed deficiet ab ipsa quantitate infinita, quae vel possibilis vel impossibilis erit, prout ipse valor quantitatis, unde series deducta est, possibilis est vel impossibilis; series igitur ipsa semper habet valorem possibilem, etiamsi sit non advergens, hic enim casus suspicionem tantum praebet, ipsam deductam esse ex quantitate impossibili, quod num ita sit melius cognosci non potest, quam si omnibus modis, puta per additionem, multiplicationem, differentiationem tentetur, num reduci possit ad seriem potestatem aliquam binomii denotantem, quod quidem, fateor, saepius res erit non levis negotii. Caeterum observo, quod una eademque series non possit exhibere radicem generalem alicujus aequationis sive valorem omnium tam possibilium quam impossibilium radicum, quae illa aequatione continentur, uti existimas, sed per seriem illam exprimi valorem duntaxat unius ex radicibus propositae aequationis; verum invento valore unius radicis invenientur per divisionem pro singulis caeteris radicibus totidem aliae series, ex quarum unaquaque cognosci poterit, num radix per illam seriem expressa sit possibilis necne. Dicis, operae pretium esse, seriei alicujus nonadvergentiam (uti rectius appellas, quam divergentiam) agnosci ex ipsa serie, ignorato vel dissimulato valore ejus; mihi videtur facile id cognosci posse, nec opus esse ut series in aliam mutetur, cujus membra sint alternatim positiva et privativa; quotiescunque enim termini seriei magis ac magis crescunt tandemque in infinitum abeunt, necesse est ut series sit nonadvergens; sit ex. gr. series, quam ipse proposuisti $1 - \frac{1}{2;1}x - \frac{1}{2^2;1.2}xx - \frac{1.3}{1^3;1.2.3}x^3 - \frac{1.3.5}{2^4;1.2.3.4}x^4$ — etc. hujus termini decrescunt, donec numerus terminorum evadat major, quam $\frac{3x}{2x-2}$, tum crescere incipiunt tandemque infiniti evadunt, unde liquet quod x debeat esse major quam 1, ut series fiat nonadvergens, quod aliunde notum.

Vidi quae Angli in Commercio Epistolico Collinsii contra Te protulerunt; nunquam sane credidissem ante visum hunc librum eorum . . . . in Te exacerbatos esse, ut Te tantum non plagii publice accusare audeant; merentur iniquae ipsorum criminationes eo, quo facturum ais modo, refelli.

Occasio mihi data fuit superiore anno, cum Londini agerem, refutandi argumentum quoddam pro Divina providentia desumtum ex regularitate observata inter partus utriusque sexus, cujus Auctor erat D. Arbuthnot, Medicus Regius et Regiae Societatis socius, qui existimabat, valde improbabile esse, ut per longam annorum seriem tam exigua intercedat differentia inter numerum masculorum et numerum foemellarum, qualis observata fuit Londini 82 annis, per consequens aequalitatem hanc marium et foeminarum miraculum esse nec per casum accidere potuisse; cujus rei contrarium ego ostendi, nempe limites his 82 annis observatos inter utrorumque numerum tam magnos esse, ut maxima sit probabilitas, numerum marium et foeminarum intra illos limites casurum esse. Demonstrationem meam, quam Collectores Transactionum Philosophicarum Londini imprimere nolebant, ne Dn. Arbuthnot offenderent, nuper Berolinum misi Miscellaneis vestris inserendam, in literis ad Dn. Cunonem, quibus ei pro transmisso Diplomate receptionis meae in Inclytam vestram Societatem gratias egi; non dubito quin Tua praecipue commendatione honor iste mihi ne minimum tale speranti collatus sit. Quod si ita est, debitas persolvo gratias.

Diu est quod Dno. de Montmort, quae jusseras, perscripsi, sed nullam . . . . ad literas meas responsionem accepi; tradiderat, ni fallor, librum et Epistolam suam Bibliothecario D. Abbatis Bignonii. Altera Editio hujus libri mox perfecta erit; indicabis, si placet, per quam viam exemplar unum una cum Commentariis Academiae Regiae Anni 1710, quos D. Varignon pro Te accepit, optime ad Te mitti possit. Curabo quoque, ut Patrui mei p. m. Tractatus posthumus de Arte Conjectandi, qui nuper prelum evasit, ad Te perveniat. Vale et fave etc.

V.

Leibniz an Nic. Bernoulli.

(Im Auszuge.)

Mentem meam plane non percepisti, cum mihi imputas, quod crediderim, unam eandemque seriem posse ejusdem aequationis diversas radices exprimere. Unaquaeque series (nempe constans ex

terminis rationalibus determinatis) non potest nisi unam exprimere quantitatem. Sed hoc volui, cum aequatio est generalis ut sit possibilis vel impossibilis, prout quantitates datae variant, seriem rationalem, quae alicujus radicis valorem exprimeret, etiam fore generalem, et cum in casu talium datarum, quibus aequatio esset possibilis, futura sit advergens, in casu datarum aequationem impossibilem constituentium fore non advergentem. Ita aequatio generalis secundi gradus $xx + bx + ac = 0$ est impossibilis, quo casu ac est quantitas positiva major quam $\frac{1}{4}bb$. Itaque si quis, aliqua generali serie rationali ex hac aequatione deducta, deduceret valorem aliquem (exempli causa majorem inter duos ipsius x) ea series, quae advergens esset quamdiu ac non esset major quam $\frac{1}{4}bb$, desineret esse advergens, ubi primum ac assumeretur major.

Longe facilius mihi videtur examinare, an series proposita transformari possit in aliam, cujus partes decrescentes in infinitum sint alternatim affirmativae et negativae, quam in eam, quae denotet potestatem alicujus binomii, quod nimis est restrictum. P a r t e s dico, non t e r m i n i, potest enim pars constare ex pluribus terminis.

VI.

Nic. Bernoulli an Leibniz.

Diu est quod nihil literarum ad Te misi, impeditus partim absentia, partim negotiis; silentium hoc tam diuturnum ut excuses, enixe rogo. Gratias denuo ago maximas, quod negotium Patavinum tanto studio promovere et continuis exhortationibus apud Cl. Abbatem Fardellam instare non desinas. Literis, quas nuper ab ipso, ut et a Cl. Dno. Michelotto accepi, spes mihi facta est amplissima felicis successus. Sed et Patruus a Dno. Fardella accepit literas, quibus peramice ab eo quaesivit, num si contingeret eum honorificis valde et lautis conditionibus oblatis a Serenissima Republica Patavium vocatum iri, ipse invitationi locum aliquem daturus esset. Respondit Patruus mox sequenti die, mentemque suam hac de re et graviores quae obstant difficultates Dno. Fardellae prolixe aperuit; praecipua responsi sui contenta quin Tecum Patruus communicet, non dubito.

De modo impossibilitatem quantitatis ex serie detegendi quamvis ulterius cogitaverim, ultra ea tamen, quae Tibi jam perscripsi, nihil mihi proficere licuit. Ignosces quod quae de generali radice aequationis per generalem seriem exprimenda in priore Tua epistola dixeras, male intellexerim; gratias habeo, quod verum verborum Tuorum sensum mihi patefeceris. Transformationem serierum in alias, quarum partes continuo decrescentes alternatim sint positivae et privativae, difficillimam esse credo, praecipue literalium, numericas enim series quandoque ita transformari posse credibile est, sed quomodo id generaliter fieri possit, mihi non liquet. Generalis etiam modus agnoscendi advergentiam aut non-advergentiam alicujus seriei dari vix poterit; eo tamen non opus est ad dignoscendum, num series valorem babeat possibilem necne; nam quotiescunque valor ejus non est realis aut possibilis, sed imaginarius, oportet ut series non solum sit non advergens, sed et ut termini ejus crescant in infinitum; id autem quando contingat, ex lege progressionis seriei palam fit. Ex. gr. si proponatur aequatio secundi gradus $xx + bx = ac$, et valor radicis x per seriem exprimatur, sive per Tuam aut Moyvraei methodum reversionis serierum, sive alio modo, invenietur ex. gr. $x = \frac{ac}{b} + \frac{aacc}{b^3} + \frac{2a^3c^3}{b^5} - \frac{5a^4c^4}{b^7} + \frac{14a^5c^5}{b^9} - \frac{42a^6c^5}{b^{11}} + \text{etc.}$ Hic ex lege progressionis patet, terminum quemvis ordine n ad immediate sequentem (neglectis signis) rationem habere ut $bb \times \overline{n+1}$ ad $2ac \times \overline{2n-1}$, sive posito $n = \infty$, ut bb ad $4ac$; unde sequitur seriem non esse impossibilem, quamdiu bb majus sit quam $4ac$; quod si vero bb excedat $4ac$, valor seriei potest esse impossibilis et imaginarius, sed tum demum, quando ac simul est quantitas negativa; hoc autem quod nempe ac debeat esse quantitas negativa, ex ipsa non apparet, nisi reducatur ad aliam, quae exprimat radicem vel potestatem binomii; quare tali reductione semper opus erit, ut sciamus, num valor seriei sit imaginarius necne. Dicis hanc reductionem non omnibus quantitatibus ordinariis, nedum transcendentibus quadrare; mihi videtur hanc reductionem semper fieri posse, quando quantitas per seriem expressa est imaginaria, cum quantitas imaginaria nihil aliud sit quam radix quadrata quantitatis negativae, quanquam ad id efficiendum non levi industria plerumque opus sit. Gregorium methodum de-

disse ingrediendi seriem quam optime ad radicem aliquam aequationis prae aliis exprimendam, in Commercio epistolico, quod Wallisius edidit, legi, sed ipsam methodum nunquam vidi; ibidem etiam affertur Newtoni methodus, quae beneficio parallelogrammi et regulae perficitur, ejus autem rei demonstrationem nondum percipere potui. Mihi haec omnia tanti non esse videntur, ut insignem usum habere possint, cum quandocunque opus fuerit, per methodos approximandi a variis, praecipue ab Hallejo, jam proditas, cujuscunque aequationis radici quantum lubet approximare possimus. Newtonum in enumeratione linearum tertii ordinis errasse, mihi non videtur verisimile; examinabo tamen, quia ita jubes, ejus hac de re scriptum, quam primum per otium licuerit. Refutationem Tuam Commercii Epistolici Galli quam avidissime expectant. Montmortius librum suum altera vice edidit, eique plurimas meas epistolas inseruit; non dubito, quin exemplar unum hujus libri ad Te mitti curabit. Quae Parisiis ad Te destinata erant, ea se Professori cuidam Hanoverano tum Parisiis agenti tradidisse, Varignonius scripsit. Exemplar Libri defuncti Patrui mei Tibi destinatum proximis nundinis Francofurtum mitti curabo; indicabis si placet, ad quem inscriptionem dirigi desideres. Quod superest, vale et mihi porro fave etc.

Basileae d. 28. Febr. Ao. 1714.

VII.
Nic. Bernoulli an Leibniz.

Diu nimis distuli, quam nunc demum persolvo, debitam gratiarum actionem pro eo, quod Tua praesertim cura ac indesinenti exhortatione negotium Patavinum ex voto tandem confectum sit. Excel. Dominus Comes Schulemburgius negotium hoc a Te sibi commendatum, si non consiliis suis, quod ferte ob gravioris momenti curas non potuit, intrepida saltem et forti insulae Corcyrae defensione haud parum promovit, siquidem Insulae hujus libera-

*) Von diesem bereits gedruckten Briefe (Commer. epist. Leib. et Joh. Bernoull. Tom. II. p. 393 sq.) lag das Original nicht vor.

tionem mox secuta est, quam antea sperare vix licebat, electionis meae ad Cathedram mathematicam a Dominis Reformatoribus ante aliquot menses factae confirmatio, de qua misso Senatus-Consulti hac de re facti Apographo, nuper me certiorem fecit Michelottus noster. Proficiscar igitur, bono cum Deo, intra paucos dies, ut Provinciam demandatam, durante adhuc mense Novembri, vel initio Decembris auspicari queam. Det Deus, ut Professione ista in sui honorem et rei literariae, praecipue mathematicae, commodum defungar, et ut spem et promissa de me Tua ita non fallam, ut de patrocinio et favore Tuo, quem hactenus mihi summopere gratulatus sum, nec posthac dubitandi locum habeam. Vale et fave etc.

Basileae a. d. 24. Octob. 1716.

P. S. Dominum Taylorum Anglum, occasione problematis Tui de ducendis trajectoriis, Te ad certamen provocasse problemate, cujus solutionem mox invenimus, ex Patrui mei literis intellexisti. Forte non ingratum erit, si hic apponam propria ipsius Taylori verba ad Dnum. Montmortium scripta: I f M r. L e i b n i t z d e l i g h t s i n P r o b l e m s, I w o u l d p r o p o s e t h e f o l l o w i n g o n e t o h i m, w i c h I c a n s o l v e. T i s a p a r t i c u l a r c a s e o f h i s o w n g e n e r a l P r o b l e m, b u t i l t e n d s m o r e t o t h e d i s c o v e r y, o f a M a n's k i l l i n t h e m e t h o d o f f l u x i o u s, t h e n t h e P r o b l e m d o e s, a s h e h a s p r o p o s e d i s. Problema autem sequens Domino de Montmort proposuit: I n v e n i r e c u r v a m, q u a e p e r d a t u m p u n c t u m t r a n s e a t, e t a d a n g u l o s r e c t o s s e c e t c u r v a s o m n e s, p e r a l i u d p u n c t u m t r a n s e u n t e s, e t e x p r e s s a s p e r a e q u a t i o n e m $zzddx = 2xdz^2$, n e m p e z f l u e n t e u n i f o r m i t e r. Inveni aequationem integralem huic differentio-differentiali $zzddx = 2xxdz^2$ respondentem esse istam $z^3 = axz + abc$: et proinde curvam isti aequationi satisfacientem esse Parabolam, si terminus abc deficiat, et Hyperbolam, si $a = \infty$ et bc sit quantitas negativa. Trajectoriae autem pro istiusmodi curvis facile inveniuntur per Methodum a Te in Actis Lipsiensibus olim propositam, cum qua sane coincidit Methodus Dni. Hermanni, ut et illa qua ego utor, quamque pridem cum Dno. De Montmort communicavi, inscius vel saltem oblitus Te simile quid in Actis dedisse. Si x et y sint coordinatae trajectoriae quaesitae, p linea illa variabilis quae determinat speciem vel positionem curvarum, ad quas alia ad angulos rectos duci debet, quaero valorem ipsius p in x, et constantibus, quo differentiato, et mutatis

dx in dy et dy in dx, positisque membris per dx multiplicatis aequalibus illis, quae per dy multiplicantur, habebitur aequatio differentialis satisfaciens Trajectoriae quaesitae.

Pervenit ad nos super demum Taylori Liber De Methodo incrementorum, in quo nulla fere nova, sed pleraque jam diu nota, obscure tamen et nimis in abstracto proposita inveni, ita ut paucis ea intelligi credam. Propositionem ejus tertiam ego jam olim in hunc modum solvi. Sit aequatio differentialis, in quam ingrediantur variabiles duae x et z cum suis differentialibus dx et dz, quorum dz supponitur esse constans, oporteat invenire quid pro ddx, d^3x etc. substitui debeat, ut dz fiat variabilis et dx constans. Fingo $ddx = Adz^2$, ubi A significat quantitatem compositam ex x, z et constantibus: hinc integrando habetur $dx = \int Adzdz$, sive $dx : dz = \int Adz$, quae aequatio iterum differentiata, ponendo dz variabilem et dx constantem dat $- dxddz : dz^2 = Adz$, vel $- dxddz : dz = Adz^2 = ddx$. Q. E. Inv. Sic pro differentialibus tertiis suppono $d^3x = Adz^3$: hinc integrando $ddx = dz^2 . \int Adz$, vel (ponendo pro ddx valorem ejus modo inventum et dividendo per dz^2) $- dxddz : dy^3 = \int Adz$, quae iterum differentietur, sumta dx constante, et habebitur $(- dxdzd^3z + 3dxddz^2) : dz^4 = Adz$, sive $- dxdzd^3z + 3dxddz^2 = Adz^3 = d^3x$, quemadmodum Taylorus quoque invenit; eodemque modo procederem in reliquis differentialium gradibus.